Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета ВМК МГУ
_____________ **/И.А.Соколов/**
«__»_______________ **2023 г.**

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Наименование дисциплины (модуля):
Элементы функционального анализа

Уровень высшего образования:
бакалавриат

Направление подготовки (специальность):
02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Направленность (профиль) ОПОП:
дисциплина относится к вариативной части программы

Форма обучения:
очная

Москва 2023

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ бакалавриата, магистратуры, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки по направлениям 02.03.02, 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

1. Дисциплина относится к вариативной части ОПОП ВО.

2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по алгебре и геометрии, математическому анализу, комплексному анализу и теории дифференциальных уравнений в объеме, пройденном на первом и втором курсах обучения.

3. Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

- **ОПК-1.Б** Способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с фундаментальной информатикой и информационными технологиями
- **ПК-2.Б** Способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

Знать:

1. основные понятия, определения, результаты функционального анализа;
2. основы теории банаховых и гильбертовых пространств;
3. основы теории линейных операторов, действующих в банаховых пространствах;
4. основные конструкции теории меры и интеграла Лебега.

Уметь:

1. оперировать абстрактными функционально-аналитическими понятиями;
2. применять на практике методы и утверждения функционального анализа при решении различных задач математической физики, и других областей математики.

Владеть:

1. навыками решения теоретических и практических задач функционального анализа.

4. Формат обучения: лекции и семинарские занятия проводятся с использованием меловой доски.

5. Объем дисциплины (модуля) составляет 2 з.е., в том числе 36 академических часов, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 36 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, часы			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа*	Занятия семинарского типа*	Всего	
1. Линейные нормированные пространства. Линейные ограниченные операторы и функционалы. Банаховы пространства. (Пространства $C[a,b]$, $l_p(1\leq P < +\infty)$. Линейные ограниченные операторы в банаховом пространстве. Связь непрерывности и ограниченности. Норма оператора. Полнота нормированного пространства $L(E_1, E_2)$, E_2 – банахово. Обратный оператор. Теоремы Банаха и Неймана об обратных операторах. Теорема Банаха – Штейнгауза. Линейные функционалы, сопряженное пространство. Теорема Хана – Банаха и ее следствия. Общий вид линейных непрерывных функционалов в конкретных нормированных пространствах. Слабая сходимость.	**24**	12	0	**12**	**12**
2. Гильбертовы пространства. Линейные операторы в гильбертовых пространствах. Основные свойства гильбертова пространства. Теорема об ортогональном разложении. Характеристическое свойство гильбертова пространства. Ортонормированные системы. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Полнота, замкнутость. Изоморфизм гильбертовых пространств. Общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Сопряженный оператор и его свойства. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теория Фредгольма. Резольвента оператора. Аналитические свойства резольвенты. Спектр оператора. Спектр компактного оператора. Спектральные (Риссовские) проекторы. Собственные векторы и	**26**	14	0	**14**	**12**

собственные значения. Самосопряженные компактные операторы. Свойства собственных векторов и собственных значений. Теорема Гильберта – Шмидта.					
3. Мера и интеграл Лебега (основные конструкции). Измеримые множества. Внешняя мера. Свойства измеримых множеств. Измеримые функции, их свойства. Интеграл Лебега. Класс интегрируемых по Лебегу функций. Свойства. Сравнение с интегралом Римана. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теоремы Лебега, Б.Леви и Фату. Прямые произведения систем множеств и мер. Теорема Фубини. Пространства l_p, $p \geq 1$. Неравенства Гельдера и Минковского. Полнота и сепарабельность.	**20**	10	0	**10**	**10**
Промежуточная аттестация: зачет	**2**	0	0	**0**	**2**
Итого	72	**36**	**0**	**36**	**36**

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

1. a) Пусть $\boldsymbol{T_t}: \boldsymbol{\phi(x) \to \phi(x+t)}$ − оператор на $\boldsymbol{L_2(R)}$. Какова норма T_t? К какому оператору сходится T_t, когда $t \to \infty$, и в какой топологии?
   b) Ответьте на те же вопросы для операторов T_t, действующих в $L_2(R, e^{-x^2}\, dx)$.

2. Приведите пример, показывающий, что область значений ограниченного оператора может не быть замкнутой. Докажите, что если T ограничен, задан всюду и изометричен, то $\mathrm{Ran}\, T$ замкнута.

3. Пусть A −ограниченный самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве. Докажите, что его собственные значения вещественны и что собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

4. a) Пусть A − самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве H. Докажите, что
$$\|A\| = \max(Ax, x), \quad \|x\| = 1.$$
   b) Найдите пример, показывающий, что утверждение пункта a) может быть неверно, если A не самосопряжен.

5. Найдите норму оператора T

$$(\boldsymbol{Tf})(\boldsymbol{x}) = \int_{0}^{\pi} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$$

в пространстве $\boldsymbol{L_2(0,\pi)}$.

6. Докажите, что любой интегральный оператор Фредгольма на $C[a, b]$

$$(\boldsymbol{Tf})(\boldsymbol{x}) = \int_{a}^{b} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$$

где K – непрерывная функция, есть равномерный предел операторов конечного ранга.

7. a) Докажите, что если $\sum_{n=1}^{\infty} |(A\phi_n, \phi_n)| < \infty$ для всех ортонормированных базисов, то $A \in \sigma_1$.

b) Найдите такой не принадлежащий классу σ_1 оператор A, что $\sum_{n=1}^{\infty} |(A\phi_n, \phi_n)| < \infty$ для некоторого фиксированного ортонормированного базиса.

