Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета ВМК МГУ
_______________ /И.А.Соколов/
«27» 09 _______________ 2023 г.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Наименование дисциплины (модуля):
Алгебра и аналитическая геометрия

Уровень высшего образования:
бакалавриат

Направление подготовки (специальность):
02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Направленность (профиль) ОПОП:
дисциплина относится к базовой части программы

Форма обучения:
очная

Москва 2023

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ бакалавриата, магистратуры, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки по направлениям 02.03.02, 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

1. Дисциплина относится к базовой части ОПОП ВО.

2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по алгебре и геометрии в объеме, соответствующем профильному уровню подготовки программы по математике средней школы.

3. Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

- **ОПК-1.Б** Способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с фундаментальной информатикой и информационными технологиями
- **ПК-2.Б** Способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

Знать:
1. основные понятия, определения и факты аналитической геометрии, общей и линейной алгебры;
2. базовые алгоритмы алгебры;
3. основы теории исследования систем линейных алгебраических уравнений;
4. основы теории конечномерных пространств;
5. основы теории операторов и квадратичных форм в конечномерных пространствах.

Уметь:
1. применять на практике общую теорию и базовые алгоритмы решения задач алгебры и геометрии;
2. использовать алгебраический аппарат при решении задач в конечномерных пространствах;
3. анализировать структуру линейных операторов, характеристики квадратичных форм.

Владеть:
1. методами аналитической геометрии и линейной алгебры, проблемно-задачной формой представления математических знаний;
2. навыками использования базовых алгоритмов алгебры и их анализа при решении задач.

4. Формат обучения: лекции и семинарские занятия проводятся с использованием меловой доски.

5. Объем дисциплины (модуля) составляет 12 з.е., в том числе 216 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 216 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), **Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**	**Всего (часы)**	В том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, часы			**Самостоятельная работа обучающегося, часы**
		Занятия лекционного типа*	Занятия семинарского типа*	**Всего**	
Первый семестр					
1. Операции над матрицами. Определитель. Обратная матрица.	**32**	11	9	**20**	**12**
2. Геометрические векторы. Линейные операции.	**16**	6	4	**10**	**6**
3. Вещественное линейное пространство	**16**	5	5	**10**	**6**
4. Ранг матрицы	**18**	5	5	**10**	**8**
5. Системы линейных алгебраических уравнений	**26**	8	6	**14**	**12**
6. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 1	**2**	0	2	**2**	**0**
7. Текущий контроль успеваемости: коллоквиум	**6**	0	2	**2**	**4**
8. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов	**20**	6	6	**12**	**8**
9. Аффинная система координат. Прямая и плоскость	**28**	8	8	**16**	**12**
10. Линии и поверхности второго порядка	**16**	5	5	**10**	**6**
11. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 2	**2**	0	2	**2**	**0**

Промежуточная аттестация: зачет	**2**	0	0	**0**	**2**
Промежуточная аттестация: устный экзамен	**32**	0	0	**0**	**32**
Итого в первом семестре	**216**	**54**	**54**	**108**	**108**
Второй семестр					
1. Комплексные числа	**24**	7	7	**14**	**10**
2. Линейное пространство над произвольным полем	**26**	8	6	**14**	**12**
3. Евклидово и унитарное пространства	**28**	8	8	**16**	**12**
4. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 3	**2**	0	2	**2**	**0**
5. Линейные операторы в линейных пространствах	**38**	12	10	**22**	**16**
6. Линейные операторы в евклидовом и унитарном пространствах.	**28**	8	8	**16**	**12**
7. Билинейные и квадратичные формы.	**20**	6	6	**12**	**8**
8. Линейные операторные уравнения	**14**	5	5	**10**	**4**
9. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 4	**2**	0	2	**2**	**0**
Промежуточная аттестация: зачет	**2**	0	0	**0**	**2**
Промежуточная аттестация: устный экзамен	**32**	0	0	**0**	**32**
Итого	**216**	**54**	**54**	**108**	**108**

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

Контрольная работа № 1

1. Квадратная матрица A порядка $n \geq 3$ является трёхдиагональной матрицей следующего вида:

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & & & & & \\ 3 & 3 & 2 & & & & \\ & 1 & 3 & 2 & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & 1 & 3 & 2 \\ & & & & & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Выяснить, может ли её определитель быть равен 69 и, если да, то при каком значении её порядка n.

