Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ

__________________ /И.А.Соколов/

«27» 09 2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Наименование дисциплины (модуля):

Дифференциальные уравнения

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки (специальность):

02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Направленность (профиль) ОПОП:

дисциплина относится к базовой части программы

Форма обучения:

очная

Москва 2023

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ бакалавриата, магистратуры, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки по направлениям 02.03.02, 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

1. Дисциплина относится к базовой части ОПОП ВО.

2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу и линейной алгебре в объеме, соответствующем программе первого года обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

3. Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

- **ОПК-1.Б** Способность применять и адаптировать существующие математические и компьютерные методы для разработки и реализации алгоритмов решения актуальных задач в области фундаментальной и прикладной математики
- **ОПК-2.Б** Способность применять и модифицировать математические модели, а также интерпретировать полученные математические результаты при решения задач в области профессиональной деятельности

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

Знать:
1. методологию вывода и анализа основных моделей, приводящих к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ);
2. основные классы интегрируемых ОДУ и методы их решения;
3. общую теорию и методы решения линейных ОДУ и линейных систем ОДУ;
4. основы теории существования, единственности и зависимости от параметров решений задачи Коши, а также связанные с ними методы приближённого решения ОДУ;

Уметь:
1. применять на практике общую теорию и методы решения линейных ОДУ и систем ОДУ, в том числе, метод вариации постоянных, а также находить частное решение в виде квазимногочлена;
2. находить приближённые решения ОДУ в виде степенных рядов, применять теорию зависимости решений ОДУ от параметров для приближённого решения ОДУ;

Владеть:
1. навыками интегрирования основных классов ОДУ и уравнений в частных производных первого порядка;
2. навыками применения теорем о существовании и единственности решения задачи Коши для качественного исследования ОДУ.

4. Формат обучения: лекции и семинарские занятия проводятся с использованием меловой доски.

5. Объем дисциплины (модуля) составляет 4 з.е., в том числе 72 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 72 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), **Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**	**Всего (часы)**	В том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, часы			**Самостоятельная работа обучающегося, часы** *(виды самостоя-тельной работы – эссе, реферат, контрольная работа и пр.)*
		Занятия лекционного типа*	Занятия семинарского типа*	**Всего**	
1. Основные понятия и методы интегрирования (примеры вывода математических моделей, содержащих ОДУ; понятия решения, интегральной кривой, фазовой траектории, общего интеграла ОДУ; ОДУ в симметричной форме, параметрическое решение, ОДУ в полных дифференциалах и его свойства, интегрирующий множитель и его свойства).	**26**	6	10	**16**	**10**
2. Задача Коши (теоремы о существовании и единственности решения задач Коши для ОДУ разных видов и их систем, в том числе линейных).	**12**	8	2	**10**	**2**

3. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 1 (и/или эссе, реферат и т.п.)	**2**	0	2	**2**	**0**
4. Общая теория линейных ОДУ и систем линейных ОДУ (понятие линейной зависимости функций, определитель Вронского и его свойства; ФСР и общее решение, построение ФСР для линейных уравнений и систем с постоянными коэффициентами; построение линейного однородного ОДУ по набору решений, формула Остроградского-Лиувилля).	**48**	18	14	**32**	**16**
5. Текущий контроль успеваемости: коллоквиум	**6**	0	2	**2**	**4**
6. Зависимость решений задачи Коши от исходных данных и параметров (теорема о непрерывной зависимости от исходных данных, неравенство Чаплыгина, теоремы о непрерывной зависимости и дифференцируемости по параметру, метод малого параметра).	**12**	4	4	**8**	**4**
7. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 2	**2**	0	2	**2**	**0**
Промежуточная аттестация: устный экзамен	**36**	0	0	**0**	**36**
Итого	**144**	**36**	**36**	**72**	**72**

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

Контрольная работа № 1	
Вариант 1	**Вариант 2**
1. Решить уравнение и найти особые решения, если они есть: $5y + y'^2 = x(x + y')$. 2. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' = y'^2 + (1-y)y', \\ y(1) = 1,\ y'(1) = 1. \end{cases}$	1. Решить уравнение и найти особые решения, если они есть: $y'^2 - 4y' + 4y = 8x - 12$. 2. Решить задачу Коши: $\begin{cases} xyy'' + (1+x^2)yy' + xy^2 = xy'^2, \\ y(1) = 1,\ y'(1) = -1. \end{cases}$ Решить уравнения:

Решить уравнения: 3. $(3x^2y^2+1)y'+3xy^3=0$. 4. $y'+y\,\mathrm{tg}\,x+4y^2\sin x=0$. 5. $(2x+y)(1-2y')=9y'-2$.	3. $y^3+2y^2xy'=2y'\ln y$. 4. $2yy'-y^{-1}=x^{-2}y-(xy^{-2}+x^{-1})y'$. 5. $yy'-3x=6-(2x+5)y'$.

