

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики



УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ

/И.А.Соколов/

2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Наименование дисциплины (модуля):

Краевые задачи и вариационное исчисление

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки (специальность):

02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Направленность (профиль) ОПОП:

Фундаментальная информатика и информационные системы

Форма обучения:

очная

Москва 2023

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ бакалавриата, магистратуры, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки по направлениям 02.03.02, 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

1. Дисциплина относится к базовой части ОПОП ВО.

2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу и линейной алгебре в объеме, соответствующем программе первого года обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

3. Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотношенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

- **ОПК-1.Б** Способность применять и адаптировать существующие математические и компьютерные методы для разработки и реализации алгоритмов решения актуальных задач в области фундаментальной и прикладной математики
- **ОПК-2.Б** Способность применять и модифицировать математические модели, а также интерпретировать полученные математические результаты при решения задач в области профессиональной деятельности
- **ПК-2.Б** Способность понимать и применять в научно-исследовательской деятельности современный математический аппарат

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

Знать:

1. основы теории и стандартные методы решения краевых задач и задач Штурма-Лиувилля для линейных ОДУ второго порядка;
2. основы теории вариационного исчисления, их связь с краевыми задачами и задачей Штурма-Лиувилля.
3. основы теории устойчивости по Ляпунову и методы исследования устойчивости;
4. классификацию положений равновесия автономных систем на плоскости;
5. основы теории и классические методы интегрирования уравнений в частных производных первого порядка;

Уметь:

1. решать краевые задачи для линейных ОДУ (в том числе с использованием функции Грина), а также задачи Штурма-Лиувилля для линейных ОДУ;
2. формулировать простейшие прикладные вариационные задачи, применять на практике необходимые условия экстремума для поиска экстремалей в основных задачах вариационного исчисления.
3. применять первый метод Ляпунова для исследования устойчивости решений систем ОДУ;
4. классифицировать положения равновесия автономных систем ОДУ на плоскости, исследовать поведение фазовых траекторий в окрестности положений равновесия и изображать эскизы типичных фазовых портретов;

Владеть:

1. навыками интегрирования основных классов уравнений в частных производных первого порядка.
2. навыками использования определения устойчивости по Ляпунову, а также построения функций Ляпунова, для исследования устойчивости решений систем ОДУ;
4. Формат обучения: лекции и семинарские занятия проводятся с использованием меловой доски.
5. Объем дисциплины (модуля) составляет 3 з.е., в том числе 64 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 44 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.
6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе		
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, часы	Самостоятельная работа обучающегося, часы <i>(виды самостоятельной работы – эссе, реферат, контрольная работа и пр. – указываются при необходимости)</i>	
1. Основы теории устойчивости, фазовая плоскость (понятие устойчивости по Ляпунову, устойчивость решений линейных систем с постоянными коэффициентами, первый и второй методы Ляпунова; поведение фазовых траекторий в окрестности положений равновесия).	38	Занятия лекционного типа * 14	Всего 26	12
		Занятия семинарского типа * 12		

2. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 3	2	0	2	2	0
3. Краевые задачи для ОДУ второго порядка, задача Штурма-Лиувилля (функция Грина краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка; свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля, теорема Стеклова).	20	6	6	12	8
4. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка (первые интегралы нелинейных систем ОДУ и их свойства; линейные однородные и квазилинейные неоднородные уравнения в частных производных первого порядка и соответствующие им системы характеристик, теоремы об общем решении этих уравнений).	16	6	4	10	6
5. Основы вариационного исчисления (вариация функционала, необходимое условие экстремума; основная лемма вариационного исчисления, необходимые условия экстремума для базовых типов функционалов и для изопериметрической задачи; связь изопериметрической задачи и задачи Штурма-Лиувилля).	20	6	6	12	8
6. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 4	2	0	2	2	0
Промежуточная аттестация: зачет	10	0	0	0	10
Итого	108	32	32	64	44

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

Контрольная работа № 1	
Вариант 1	Вариант 2
1. $(2x - x^2)y'' + 2y' - 2x^{-1}y = 0$.	1. $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 4x^2$.
2. Решить систему нелинейных ОДУ $\frac{dx}{y^2 + z^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$.	2. Решить систему нелинейных ОДУ $\frac{dx}{2yz} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$.

