Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета ВМК МГУ
_______________ **/И.А.Соколов/**
«27» 09 _______________ **2023 г.**

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Наименование дисциплины (модуля):
Исследование операций

Уровень высшего образования:
бакалавриат

Направление подготовки (специальность):
02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Направленность (профиль) ОПОП:
Общий профиль

Форма обучения:
очная

Москва 2023

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ бакалавриата, магистратуры, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки по направлениям 02.03.02, 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

1. Дисциплина относится к базовой части ОПОП ВО

2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу, линейной алгебре и теории вероятностей в объеме, соответствующем программе первого и второго годов обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки»

3. Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

- **ОПК-1.Б** Способностью использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с фундаментальной информатикой и информационными технологиями **ОПК-2.Б** Способность применять и модифицировать математические модели, а также интерпретировать полученные математические результаты при решения задач в области профессиональной деятельности
- **ПК-2.Б Способностью понимать, совершенствовать и применять со**временный математический аппарат, фундаментальные концепции и системные методологии, международные и профессиональные стандарты в области информационных технологий

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

Знать:

1. методологию принятия решений в ситуациях неопределённости на основе принципа наилучшего гарантированного результата;
2. способы и примеры построения различных игровых моделей (антагонистические и бескоалиционные игры);
3. методы поиска седловых точек, оптимальных смешанных стратегий, ситуаций равновесия);
4. методы построения и анализа потоковых моделей;
5. основные алгоритмы решения задачи о максимальном потоке в сети и потоке минимальной стоимости;
6. методы анализа и решения дискретных задач оптимизации;
7. точные и приближённые алгоритмы решения оптимизационных задач, возникающих при разработке сложных технических систем (задачи теории расписаний, упаковки, различные задачи на сетях и др.);
8. способы анализа сложности таких алгоритмов

Уметь:

1. формулировать игровые модели, включающие ограничения на стратегии и задание функций выигрыша игроков;
2. находить максиминные и минимаксние стратегии, верхнее и нижнее значение игры;
3. находить решение матричной игры сведением к задаче линейного программирования, графическим методом, путем поиска крайних оптимальных смешанных стратегий;
4. применять потоковые алгоритмы для решения задач дискретной оптимизации;
5. оценивать сложность разрабатываемых алгоритмов.

Владеть:

1. основными алгоритмами решения антагонистических игр и их компьютерной реализации;
2. навыками решения потоковых задач и умением сводить к ним задачи, возникающие при проектировании сложных технических систем;
3. навыками использования необходимых и достаточных условия для исследования моделей теории игр и исследования операций;

4. навыками применения алгоритмов решения задач дискретной оптимизации и оценки их сложности.

4. Формат обучения:
лекции проводятся с использованием меловой доски, при проведении контрольных работ компьютерная система размножения 100 вариантов.

5. Объем дисциплины (модуля) составляет 4 з.е., в том числе 72 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 72 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	**Всего (часы)**	В том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, часы			**Самостоятельная работа обучающегося, часы** *(виды самостоятельной работы – эссе, реферат, контрольная работа и пр.)*
		Занятия лекционного типа*	Занятия семинарского типа*	**Всего**	
1. Основные понятия антагонистических игр. Седловая точка и условия её существования.	**10**	6	0	**6**	**4**
2. Смешанные стратегии в матричных антагонистических играх. Методы поиска оптимальных смешанных стратегий.	**14**	8	0	**8**	**6**
3. Бесконечные антагонистические игры. Аппроксимация бесконечных игр конечными.	**10**	6	0	**6**	**4**
4. Модели антагонистических игр и методы их решения.	**10**	6	0	**6**	**4**
5. Бескоалиционные игры. Ситуация равновесия и условия её существования.	**10**	6	0	**6**	**4**
6. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа	**2**	0	0	**0**	**2**
7. Потоки в сетях. Алгоритмы нахождения максимального потока в сети.	**14**	8	0	**8**	**6**
8. Задача о потоке минимальной стоимости в сети.	**10**	6	0	**6**	**4**
9. Приложения потоковых задач в исследовании операций.	**14**	8	0	**8**	**6**
10. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа	**2**	0	0	**0**	**2**
11. Классификация дискретных оптимизационных задач. Полиномиально разре-	**14**	8	0	**8**	**6**

шимые и NP-трудные задачи.					
12. Методы решения NP-трудных задач. Алгоритмы решения некоторых задач дискретной оптимизации и их приложения.	**16**	10	0	**10**	**6**
13. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа	**2**	0	0	**0**	**2**
14. Аттестация: устный экзамен	**16**	0	0	**0**	**16**
Итого	**144**	**72**	**0**	**72**	**72**

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1.