2. Вычислить определитель n -го порядка ($n \geq 3$) следующей матрицы:

$$\begin{bmatrix} n & \dots & n & n & 2n-1 & 1 \\ n & \dots & n & n & 2 & 2n-1 \\ n & \dots & n & 3 & n & n \\ n & \dots & 4 & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & \dots & n & n & n & n \end{bmatrix}$$

3. Известно, что векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ линейного пространства V линейно независимы. Выяснить, при каких значениях λ линейно независимы векторы $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{z} = -3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 10\boldsymbol{c} + 4\boldsymbol{d}$.

4. Обратить трёхдиагональную матрицу порядка n:

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ & 1 & 2 & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & 1 & 2 & \\ & & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Используя фундаментальную систему решений, найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ 8x_1 - x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

6. Для каждого λ исследовать и решить систему

$$\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 + x_3 = -4, \\ -2x_1 - \lambda x_2 - x_3 = 2 + \lambda, \\ 4x_1 + 4x_2 + \lambda x_3 = -8. \end{cases}$$

7. Доказать, что присоединенные матрицы $\hat{A}$, $\hat{B}$ к произвольным квадратным матрицам A, B одинакового порядка удовлетворяют соотношению: $\widehat{AB} = \hat{B}\hat{A}$.

Контрольная работа № 2

1. Известно, что объём параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ равен 2. Найдите объём параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}$.

2. Найти все векторы $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющие равенству $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}] = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a} = \{3, -2, 5\}$, $\boldsymbol{b} = \{1, -1, -1\}$.

3. В треугольнике ABC известны его вершина $C(5,3)$ и уравнения двух высот $3x - 2y = 0$ и $5x + 3y - 25 = 0$. Составить уравнение стороны AB.

4. Составить уравнение биссекторной плоскости двугранного угла между плоскостями $6x - 3z + 2 = 0$, $2x - 5y + 4z - 1 = 0$, в котором лежит точка $M(1,1,-1)$.

5. Составить уравнение общего перпендикуляра к прямым

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z+6}{-4}, \quad \frac{x}{0} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{2}.$$

6. Центр окружности, описанной около правильного треугольника ABC, расположен в точке $(1,3)$. Найти координаты вершин B и C, если известно, что $A(5,1)$.

7. Плоский выпуклый четырёхугольник задан своими вершинами в пространстве: $M_i(r_i)$, $i = \overline{1,4}$. Найти необходимые и достаточные условия того, что заданная точка $M_0(r_0)$ является его внутренней точкой.

Контрольная работа № 3

1. Найти базисы суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2, где $L_1 = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3), a_1 = (1,2,1,1)$, $a_2 = (2,3,1,0)$, $a_3 = (3,1,1,-2)$, а $L_2 = \{x \in R^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

2. Доказать, что множество $L = \{p(t) \in M_3 \mid p(1) = 0, p'(1) + p(0) = 0\}$ образует линейное подпространство пространства M_3. Найти два различных дополнительных подпространства к L.

3. Построить какой-либо ортонормированный базис линейной оболочки матриц

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Найти ортогональную проекцию вектора $g = (2,2,0,1)$ на подпространство

$$L = \{x \in R^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \quad 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

5. Определить расстояние от многочлена $g(t) = 3t^3 - 3t^2 - t + 2$ до многообразия $P = \{p(t) \in M_3 \mid p(1) = 2, p'(0) = 1\}$.

6. Доказать, что если две гиперплоскости не пересекаются, то они параллельны.

7. Найти геометрическое место точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z + 2i| - |z - 2i| = 3$.

Контрольная работа № 4

1. Оператор $\mathcal{A}$ действует в пространстве M_3 по правилу $\mathcal{A}f(t) = f(2t) - f(t + 1)$. Построить матрицу этого оператора в базисе $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = 1 - t$, $e_3(t) = t + t^2$, $e_4(t) = t^2 - t^3$ и указать какие-либо базисы его ядра $\ker\mathcal{A}$ и образа $\operatorname{im}\mathcal{A}$.