Контрольная работа № 2

Вариант 1	Вариант 2
Найти решения линейных ОДУ и их систем: 1. $y''+9y=12\sin 3x$ 2. $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{x-3}$. 3. $\begin{cases} x'=-3x-z \\ y'=-4x-2y-3z \\ z'=4x+2y+3z \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x'=x-2y \\ y'=x-y+\frac{1}{\sin t} \end{cases}$ 5. Найти $y'_\mu\big\vert_{\mu=0}$: $\begin{cases} y'=e^{x-y}+\mu y, \\ y(0)=\mu. \end{cases}$	Найти решения линейных ОДУ и их систем: 1. $y''+6y'+9y=4e^{-3x}$ 2. $y''-6y'+10y=\dfrac{e^{3x}}{\cos x}$. 3. $\begin{cases} x'=x+2y+2z \\ y'=-y-2z \\ z'=y+z \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x'=6x-9y+\cos t \\ y'=4x-6y \end{cases}$ 5. Найти $y'_\mu\big\vert_{\mu=0}$: $\begin{cases} y'=\mu x^{-2}y^{-1}-yx^{-1}, \\ y(1)=1+2\mu. \end{cases}$

Вопросы к коллоквиуму.

1. Понятие дифференциального уравнения, примеры. Редукция ОДУ n-го прядка, разрешенного относительно старшей производной, к нормальной системе ОДУ. Определение решения общего ОДУ n-го прядка и его интегральной кривой. Определение решения, интегральной кривой и фазовой траектории нормальной системы ОДУ, примеры.
2. Примеры математических моделей, использующих дифференциальные уравнения: движение материальной точки в пространстве под действием силы, зависящей от времени, положения точки и ее скорости; динамика популяций в рамках модели «хищник-жертва».
3. ОДУ 1 порядка в симметричном виде, определение параметрического решения. Интеграл и общий интеграл, примеры. Уравнения в полных дифференциалах (УПД). Теорема об общем интеграле УПД.

4. Уравнения в полных дифференциалах (УПД). Теорема о необходимом и достаточном условии того, что ОДУ в симметричном виде является УПД.
5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Теорема о существовании интегрирующего множителя.
6. Лемма Гронуолла-Беллмана.
7. Постановка задачи Коши для ОДУ 1 порядка, разрешенного относительно производной. Лемма о редукции этой задачи к интегральному уравнению. Условие Липшица по переменной y для скалярной функции $f(t,y)$. Теорема о единственности решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка, разрешенного относительно производной.
8. Теорема о существовании решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка, разрешенного относительно производной.
9. Постановка задачи Коши для ОДУ 1 порядка, не разрешенного относительно производной, примеры. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение ОДУ 1-го порядка, примеры.
10. Постановка задачи Коши для нормальной системы ОДУ. Условие Липшица по переменным $(y_1, \dots, y_n)$ для функции $f(t, y_1, \dots, y_n)$. Теорема о единственности решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ.
11. Теорема о существовании решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ на произвольном отрезке.
12. Постановка задачи Коши для ОДУ n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной. Теорема о существовании и единственности решения этой задачи на произвольной отрезке.
13. Постановка задач Коши для линейного ОДУ n-го порядка и линейной системы ОДУ. Теоремы о существовании и единственности решения этих задач на произвольной отрезке.
14. Линейная зависимость и независимость скалярных функций. Определитель Вронского и его свойства. Примеры. Теорема об альтернативе для определителя Вронского для решений однородного линейного ОДУ n-ого порядка.
15. Фундаментальная система решений линейного ОДУ n-ого порядка. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении однородного линейного ОДУ n-ого порядка.
16. Теорема об общем решении неоднородного линейного ОДУ n-ого порядка. Метод вариации постоянных.
17. Теорема о построении ФСР однородного линейного ОДУ n-ого порядка с постоянными коэффициентами. Пример построения однородного линейного ОДУ с постоянными коэффициентами по заданным решениям.
18. Теорема о единственности однородного линейного ОДУ n-ого порядка, имеющего заданную ФСР.
19. Теорема о построении однородного линейного ОДУ n-ого порядка, имеющего заданный набор решений, пример. Формула Остроградского-Лиувилля.