Билет 1.

1. Может ли матрица размером 3×3 иметь 7 седловых точек?
2. Имеет ли функция $F(x,y) = -x^2+xy+y^2+x+y$ на единичном квадрате ($x, y \in [0, 1]$) седловую точку? Если да, то найти все седловые точки.
3. Найти одно решение в смешанных стратегиях в игре с платёжной матрицей
$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 1 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
4. Найти все оптимальные смешанные стратегии первого игрока в игре с платёжной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Найти все ситуации равновесия в биматричной игре:
$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Билет 2.

1. Найти все седловые точки в матрице
$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$
2. Имеет ли функция $F(x, y) = -2x^2+xy+y^2+x$ на единичном квадрате ($x, y \in [0, 1]$) седловую точку? Есл да, то найти все седловые точки.
3. Найти одно решение в смешанных стратегиях в игре с платёжной матрицей
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
4. Найти все оптимальные смешанные стратегии первого игрока в игре с платёжной

матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Найти все ситуации равновесия в биматричной игре:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Билет 3.

1. Может ли матрица размером 4×4 иметь 11 седловых точек?
2. Имеет ли функция $F(x,y) = -x^2+xy+y^2-x-y$ на единичном квадрате ($x,\ y \in [0,\ 1]$) седловую точку? Если да, то найти все седловые точки.
3. Найти одно решение в смешанных стратегиях в игре с платёжной матрицей

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Найти все оптимальные смешанные стратегии первого игрока в игре с платёжной матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Найти все ситуации равновесия в биматричной игре:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Билет 1

1. Дана сеть G с дугами (1, 2), (1, 3), (1,4), (2, 3), (2, 5), (2,6), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (5, 8), (6, 8), (7, 8), пропускные способности которых равны соответственно 2, 4, 6, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 3, 3, 5, 3, 4.

А. Найти максимальный поток из узла 1 в узел 8 и его величину с помощью алгоритма Форда-Фалкерсона. В качестве начального взять нулевой поток. Для каждой итерации указать увеличивающий путь и величину увеличения потока.

Б. Найти максимальный поток из узла 1 в узел 8 и его величину с помощью алгоритма Карзанова. В качестве начального взять нулевой поток. Для каждого этапа указать сеть $G(f)$, слоистую сеть $G^*(f)$ и тупиковый поток в ней.

В. Построить минимальный разрез в сети G.

3. Даны вычислительная система, состоящая из двух идентичных процессоров, и четыре работы со следующими характеристиками:

Работа i	b_i	f_i	t_i
1	0	4	3
2	2	5	2
3	1	6	2
4	0	6	5

(b_i, f_i, t_i – соответственно начальный директивный срок, конечный директивный срок и длительность выполнения работы i). Определить, существует ли допустимое расписание с прерываниями, и найти его, если оно существует. Издержками на прерывания и переключения пренебречь. Свести указанную задачу к задаче о максимальном потоке в сети. При нахождении максимального потока привести все вычисления.

Билет 2

1. Дана сеть G с дугами (1, 2), (1, 3), (1,4), (2, 3), (2, 5), (2,6), (2, 8), (3, 6), (3, 7), (4, 6), (4, 7), (5, 8), (6, 5), (6, 8), (7, 8), пропускные способности которых равны соответственно 3, 4, 5, 1, 3, 1, 2, 2, 3, 4, 2, 5, 2, 4, 2.

А. Найти максимальный поток из узла 1 в узел 8 и его величину с помощью алгоритма Форда-Фалкерсона. В качестве начального взять нулевой поток. Для каждой итерации указать увеличивающий путь и величину увеличения потока.

Б. Найти максимальный поток из узла 1 в узел 8 и его величину с помощью алгоритма Карзанова. В качестве начального взять нулевой поток. Для каждого этапа указать сеть $G(f)$, слоистую сеть $G^*(f)$ и тупиковый поток в ней.

В. Построить минимальный разрез в сети G.