2. Найти все собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Показать, что матрица $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ диагонализуема, и привести её к диагональной подходящим преобразованием подобия.

4. Оператор $\mathcal{H}$ задан матрицей $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ в базисе $f_1 = (1,1,0)$, $f_2 = (0,1,0)$, $f_3 = (0,0,1)$ пространства R^3 со стандартным скалярным произведением. Найти матрицу сопряжённого оператора $\mathcal{H}^*$ в этом же базисе f_1, f_2, f_3.

5. Найти квадратный корень из матрицы $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

6. Известно, что операторы $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W, V)$ удовлетворяют условию: произведение $\mathcal{BA}$ является тождественным оператором в пространстве V. Доказать, что если пространства V и W имеют разную размерность, то произведение $\mathcal{AB}$ не может быть тождественным оператором в пространстве W.

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму

$$F = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

к каноническому виду и написать этот канонический вид.

Вопросы к коллоквиуму (первый семестр)

Коллоквиум проводится в форме устного собеседования. Для не сдавших коллоквиум зачёт (и зачётная комиссия) начинается с вопросов по теоретическому материалу коллоквиума. Билет коллоквиума содержит один вопрос из следующего списка:

1. Перестановки.
2. Определитель, свойства определителя.
3. Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
4. Разложение определителя по строке (столбцу). Определитель произведения матриц.
5. Обратная матрица. Критерий обратимости.
6. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
7. Ранг матрицы и линейная зависимость её строк (и столбцов).
8. Ранг произведения матриц. Инвариантность ранга относительно элементарных преобразований.
9. Системы линейных алгебраических уравнений с квадратной невырожденной матрицей. Правило Крамера.
10. Критерий совместности и определённости системы линейных алгебраических уравнений.

11. Исследование и решение системы линейных алгебраических уравнений общего вида. Общее решение.
12. Эквивалентность систем линейных алгебраических уравнений. Элементарные преобразования систем.
13. Метод Гаусса исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений.
14. Линейное пространство. Арифметическое пространство.
15. Линейная зависимость в линейном пространстве.
16. Базис и размерность линейного пространства.
17. Линейное подпространство и линейное аффинное многообразие в линейном пространстве. Определение и простейшие свойства.
18. Геометрические свойства решений однородной системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений.
19. Геометрические свойства решений неоднородной системы линейных алгебраических уравнений. Общее решение.

Вопросы к коллоквиуму (второй семестр)

Коллоквиум проводится в форме устного собеседования. Для не сдавших коллоквиум зачёт (и зачётная комиссия) начинается с вопросов по теоретическому материалу коллоквиума. Билет коллоквиума содержит один вопрос из следующего списка:

1. Поле комплексных чисел. Комплексная плоскость. Тригонометрическая форма комплексного числа. Модуль и аргумент произведения комплексных чисел.
2. Возведение в степень комплексного числа. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа.
3. Линейное пространство над произвольным полем. Ранг и база системы векторов. Изоморфизм линейных пространств.
4. Сумма и пересечение линейных пространств. Прямая сумма линейных пространств.
5. Евклидово и унитарное пространство. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Существование ортонормированного базиса.
6. Матрица Грама. Критерий линейной зависимости.
7. Ортогональное дополнение. Ортогональная сумма подпространств. Расстояние от вектора до подпространства.
8. Ортонормированный базис и унитарные (ортогональные) матрицы.
9. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
10. Линейное аффинное многообразие в линейном пространстве. Гиперплоскость в евклидовом и унитарном пространстве.
11. Линейные операторы. Определение, основные свойства, примеры. Теорема о существовании и единственности оператора по заданным образам базисных векторов.
12. Матрицы линейных операторов. Взаимно-однозначное соответствие между линейными операторами и матрицами.
13. Линейное пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц.
14. Матрица линейного оператора. Связь между координатами вектора и его образа.
15. Матрицы линейного оператора в различных базисах.
16. Эквивалентные матрицы. Критерий эквивалентности.
17. Образ и ядро линейного оператора.