20. Линейная зависимость и независимость векторных функций. Определитель Вронского и его свойства. Примеры. Теорема об альтернативе для определителя Вронского для решений однородной линейной системы ОДУ.
21. Фундаментальная система решений однородной линейной системы ОДУ. Фундаментальная матрица. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении однородной линейной системы ОДУ.
22. Теорема об общем решении неоднородной линейной системы ОДУ. Матрицант. Теорема о частном решении неоднородной линейной системы ОДУ (метод вариации постоянных).
23. Теорема о построении ФСР однородной линейной системы ОДУ n-ого порядка с постоянными коэффициентами в случае существования n линейно независимых собственных векторов матрицы системы.
24. Теорема о построении ФСР однородной линейной системы ОДУ n-ого порядка с постоянными коэффициентами в случае отсутствия n линейно независимых собственных векторов матрицы системы.

Билет для коллоквиума содержит 4 вопроса, например:

1. Сформулировать и доказать теорему о необходимом и достаточном условии того, что обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка в симметричном виде является уравнением в полных дифференциалах.
2. Сформулировать теорему об альтернативе для определителя Вронского для решений линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Сформулировать постановку задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной.
4. Функции $y_1(t) = t$, $y_2(t) = t^3$, $y_3(t) = |t|^3$ являются решениями линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $t^2y'' - 3ty' + 3y = 0$. Исследовать их на линейную зависимость на отрезке $[-1,3]$ и объяснить результат.

7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

Вопросы к экзамену.

1. Понятие дифференциального уравнения, примеры. Редукция ОДУ n-го прядка, разрешенного относительно старшей производной, к нормальной системе ОДУ. Определение решения общего ОДУ n-го прядка и его интегральной кривой. Определение решения, интегральной кривой и фазовой траектории нормальной системы ОДУ, примеры.
2. Примеры математических моделей, использующих дифференциальные уравнения: движение материальной точки в пространстве под действием силы, зависящей от времени, положения точки и ее скорости; динамика популяций в рамках модели «хищник-жертва».

3. ОДУ 1 порядка в симметричном виде, определение параметрического решения. Интеграл и общий интеграл, примеры. Уравнения в полных дифференциалах (УПД). Теорема об общем интеграле УПД.
4. Уравнения в полных дифференциалах (УПД). Теорема о необходимом и достаточном условии того, что ОДУ в симметричном виде является УПД.
5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Теорема о существовании интегрирующего множителя.
6. Лемма Гронуолла-Беллмана. Условие Липшица для скалярной функции от 1-й переменной. Примеры, иллюстрирующие соотношения между множествами липшицевых, непрерывных и дифференцируемых функций; поведение липшицевых функций на бесконечности.
7. Постановка задачи Коши для ОДУ 1 порядка, разрешенного относительно производной. Лемма о редукции этой задачи к интегральному уравнению. Условие Липшица по переменной y для скалярной функции $f(t, y)$. Теорема о единственности решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка, разрешенного относительно производной.
8. Теорема о существовании решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка, разрешенного относительно производной.
9. Постановка задачи Коши для ОДУ 1 порядка, не разрешенного относительно производной, примеры. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение ОДУ 1-го порядка, примеры.
10. Постановка задачи Коши для нормальной системы ОДУ. Условие Липшица по переменным $(y_1, \dots, y_n)$ для функции $f(t, y_1, \dots, y_n)$. Теорема о единственности решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ.
11. Теорема о существовании решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ на произвольном отрезке.
12. Постановка задачи Коши для ОДУ n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной. Теорема о существовании и единственности решения этой задачи на произвольной отрезке.
13. Постановка задач Коши для линейного ОДУ n-го порядка и линейной системы ОДУ. Теоремы о существовании и единственности решения этих задач на произвольной отрезке.
14. Линейная зависимость и независимость скалярных функций. Определитель Вронского и его свойства. Примеры. Теорема об альтернативе для определителя Вронского для решений однородного линейного ОДУ n-ого порядка.
15. Фундаментальная система решений линейного ОДУ n-ого порядка. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении однородного линейного ОДУ n-ого порядка.
16. Теорема об общем решении неоднородного линейного ОДУ n-ого порядка. Метод вариации постоянных.
17. Теорема о построении ФСР однородного линейного ОДУ n-ого порядка с постоянными коэффициентами. Пример построения однородного линейного ОДУ с постоянными коэффициентами по заданным решениям.
18. Теорема о единственности однородного линейного ОДУ n-ого порядка, имеющего заданную ФСР.