3. Даны вычислительная система, состоящая из двух идентичных процессоров, и четыре работы со следующими характеристиками:

Работа i	b_i	f_i	t_i
1	0	7	5
2	1	4	2
3	0	7	5
4	2	5	2

(b_i, f_i, t_i – соответственно начальный директивный срок, конечный директивный срок и длительность выполнения работы i). Определить, существует ли допустимое расписание с прерываниями, и найти его, если оно существует. Издержками на прерывания и переключения пренебречь. Свести указанную задачу к задаче о максимальном потоке в сети. При нахождении максимального потока привести все вычисления.

Билет 3

1. Дана сеть G с дугами (1, 2), (1, 3), (1,4), (2, 5), (2, 7), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8), (5, 8), (6, 8), (7, 6), (7, 8), пропускные способности которых равны соответственно 6, 6, 6, 3, 3, 3, 2, 3, 1, 3, 4, 6, 4, 6, 1, 4.

А. Найти максимальный поток из узла 1 в узел 8 и его величину с помощью алгоритма Форда-Фалкерсона. В качестве начального взять нулевой поток. Для каждой итерации указать увеличивающий путь и величину увеличения потока.

Б. Найти максимальный поток из узла 1 в узел 8 и его величину с помощью алгоритма Карзанова. В качестве начального взять нулевой поток. Для каждого этапа указать сеть $G(f)$, слоистую сеть $G^*(f)$ и тупиковый поток в ней.

В. Построить минимальный разрез в сети G.

3. Даны вычислительная система, состоящая из двух идентичных процессоров, и четыре работы со следующими характеристиками:

Работа i	b_i	f_i	t_i
1	1	6	3
2	1	5	3
3	0	6	3
4	0	4	3

(b_i, f_i, t_i – соответственно начальный директивный срок, конечный директивный срок и длительность выполнения работы i). Определить, существует ли допустимое расписание с прерываниями, и найти его, если оно существует. Издержками на прерывания и переключения пренебречь. Свести указанную задачу к задаче о максимальном потоке в сети. При нахождении максимального потока привести все вычисления.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3.

Билет 1

1. Верно ли, что класс языков P замкнут относительно операции объединения?
2. Является ли NP-полной задача «Целочисленное линейное программирование»? (Заданы матрица A с элементами a_{ij} ($i=1,..., m; j=1,...,n$), векторы $c=(c_1,...,c_n)$, $b=(b_1,...,b_m)$ и число T. Существует ли целочисленный неотрицательный вектор $x=(x_1,...,x_n)$, такой, что $(c,x) \geq T$, $Ax \leq b$?). Является ли эта задача co-NP-полной? При доказательстве NP-полноты можно пользоваться NP-полнотой только семи основных NP-полных задач.
3. Является ли NP-полной в сильном смысле задача «Расписание для многопроцессорной системы»? (Заданы множество работ $N=\{1,...,n\}$, число идентичных процессоров m, длительности t_i выполнения работ и общий директивный интервал $[0, T]$ для всех работ. Существует ли допустимое m-процессорное расписание выполнения работ из N без прерываний и переключений, такое, что $\tau_i + t_i \leq T$ при всех $i \in N$, где τ_i - момент начала выполнения работы i ?).
4. Доказать, что оптимизационная задача «Упаковка в контейнеры» (Заданы множество предметов $N=\{1,...,n\}$, их объёмы v_i и объём V контейнеров. Требуется упаковать все предметы из N в минимальное число контейнеров) является NP-трудной и NP-лёгкой.

Билет 2

1. Верно ли, что класс языков P замкнут относительно операции пересечения?
2. Является ли NP-полной задача «Трёхпроцессорное расписание»? (Заданы множество работ $N=\{1,...,n\}$, три идентичных процессора, длительности t_i выполнения работ и общий для всех работ директивный интервал $[0, T]$. Существует ли допустимое трёхпроцессорное расписание выполнения работ из N без прерываний и переключений, такое, что $\tau_i + t_i \leq T$ при всех $i \in N$, где τ_i – момент начала выполнения работы i?). Является ли эта задача co-NP-полной? При доказательстве NP-полноты можно пользоваться NP-полнотой только семи основных NP-полных задач.
3. Является ли NP-полной в сильном смысле задача «Упаковка в контейнеры»? (Заданы множество предметов $N=\{1,...,n\}$, их объёмы v_i, объём V контейнеров и число K. Можно ли упаковать все предметы из N в K контейнеров?).
4. Доказать, что оптимизационная задача «Многопроцессорное расписание» (Заданы множество работ $N=\{1,...,n\}$, число идентичных процессоров m и длительности t_i выполнения работ. Найти оптимальное по быстродействию расписание выполнения работ N без прерываний и переключений) является NP-трудной и NP-лёгкой.