18. Произведение линейных операторов. Матрица произведения.
19. Обратный оператор. Критерий обратимости.
20. Инвариантные подпространства. Индуцированный оператор.
21. Инвариантные подпространства минимальной размерности (в комплексном и вещественном случаях).
22. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Определение и простейшие свойства. Примеры.
23. Характеристический многочлен линейного оператора. Определение и простейшие свойства.
24. Условие существования собственных векторов линейного оператора. Собственные векторы линейного оператора в комплексном пространстве.
25. Собственное подпространство. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения.
26. Операторы простой структуры. Критерий простой структуры.
27. Треугольная форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве.

7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

Зачетная работа первого семестра

Вариант 1 (для проведения в группах)

1. Вычислить определитель n -го порядка ($n \geq 3$)

$$\begin{vmatrix} 13 & 8 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -4 & -3 & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & a & \dots & a & a \\ 0 & 1 & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где X - матрица порядка n .

3. Найти ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

в зависимости от значений параметра λ .

4. Исследовать и найти решения системы

$$\begin{bmatrix} 2\lambda+1 & -\lambda & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda-2 \\ 2\lambda-1 & \lambda-1 & 2\lambda-1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} \lambda-1 \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$

в зависимости от значений параметра λ.

5. Найти фундаментальную систему решений для уравнения

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 0.$$

6. Построить однородную систему уравнений $Ax = 0$ по заданной фундаментальной системе решений: $e_1 = (-2,1,1,1)$, $e_2 = (0,1,2,0)$, $e_3 = (1,-1,0,1)$.

7. Вычислить объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, зная его вершину $A(1,2,3)$ и координаты концов выходящий из неё рёбер: $B(9,6,4), D(3,0,4), A_1(5,2,5)$.

8. На плоскости заданы две системы координат: $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ и $\{O_1; \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$. Вторая система получена из первой поворотом вокруг точки $A(1,1)$ на угол $\varphi = 45^{\circ}$ в направлении кратчайшего поворота от $\boldsymbol{e}_1$ к $\boldsymbol{e}_2$. Найти координаты (x, y) точки в первой системе координат, если известны её координаты (x', y') во второй системе координат.

9. Составить уравнение биссектрисы острого угла между прямыми $x - 3y = 0$ и $3x - y + 5 = 0$.

10. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(5,2,0)$ и удаленной от точки $B(6,1,-1)$ на расстояние 1, а от точки $C(0,5,4)$ на расстояние 3.

11. Определить тип кривой, заданной уравнением

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0,$$

и найти уравнения осей канонической системы координат.

Вариант 2 (для проведения зачетной комиссии)

1. Находя присоединенную матрицу, вычислить

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

2. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 14x_4 = 8, \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 - x_4 = -5, \\ 3x_1 - 9x_2 - 5x_3 - 6x_4 = -4. \end{cases}$$

3. В треугольнике ABC заданы уравнения стороны $AC: x - 2y + 7 = 0$ и медиан $AM: x + y - 5 = 0$, $CL: 2x + y - 11 = 0$. Составить уравнение высоты треугольника, проведённой из вершины A.

4. Написать уравнение плоскости α, проходящей через начало координат перпендикулярно прямой

$$l: \frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{-2}.$$

Найти расстояние от точки $M(-2,3,1)$ до этой плоскости и координаты ее проекции на плоскость α.

5. Определить тип линии, заданной уравнением

$$4x^2 + 6y^2 + 4x - 8y + 3 = 0.$$

Зачетная работа второго семестра

Вариант 1 (для проведения в группах)

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных подпространств, натянутых на системы a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 соответственно, где $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,1,-1,-1)$, $a_3 = (1,-1,1,-1)$; $b_1 = (1,-1,-1,1)$, $b_2 = (1,-1,0,0)$, $b_3 = (3,-1,1,1)$.

2. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис линейной оболочки векторов $x_1 = (2,3,-4,-6)$, $x_2 = (1,8,-2,-16)$, $x_3 = (12,5,-14,5)$, $x_4 = (3,11,4,-7)$.