8. a) Пусть $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H. Пусть A – такой оператор, что $\sup_{\psi:\, \|\psi\|=1, \psi \perp (\phi_1, \dots, \phi_n)} \|A\psi\| \to 0$ при $n \to \infty$. Докажите, что оператор A – компактный.

b) Пусть $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H и A - компактный оператор. Докажите, что $\sup_{\psi:\, \|\psi\|=1, \psi \perp (\phi_1, \dots, \phi_n)} \|A\psi\| \to 0$ при $n \to \infty$.

c) Пусть A - компактный оператор и $A \geq O$. Докажите, что $A^{1/2}$ - тоже компактный оператор.

9. Пусть $A \geq O$. Докажите, что $(A - \lambda I)^{-1}$ существует при всех $\lambda < 0$.

10. Найти спектр оператора $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt$ в пространстве $C[0,1]$.

11. Найти спектр операторов сдвига

$$T_+x = (0, x_1, x_2, \dots), \quad T_-x = (x_2, x_3, \dots)$$

в пространстве l_2.

Проведение зачета

Зачет сдается в письменной форме. В билете – один вопрос из соответствующего приведенного ниже списка рассматриваемых тем и одно контрольное задание на смежную тему.

1. Сигма аддитивность длины. Определение и свойства внешней меры, измеримость по Лебегу.
2. Критерий измеримости по Лебегу.
3. Измеримость по Жордану. Сравнение с мерой Лебега.

4. Свойства измеримых множеств, σ – конечная мера.
5. Мера Лебега-Стильтьерса, необходимое и достаточное условие σ – аддитивной меры.
6. Измеримые функции, измеримость непрерывной функции, предела измеримых функций, производной.
7. Измеримость суммы, разности, произведения, частного измеримых функций. Теорема Егорова.
8. Интеграл Лебега от простых функций, от ограниченных и неограниченных функций.
9. Интегрируемые функции и их свойства.
10. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега, теорема Лебега о предельном переходе.
11. Теоремы Леви и Фату. Интегрирование по множеству с σ – конечной мерой.
12. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана. Пример функции неинтегрируемой по Риману даже при изменении на множестве меры нуль.
13. Пространство L_1, его полнота, плотность множества непрерывных функций в L_1.
14. Неравенство Гельдера, Минковского, полнота пространства L_p, непрерывность в среднем функций из L_p.
15. Теорема Фубини о перестановке интегрирования.
16. Метрические пространства, пересечение открытых и замкнутых множеств, полные метрические пространства, непрерывные отображения.
17. Принцип сжимающих отображений, локальная форма принципа, примеры применения к решению интегральных уравнений.
18. Плотные, нигде не плотные множества, принцип вложенных шаров, понятие категории, теорема Бэра-Хаусдорфа. Пример вложенных шаров, имеющих пустое пересечение.
19. Компактные метрические пространства, их полнота, свойство ограниченности и вполне ограниченности.
20. Необходимое и достаточное условие предкомпактности, предкомпактность пространства при наличии предкомпактной сети.
21. Эквивалентность двух определений компактности.
22. Критерии предкомпактности в C, L_p, l_p.
23. Банаховы пространства, эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного оператора, полнота пространства линейных ограниченных операторов.
24. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема о расходимости тригонометрического ряда.
25. Обратные операторы, правый, левый обратные операторы. Обратимые операторы, признак обратимости.
26. Обратимость оператора $E - A$. Открытость множества обратимых операторов, сходимость обратных операторов.
27. Теорема Банаха об обратном операторе. Замкнутые операторы, теорема о замкнутом графике.
28. Теорема Хана-Банаха и следствия их нее.
29. Сопряженное пространство, связь между сепарабельностью исходного и сопряженного пространства.
30. Второе сопряженное пространство, рефлексивные пространства. Представление линейного ограниченного функционала в l_p.

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ **результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)**

Оценка / РО и соответствующие виды оценочных средств	2	3	4	5
Знания *Коллоквиум, Экзамен*	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения *Контрольная работа, самостоятельная работа, зачет*	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) *Экзамен*	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)

Результаты обучения	Компетенция, с частичным формированием которой связано достижение результата обучения
Знать: 1. основные понятия, определения, результаты функционального анализа; 2. основы теории банаховых и гильбертовых пространств; 3. основы теории линейных операторов, действующих в банаховых пространствах; 4. основные конструкции теории меры и интеграла Лебега.	ОПК-1.Б

Уметь: 1. оперировать абстрактными функционально-аналитическими понятиями; 2. применять на практике методы и утверждения функционального анализа при решении различных задач математической физики, и других областей математики.	
Владеть: 1. навыками решения теоретических и практических задач теории банаховых и гильбертовых пространств, теории линейных операторов, действующих в них; 2. использовать свойства интеграла Лебега при исследовании задач математической физики.	ПК-2.Б

8. Ресурсное обеспечение:

Основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1989.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука. 1965.
3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М.: Мир. Т.1.
4. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи из функционального анализа. М.: Наука. 1988.

Дополнительная литература:

1. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ. М.: Наука. 1967.
2. Данфорд Н, Шварц Д.Т. Линейные операторы. М.: ИЛ. 1962.
3. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 196.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в ормированных пространствах. М.: Физматгиз. 1959.
5. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир. 1979.
6. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

Материально-техническое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

9. Язык преподавания - русский.

10. Преподаватели: профессора факультета ВМК МГУ В.В. Власов, Н.Ю.Капустин, доцент факультета ВМК МГУ А.А.Полосин.

11. Автор программы: профессора факультета ВМК МГУ В.В. Власов.