Билет 3

1. Верно ли, что класс языков NP замкнут относительно операции объединения?
2. Является ли NP-полной задача «Минимизация штрафа за невыполнение работ на одном процессоре»? (Даны множество работ $N=\{1,...,n\}$, длительность t_i, вес w_i и директивный интервал $(b_i,f_i]$ для каждой работы $i \in N$ и число K. Существует ли однопроцессорное расписание $\tau=(\tau_1,..., \tau_n)$ без прерываний и переключений (τ_i – момент начала выполнения работы i), такое, что $\sum_{i:\, \tau_i+t_i>f_i} (\tau_i + t_i - f_i) w_i \leq K$?). Является ли эта задача co-NP-полной? При доказательстве NP-полноты можно пользоваться NP-полнотой только семи основных NP-полных задач.
3. Является ли NP-полной в сильном смысле задача 2?
4. Доказать, что оптимизационная задача «Рюкзак» (Заданы набор предметов $N=\{1,...,n\}$, их объёмы v_i и стоимости s_i и объём рюкзака V. Найти подмножество предметов из N, имеющих максимальную суммарную стоимость и вмещающихся в рюкзак) является NP-трудной и NP-лёгкой.

Вопросы к экзамену.

Программа курса «Теория игр и исследование операций» (6-й курс, 3 поток)

1. Основные понятия антагонистических игр.

Понятие антагонистической игры. Верхнее и нижнее значения конечных и бесконечных антагонистических игр. Седловая точка. Необходимые и достаточные условия существования седловой точки. Теорема Фон Неймана о существовании седловой точки у вогнуто-выпуклых функций на компактах. Необходимые условия существования седловой точки в частных случаях.

2. Смешанные стратегии в матричных антагонистических играх. Методы поиска оптимальных смешанных стратегий.

Смешанные стратегии в конечных антагонистических играх. Существование седловой точки в смешанных стратегиях в конечной антагонистической игре. Свойства оптимальных смешанных стратегий в конечной игре. Доминирование строк и столбцов в матричной игре. Простое решение конечной игры. Крайние оптимальные смешанные стратегии. Теорема о крайних стратегиях. Графический метод решения игр $2 \times m$ и $n \times 2$. Связь теории игр с линейным программированием. Функция Лагранжа и её свойства. Сведение конечной антагонистической игры к задаче линейного программирования. Итеративный метод Брауна решения матричных игр.

3. Бесконечные антагонистические игры. Аппроксимация бесконечных игр конечными.

Смешанные стратегии в бесконечных антагонистических играх. Оптимальные и ε-оптимальные смешанные стратегии и их свойства. Аппроксимация непрерывных игр конечными. Существование седловой точки в смешанных стратегиях в играх с непрерывной платёжной функцией.

4. Модели антагонистических игр и методы их решения.

Шумные и бесшумные дули. Игры с выбором момента времени. Принцип уравнивания Ю.Б. Гермейера. Модель Гросса “нападение - оборона”.

5. Бескоалиционные игры. Ситуация равновесия и условия её существования.

Понятие бескоалиционной игры. Ситуация равновесия по Нэшу. Необходимые и достаточные условия для ситуации равновесия.

6. Потоки в сетях. Алгоритмы нахождения максимального потока в сети.

Понятие потока в сети. Задача о максимальном потоке. Алгоритмы Форда-Фалкерсона и Карзанова. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе.

7. Задача о потоке минимальной стоимости в сети.

8. Приложения потоковых задач в исследовании операций.

Сведение задачи составления допустимого расписания с прерываниями для многопроцессорной системы при заданных директивных интервалах к задаче о максимальном потоке в сети. Алгоритм упаковки для задачи с одинаковыми директивными интервалами. Алгоритм Э.Г. Коффмана для однопроцессорной системы. Сведение к задаче о потоке минимальной стоимости транспортной задачи, задачи о назначениях, задача о максимальном потоке, задачи о кратчайшем и самом длинном путях, задачи составления графика выполнения работ при жёстких директивных интервалах, задачи о паросочетаниях.