3. Найти угол между вектором $a = (-3,15,1,-5)$ и линейной оболочкой векторов $b_1 = (2,3,-4,-6)$, $b_2 = (1,8,-2,-16)$, $b_3 = (1,-5,-2,10)$.

4. Найти все собственные значения и векторы матрицы

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Доказать, что неоднородная система линейных уравнений $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда вектор-столбец b ортогонален всем решениям сопряженной однородной системы $A^*y = 0$.

6. В пространстве многочленов M_2 со стандартным скалярным произведением задан ортогональный оператор $\mathcal{A}$ с определителем, равным -1, который переводит многочлен $1 + t + t^2$ в $-1 - t + t^2$, а многочлен $1 - t^2$ в $1 - t$. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $1, t, t^2$.

7. Найти нормальный вид квадратичной формы

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

и приводящее к нему треугольное преобразование координат.

8. Найти нормальное псевдорешение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

9. В пространстве M_2 введено скалярное произведение

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Найти матрицу оператора, сопряженного к оператору дифференцирования, в базисе $1, t, t^2$.

10. Доказать, что пространство M_3 является прямой суммой подпространств L_1 и L_2, и найти проекцию многочлена $p(t) = t^3 + 1$ на L_1 параллельно L_2, если $L_1 = \{f(t) \in M_3 \mid f(0) = f(1)\}$, $L_2 = \{f(t) \in M_3 \mid f(2t) = 2f(t), \ \forall t \in R\}$.

11. Решить уравнение в комплексных числах: $|z| + z = 8 + 4i$.

Вариант 2 (для проведения зачетной комиссии)

1. Найти базисы $L_1 + L_2$, $L_1 \cap L_2$, если L_1 задано однородной системой

$$\begin{cases} 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

а L_2 является ортогональным дополнением к множеству решений системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

2. Найти базисы образа и ядра линейного оператора, отображающего матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ соответственно в матрицы $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

3. Найти все собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Найти расстояние от точки, заданной вектором $x = (5,3,-1,-1)$ до линейного аффинного многообразия H, заданного системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

5. Выписать канонический вид и приводящее к этому виду *ортогональное* преобразование координат для квадратичной формы

$$f = -3x_3^2 - 2x_2x_3 + 6x_1x_2 + x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2.$$

6. Найти двумерное инвариантное подпространство для линейного оператора, действующего в пространстве R^3 и заданного в некотором его базисе матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вопросы к экзамену

Экзамен сдается в устной форме. В экзаменационном билете – два вопроса из приведенных ниже списков по семестрам.

Первый семестр

1. Операции над матрицами и их свойства.
2. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Приведение к диагональному виду.
3. Перестановки, транспозиции, чётность.
4. Определитель и его свойства как функции столбцов (строк).
5. Определитель транспонированной матрицы.
6. Определитель произведения матриц.
7. Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
8. Невырожденные матрицы. Обратные матрицы. Критерий обратимости матрицы.
9. Линейное пространство. Определение и примеры. Арифметическое пространство.
10. Линейная зависимость в линейном пространстве.
11. Базис и размерность линейного пространства.
12. Переход к другому базису, матрица перехода.
13. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.

14. Ранг матрицы и линейная зависимость строк и столбцов.
15. Ранг произведения матриц. Ранг матрицы и элементарные преобразования.
16. Эквивалентные матрицы. Критерий эквивалентности.
17. Системы линейных алгебраических уравнений. Эквивалентность систем. Элементарные преобразования систем.
18. Системы с невырожденной матрицей. Правило Крамера.
19. Критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений. Критерий единственности решения.
20. Исследование системы линейных алгебраических уравнений общего вида. Главные и свободные неизвестные. Общее решение системы.
21. Метод Гаусса исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений. Число арифметических операций в методе Гаусса.
22. Линейное подпространство. Геометрические свойства множества решений однородной системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений. Общее решение.
23. Линейное многообразие. Геометрические свойства множества решений неоднородной системы линейных алгебраических уравнений. Общее решение.