19. Теорема о построении однородного линейного ОДУ n-ого порядка, имеющего заданный набор решений, пример. Формула Остроградского-Лиувилля.
20. Линейная зависимость и независимость векторных функций. Определитель Вронского и его свойства. Примеры. Теорема об альтернативе для определителя Вронского для решений однородной линейной системы ОДУ.
21. Фундаментальная система решений однородной линейной системы ОДУ. Фундаментальная матрица. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении однородной линейной системы ОДУ.
22. Теорема об общем решении неоднородной линейной системы ОДУ. Матрицант. Теорема о частном решении неоднородной линейной системы ОДУ (метод вариации постоянных).
23. Теорема о построении ФСР однородной линейной системы ОДУ n-ого порядка с постоянными коэффициентами в случае существования n линейно независимых собственных векторов матрицы системы. Обоснование возможности перехода к действительнозначной ФСР в случае вещественной матрицы системы.
24. Теорема о построении ФСР однородной линейной системы ОДУ n-ого порядка с постоянными коэффициентами в случае отсутствия n линейно независимых собственных векторов матрицы системы.
25. Теорема о зависимости от правой части и начального условия решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной. Теорема о непрерывной зависимости от параметра решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной.
26. Теорема сравнения решений задач Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной (неравенство Чаплыгина).
27. Теорема о дифференцируемости по параметру решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной. Метод малого параметра.

Типовые задачи для экзамена.

1) Решить уравнение и найти особые решения, если они есть: $y'^2 - 8xy' + 8x^2 + 4y = 0$.

2) $\begin{cases} yy'' = (1-x)y'^2 \\ y(1) = 1,\ y'(1) = 2. \end{cases}$

3) $xy' = y(1 - \ln x + \ln y)$

4) $2x + 2yy' = x^{-2}\sin^2 y - x^{-1}y'\sin 2y$.

5) $y' + 2xy^3 = y$.

6) $y'' + 3y' - 4y = 5e^{-4x}$.

7) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}.$

8) $\begin{cases} \dot{x}=2x+2y-2z, \\ \dot{y}=2x+5y-4z, \\ \dot{z}=-2x-4y+5z. \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dot{x}=-3x-3y+1, \\ \dot{y}=6x+6y. \end{cases}$

10) Найти $y'_{\mu}\big|_{\mu=0}$: $\begin{cases} y'=y\,x^{-1}+\mu y^2, \\ y(1)=1+\mu. \end{cases}$

Экзаменационный билет состоит из трех вопросов и двух задач, например

1. Теорема о существовании общего интеграла у дифференциального уравнения в полных дифференциалах.
2. Теорема об общем решении линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Линейная зависимость и независимость функций.
4. Решить уравнение и найти особые решения, если они есть: $y'^2-8xy'+8x^2+4y=0$.
5. Решить уравнение: $y''+3y'-4y=5e^{-4x}$.

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ **результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)**				
Оценка / РО и соответствующие виды оценочных средств	2	3	4	5
Знания *Коллоквиум, Экзамен*	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения *Контрольная работа*	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает	Успешное и систематическое умение

			неточности непринципиального характера)	
Навыки (владения, опыт деятельности) *Экзамен*	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)	
Результаты обучения	Компетенция, с частичным формированием которой связано достижение результата обучения
Знать: 1. основные классы интегрируемых ОДУ и методы их решения; 2. общую теорию и методы решения линейных ОДУ и линейных систем ОДУ; **Уметь:** 1. применять на практике общую теорию и методы решения линейных ОДУ и систем ОДУ, в том числе, метод вариации постоянных, а также находить частное решение в виде квазимногочлена; 2. находить приближённые решения ОДУ в виде степенных рядов, применять теорию зависимости решений ОДУ от параметров для приближённого решения ОДУ; **Владеть:** 1. навыками интегрирования основных классов ОДУ.	ОПК-1.Б
Знать: 1. методологию вывода и анализа основных моделей, приводящих к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ); 2. основы теории существования, единственности и зависимости от параметров решений задачи Коши, а также связанные с ними методы приближённого решения ОДУ; **Владеть:** 1. навыками применения теорем о существовании и единственности решения задачи Коши для качественного исследования ОДУ.	ОПК-2.Б

8. Ресурсное обеспечение:

Основная литература:

1. Денисов А.М., Разгулин А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Макс-ПРЕСС, 2009.
2. Дмитриев В.И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: КДУ, 2007.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: Изд-во РХД, 2000.

Дополнительная литература:

1. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.
2. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МГУ, 1984.
3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.

Информационные справочные системы: https://eqworld.ipmnet.ru/

Материально-техническое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

9. Язык преподавания - русский.

10. Преподаватели: доцент факультета ВМК МГУ А.Г. Разборов, математик факультета ВМК МГУ А.С.Старостин.

11. Авторы программы: профессор факультета ВМК МГУ В.И. Дмитриев.