9. Классификация дискретных оптимизационных задач. Полиномиально разрешимые и *NP*-трудные задачи.

Классы полиномиально разрешимых и *NP*-трудных задач. Семь основных *NP*-полных задач. Теорема Кука. Методы доказательства *NP*-полноты (3-выполнимость, вершинное покрытие, независимое множество, клика, множество представителей, изоморфизм подграфу, остовное дерево ограниченной степени, рюкзак, самый длинный путь, упаковка множеств, наибольший общий подграф, минимум суммы квадратов, минимизация веса невыполненных заданий, упаковка в контейнеры, интеграл от произведения косинусов, доминирующее множество, расписание для многопроцессорной системы, упорядочение работ внутри интервалов, упорядочение с минимальным запаздыванием).

10. Методы решения *NP*-трудных задач.

Псевдополиномиальные алгоритмы решения задач: разбиение, рюкзак, расписание для многопроцессорной системы (число процессоров фиксировано), упаковка в контейнеры (число контейнеров фиксировано). Псевдополиномиальная сводимость. Сильная *NP*-полнота задач упорядочение работ внутри интервалов, многопроцессорное расписание без прерываний, коммивояжёр, упаковка в контейнеры. *NP*-трудные задачи: K-е по порядку множество. NP-эквивалентные задачи (оптимизационные варианты семи основных NP-полных задач, оптимизационная задача коммивояжёра). Метод ветвей и границ решения задач: самый длинный путь, коммивояжёр, оптимальное расписание в системе с несколькими различными процессорами, распределение возобновляемых ресурсов. Приближённые алгоритмы решения *NP*-трудных задач: упаковка в контейнеры, рюкзак, коммивояжёр, расписание для многопроцессорной системы, вершинное покрытие; оценки их погрешности. Применение теории *NP*-полноты к отысканию приближённых решений.

Вопросы для экзамена.

1. Доказать, что $\max\limits_{x\in X}\min\limits_{y\in Y} K(x,y) \le \min\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X} K(x,y)$.

2. Доказать, что если функция $K(x,y)$ непрерывна на $X\times Y$ (X, Y – компакты), то функция $\min\limits_{y\in Y} K(x,y)$ непрерывна на X.

3. Для функции $K(x,y) = 1-(x-y)^2$, определённой на множествах $X = Y = [0, 1]$, вычислить $\max\limits_{x\in X}\min\limits_{y\in Y} K(x,y)$ *и* $\min\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X} K(x,y)$.

4. Найти чистые оптимальные гарантирующие стратегии первого и второго игроков в игре с платёжной функцией $K(x, y) = (x-y)^2 - 0.5x^2$, $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$.

5. Выписать платёжную функцию для антагонистической игры типа *"бесшумная дуэль"* и найти чистые оптимальные гарантирующие стратегии игроков для случая, когда функции меткости $p(x) = x$, $q(y) = y$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

6. Выписать платёжную функцию для антагонистической игры типа *"шумная дуэль"* и найти чистые оптимальные гарантирующие стратегии игроков для случая, когда функции меткости $p(x) = x$, $q(y) = y$, $0\le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

7. Выписать платёжную функцию для антагонистической *"игры с выбором момента времени"* и найти смешанные оптимальные гарантирующие стратегии игроков.

8. Понятие седловой точки. Необходимые и достаточные условия существования седловой точки в чистых стратегиях в антагонистической игре.

9. Теорема Фон Неймана о существовании седловой точки у вогнуто-выпуклых функций.

10. Доказать, что функция $K(x, y) = y\ln(x+2) + xy^2$, определённая на множествах $X=Y=[0, 1]$, имеет седловую точку.

11. Необходимые условия для седловой точки у функции $K(x, y)$, определённой на множествах $a_i \le x_i \le b_i$, $i = 1, \dots, n$, $c_j \le y_j \le d_j$, $j = 1, \dots, m$.

12. Найти седловую точку функции $K(x, y) = 8(4xy^2 - 2x^2 - y)$, определённой на множествах $X = Y = [0, 1]$.

13. Смешанные стратегии в матричных антагонистических играх. Существование седловой точки в смешанных стратегиях.

14. Свойства оптимальных смешанных стратегий в матричных антагонистических играх.