Аналитическая геометрия

1. Направленные отрезки. Свободный вектор.
2. Линейные операции над векторами. Координаты вектора.
3. Проекции вектора. Свойства линейности проекций.
4. Линейная зависимость векторов. Коллинеарные и компланарные векторы.
5. Аффинная система координат. Преобразование координат.
6. Преобразования прямоугольных декартовых координат. Ортогональные матрицы.
7. Скалярное произведение геометрических векторов. Скалярное произведение в прямоугольных декартовых координатах.
8. Векторное произведение векторов.
9. Смешанное произведение векторов.
10. Векторное и смешанное произведения в прямоугольных декартовых координатах.
11. Алгебраические линии и поверхности. Инвариантность порядка линии (поверхности).
12. Параметрические уравнения прямой на плоскости и плоскости в пространстве.
13. Общее уравнение прямой на плоскости в аффинной системе координат. Критерий параллельности вектора прямой.
14. Общее уравнение плоскости в пространстве в аффинной системе координат. Критерий параллельности вектора плоскости.
15. Взаимное расположение двух прямых на плоскости и плоскостей в пространстве.
16. Пучок прямых на плоскости и плоскостей в пространстве.
17. Полуплоскости и полупространства.
18. Уравнения прямой в пространстве.
19. Взаимное расположение прямых в пространстве.
20. Метрические задачи на прямую и плоскость в прямоугольных координатах.

21. Общее уравнение линии второго порядка на плоскости. Матричная запись общего уравнения и его квадратичной части.
22. Приведённые уравнения линии второго порядка на плоскости. Метод вращений.
23. Классификация линий второго порядка на плоскости.
24. Эллипс. Фокусы и директрисы.
25. Гипербола. Фокусы и директрисы.
26. Парабола. Фокус и директриса.
27. Простейшие выпуклые множества, их описание.

Второй семестр

1. Поле комплексных чисел. Комплексная плоскость.
2. Тригонометрическая форма комплексного числа. Модуль и аргумент произведения комплексных чисел.
3. Возведение в степень комплексного числа. Формула Муавра.
4. Извлечение корня из комплексного числа.
5. Линейное пространство над произвольным полем. Ранг и база системы векторов.
6. Изоморфизм линейных пространств.
7. Сумма и пересечение линейных пространств.
8. Прямая сумма линейных пространств.
9. Евклидово и унитарное пространство. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.
10. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Существование ортонормированного базиса.
11. Изометрия.
12. Матрица Грама. Критерий линейной зависимости.
13. Ортогональное дополнение. Ортогональная сумма подпространств. Расстояние от вектора до подпространства.
14. Ортонормированный базис и унитарные (ортогональные) матрицы.
15. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. QR-разложение матрицы.
16. Линейное аффинное многообразие в линейном пространстве. Гиперплоскость в евклидовом и унитарном пространстве.
17. Линейные операторы. Матрица линейного оператора.
18. Матрица линейного оператора при переходе к другому базису. Эквивалентность и подобие матриц.
19. Линейное пространство линейных операторов и матриц.
20. Произведение линейных операторов и его матрица.
21. Ядро и образ линейного оператора. Каноническая пара базисов.
22. Линейные функционалы. Сопряжённое пространство. Линейные функционалы и гиперплоскости.
23. Обратный оператор. Критерии обратимости.
24. Собственные значения и собственные векторы. Операторы простой структуры и диагонализуемые матрицы.
25. Характеристический многочлен линейного оператора. Условие существования собственных значений.

26. Собственное подпространство. Геометрическая и алгебраическая кратности собственных значений.
27. Инвариантные подпространства. Сужение оператора.
28. Треугольная форма матрицы линейного оператора. Теорема Шура.
29. Сдвиг оператора, нильпотентность и обратимость его сужений.
30. Инвариантные подпространства минимальной размерности.
31. Сопряжённый оператор. Существование и единственность. Матрица сопряжённого оператора.
32. Нормальный оператор и нормальная матрица.
33. Эрмитовы операторы и эрмитовы матрицы. Эрмитово разложение линейного оператора.
34. Симметрические операторы и симметрические матрицы.
35. Унитарные операторы и унитарные матрицы.
36. Блочно-диагональная форма ортогональной матрицы.
37. Знакоопределённые операторы и матрицы. Квадратный корень из оператора.
38. Полярное разложение оператора (матрицы).
39. Ортогональные дополнения ядра и образа линейного оператора. Теорема и альтернатива Фредгольма.
40. Билинейные и квадратичные формы. Приведение к каноническому виду.
41. Закон инерции квадратичных форм.
42. Приведение квадратичной формы к главным осям.
43. Положительно определённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

Примеры экзаменационных билетов:

1. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
2. Метрические задачи на прямую и плоскость в прямоугольных координатах.