15. Доминирование строк и столбцов в матричных антагонистических играх.
16. Графический способ решения матричных антагонистических игр $2 \times m$ и $n \times 2$.
17. Найти решение в смешанных стратегиях в антагонистической игре с платёжной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -4 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

18. Найти решение в смешанных стратегиях в антагонистической игре с платёжной матрицей
$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.
19. Найти решение в смешанных стратегиях в антагонистической игре с платёжной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

20. Найти решение в смешанных стратегиях в антагонистической игре с платёжной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

21. Найти решение в смешанных стратегиях в антагонистической игре с платёжной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

22. Итеративный метод Брауна решения матричных антагонистических игр.
23. Вычисление простых решений матричных антагонистических игр. Вполне смешанные игры.
24. Необходимые и достаточные условия для крайних оптимальных смешанных стратегий в матричной антагонистической игре.
25. Найти все крайние оптимальные смешанные стратегии в антагонистической игре с платёжной матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
26. Доказать, что множества оптимальных смешанных стратегий игроков в матричной антагонистической игре являются выпуклыми многогранниками.
27. Связь между существованием решения задачи линейного программирования в стандартной форме и седловой точкой функции Лагранжа.
28. Сведение решения конечной антагонистической игры к задаче линейного программирования.
29. Оптимальные смешанные стратегии в бесконечных антагонистических играх. Существование седловой точки в смешанных стратегиях в играх с непрерывной платёжной функцией.
30. Бескоалиционные игры. Необходимые и достаточные условия для ситуации равновесия.
31. Принцип уравнивания Ю.Б. Гермейера в задачах распределения ресурсов.
32. Модель Гросса "Оборона - нападение".
33. Найти $\max\limits_{\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1} \min\limits_{1 \leq i \leq n} \lambda_i W_i$, где $W_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.
34. Потоки в сетях. Алгоритм Форда-Фалкерсона нахождения максимального потока в сети.
35. Привести пример, когда алгоритм Форда-Фалкерсона не находит максимального потока.
36. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе в сетях.

37. Алгоритм Карзанова нахождения максимального потока в сети.
38. С помощью алгоритма Форда-Фалкерсона найти максимальный поток из s в t в сети с дугами $(s, 1)$, $(s, 2)$, $(s, 3)$, $(1,2)$, $(1, t)$, $(2, 3)$, $(2, t)$, $(3, t)$, пропускные способности которых равны 2, 3, 1, 4, 3, 1, 2, 2 соответственно.
39. С помощью алгоритма Карзанова найти максимальный поток из s в t в сети с дугами $(s, 1)$, $(s, 2)$, $(s, 3)$, $(1,2)$, $(1, t)$, $(2, 3)$, $(2, t)$, $(3, t)$, пропускные способности которых равны 2, 3, 1, 4, 3, 1, 2, 2 соответственно.
40. Задача о потоке минимальной стоимости в сети.
41. Сведение к задаче о потоке минимальной стоимости в сети транспортной задачи, задачи о назначениях, задачи о максимальном потоке, задач о кратчайшем и самом длинном путях, задачи составления графика выполнения заданий с жёсткими директивными интервалами, задачи о паросочетаниях.
42. Построение допустимого расписания с прерываниями для многопроцессорной системы при заданных длительностях работ и директивных интервалах.
43. Путём сведения задачи построения допустимого расписания к задаче о максимальном потоке в сети построить допустимое расписание (с прерываниями) выполнения трёх заданий на двух одинаковых процессорах. Директивные интервалы и длительности заданий следующие:
$[b_1, f_1] = [0, 6]$, $[b_2, f_2] = [0, 3]$, $[b_3, f_3] = [1, 6]$, $t_1 = 5$, $t_2 = 3$, $t_3 = 4$.
44. Алгоритм Коффмана построения допустимого расписания с прерываниями для однопроцессорной системы при заданных длительностях работ и директивных интервалах.
45. Семь основных NP-полных задач. Доказательство NP-полноты задачи *"3-выполнимость"*.
46. Доказать NP-полноту задачи *"расписание для мультипроцессорной системы без прерываний"* [Задано конечное множество заданий N и для каждого $i \in N$ длительность t_i, и общий директивный срок T. Существует ли m-процессорное расписание без прерываний, при котором все задания завершатся не позднее срока T ?] путём сведения к ней одной из семи основных NP-полных задач.
47. Доказать NP-полноту задачи *"упорядочение внутри интервалов"* [Задано конечное множество заданий N и для каждого $i \in N$ длительность t_i и директивный интервал $(b_i, f_i]$. Существует ли однопроцессорное расписание без прерываний, такое, что каждое задание полностью выполняется в своём директивном интервале?] путём сведения к ней одной из семи основных NP-полных задач.
48. Доказать NP-полноту задачи *"упорядочение с минимальным запаздыванием"* [Задано конечное множество заданий N, для каждого $i \in N$ длительность $t_i = 1$ и директивный интервал $(0, f_i]$, граф частичного порядка $G=(N,A)$ и число K. Существует ли однопроцессорное расписание без прерываний, при котором число заданий, не выполненных к своему директивному сроку, не превосходит K ?] путём сведения к ней одной из семи основных NP-полных задач.
49. Доказать NP-полноту задачи "*Самый длинный путь*" [Заданы граф G = (V, E) и число $K \le |V|$. Имеется ли в G простой путь (т.е. путь, не проходящий дважды ни через одну вершину), состоящий не менее чем из K рёбер?] путём сведения к ней одной из семи основных NP-полных задач.
50. Доказать NP-полноту задачи "*Упаковка множеств*" [Заданы семейство C конечных множеств и число K, $K \le |C|$. Верно ли, что в C имеется K непересекающихся множеств?"] путём сведения к ней одной из семи основных NP-полных задач.