1. Ортогональное дополнение. Ортогональная сумма подпространств. Расстояние от вектора до подпространства..
2. Треугольная форма матрицы линейного оператора. Теорема Шура.

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ **результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)**				
Оценка / РО и соответствующие виды оценочных средств	2	3	4	5

Знания *Коллоквиум, Экзамен*	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения *Контрольная работа, зачет*	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) *Экзамен*	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)	
Результаты обучения	Компетенция, с частичным формированием которой связано достижение результата обучения
Знать: 1. основные понятия и методы матричного анализа; 2. методологию применения понятия вещественного линейного пространства для изучения задач матричного анализа; 3. основы теории линий второго порядка; 4. основы теории операторов в конечномерных линейных пространствах; 5. основы теории билинейных и квадратичных форм в конечномерных пространствах. **Уметь:** 1. применять на практике алгоритмы матричного анализа и методы вычисления определителей; 2. применять методы векторного анализа для решения геометрических задач; 3. решать задачи на плоскости и в пространстве, связанные с прямыми и плоскостями; 4. решать задачи на плоскости и в пространстве, связанные с линиями второго порядка; 5. решать задачи в конечномерных линейных пространствах над произвольным полем;	ОПК-1.Б

6. решать задачи в конечномерных евклидовых и унитарных пространствах; 7. описывать и анализировать свойства линейных операторов в конечномерных линейных пространствах; 8. применять на практике алгоритмы решения задач, связанных с билинейными и квадратичными формами в конечномерном пространстве. **Владеть:** 1. навыками решения и исследования систем линейных алгебраических уравнений; 2. навыками решения задач координатным методом; 3. приемами решения задач в поле комплексных чисел; 4. навыками построения канонических форм линейных операторов; 5. навыками построения канонического вида квадратичных форм.	
Уметь: 1. анализировать и модифицировать методы решения задач в евклидовых и унитарных пространствах 2. анализировать и описывать характерные особенности операторы, действующие в евклидовых и унитарных пространствах; **Владеть:** 1. навыками исследования и решения метрических задач в конечномерных линейных пространствах; 1. навыками решения матричных задач с использованием операторных моделей; 2. навыками анализа и решения линейных операторных уравнений в конечномерных пространствах.	ПК-2.Б

8. Ресурсное обеспечение:

Основная литература:

1. Ильин В. А., Ким Г. Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Проспект, 2012.
2. Ким Г. Д., Крицков Л. В. Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи, Т.1-2. М.: Планета знаний, 2007, 2009.
3. Воеводин В. В. Линейная алгебра. Лань, 2006.
4. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра. М.: Физматлит, 2007.
5. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. Лань, 2006.
6. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. Лань, 2010.

Дополнительная литература:

1. Бахвалов С. В., Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1964.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.
3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2009.
4. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2007.

5. Кострикин А. И. Введение в алгебру. М.: МЦНМО, 2009.
6. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. Лань, 2008
7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Лань, 2011.
8. Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1976.
9. Шикин Е. В. Линейные пространства и отображения. М.: Изд-во МГУ, 1987.
10. Шилов Г. Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства). М.: Наука, 1969.

Материально-техническое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

9. Язык преподавания - русский.

10. Преподаватели:
профессор факультета ВМК МГУ Т.Н. Фоменко,
доценты факультета ВМК МГУ Л.В.Крицков, В.В. Сазонов,
ассистенты факультета ВМК МГУ О.Н.Бобылева, Ю.Р. Нестеренко.

11. Авторы программы:
профессор факультета ВМК МГУ В.А.Ильин, доценты факультета ВМК МГУ Г.Д. Ким, Л.В. Крицков.