Экзаменационный билет состоит из двух вопросов, например

1. Доминирование строк и столбцов в матричных антагонистических играх.
2. Найти решение в смешанных стратегиях в антагонистической игре с платёжной матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)				
Оценка / РО и соответствующие виды оценочных средств	2	3	4	5
Знания Экзамен	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения Контрольная работа	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умения (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) Экзамен	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)	
Результаты обучения	Компетенция, с частичным формированием которой связано достижение результата обучения
Знать: 1. методологию принятия решений в ситуациях неопределённости на основе принципа наилучшего гарантированного результата. 2. способы и примеры построения различных игровых моделей (антагонистические и бескоалиционные игры). 3. методы поиска седловых точек, оптимальных смешанных стратегий, ситуаций равновесия). **Уметь:** 1. формулировать игровые модели, включающие ограничения на стратегии и задание функций выигрыша игроков; 2. находить максиминные и минимаксные стратегии, верхнее и нижнее значение игры. 3. находить решение матричной игры графическим методом, методом крайних оптимальных смешанных стратегий и сведением к задаче линейного программирования. **Владеть:** 1. основными алгоритмами решения антагонистических игр и их компьютерной реализации. 2. навыками использования необходимых и достаточных условия для исследования моделей теории игр и исследования операций.	ОПК-1.Б
Знать: 1. методы построения и анализа потоковых моделей. 2. основные алгоритмы решения задачи о максимальном потоке в се-	ОПК-2.Б

ти и потоке минимальной стоимости. **Уметь:** **1.** применять потоковые алгоритмы для решения задач дискретной оптимизации. **Владеть:** 1. навыками решения потоковых задач и умением сводить к ним задачи, возникающие при проектировании сложных технических систем.	
Владеть: 1. точными и приближёнными алгоритмами решения оптимизационных задач, возникающих при разработке сложных технических систем (задачи теории расписаний, упаковки, различные задачи на сетях и др.). 2. способами анализа сложности таких алгоритмов.	ПК-2.Б

8. Ресурсное обеспечение:

Основная литература:

1. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
2. Давыдов Э.Г. Исследование операций. М.: Высшая школа, 1990.
3. Морозов В.В. Основы теории игр. М.: МГУ, 2002.
4. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
5. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р, Штайн К. Алгоритмы. Построение и анализ. М.: МЦНМО, 2005.

Дополнительная литература:

1. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. М.: Макс Пресс, 2005
2. Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М. Теория расписаний. Одностадийные системы. М.: Наука, 1984.
3. Теория расписаний и вычислительные машины./ Под ред. Коффмана Э.Г. М.: Наука, 1984.
4. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.
5. Филлипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984.
6. Ловас Л., Пламмер М. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии. М.: Мир, 1998.

Информационные справочные системы:https://eqworld.ipmnet.ru/

Материально-техническкое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

9. Язык преподавания - русский.

10. Преподаватель: доцент факультета ВМК МГУ Белянкин Георгий Андреевич.

11. Автор программы: доцент факультета ВМК МГУ М.Г. Фуругян.