<p>3. Исследовать на устойчивость: $\begin{cases} t^3 x' - t^2 x = t^2 - 3 \\ x(1) = 0 \end{cases}$</p> <p>4. Найти a и b, при которых асимптотически устойчиво нулевое решение уравнения $2y^{(IV)} + ay'' + y' + 2y = 0$</p> <p>5. Исследовать на устойчивость все положения равновесия системы $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = y + \sqrt{1 + 2x^2} \end{cases}$</p>	<p>3. Исследовать на устойчивость: $\begin{cases} x' + x \tan t = e^t \cos t \\ x(0) = 1 \end{cases}$</p> <p>4. Найти a и b, при которых асимптотически устойчиво нулевое решение уравнения $y^{(IV)} + ay'' + by'' + y' + 2y = 0$</p> <p>5. Исследовать на устойчивость все положения равновесия системы $\begin{cases} x' = \ln(2 - y^2) \\ y' = e^x - e^y \end{cases}$</p>
Контрольная работа № 2	
Вариант 1	
<p>1. Изобразить эскиз траекторий решений системы в окрестности положения равновесия системы ОДУ $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$</p> <p>2. Решить краевую задачу $\begin{cases} x^2 y'' - 2y = -2x^3, \\ \lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0, \\ y'(1) = 1/2. \end{cases}$</p> <p>3. Построить функцию Грина: $\begin{cases} y'' + y = f(x), \\ y(\frac{\pi}{2}) = y'(\frac{5\pi}{2}) = 0. \end{cases}$</p> <p>4. Решить задачу Коши для ДУ в частных производных 1-го порядка $x(y-z) \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = y, 2y^2 = z^2, x = y^2 e^{-y}$.</p> <p>5. Найти стационарные кривые функционала $\int_0^1 (y^2 + y'^2) dx, y(0) = 0, y(1) = 1$</p>	<p>1. Изобразить эскиз траекторий решений системы в окрестности положения равновесия системы ОДУ $\begin{cases} x' = y \\ y' = -3x - 4y \end{cases}$</p> <p>2. Решить краевую задачу $\begin{cases} x^2 y'' - 2y = 4x^{-2}, \\ y(1) = 5, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0. \end{cases}$</p> <p>3. Построить функцию Грина: $\begin{cases} y'' - y = f(x), \\ y'(-\infty) = y'(0) = 0. \end{cases}$</p> <p>4. Решить задачу Коши для ДУ в частных производных 1-го порядка $(y-z) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz, y = z^2, x^2 + 2z = 0$.</p> <p>5. Найти стационарные кривые функционала $\int_{-1}^1 (2xy - y'^2) dx, y(-1) = -1, y(1) = 1$</p>
Вариант 2	
<p>7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.</p>	
<p>Вопросы к зачету.</p>	
<p>1. Постановка краевой задачи для линейного ОДУ 2-го порядка, редукция к дивергентному виду и однородным краевым условиям.</p>	

2. Тождество Лагранжа, формула Грина, следствия из них.
3. Определение функции Грина краевой задачи для линейного ОДУ 2-го порядка, теорема о существовании и единственности функции Грина.
4. Теорема о представлении решения краевой задачи для линейного ОДУ 2-го порядка через функцию Грина.
5. Задача Штурма-Лиувилля, теорема о вещественности собственных значений и собственных функций.
6. Задача Штурма-Лиувилля, теорема о линейной зависимости собственных функций, отвечающих одному собственному значению.
7. Задача Штурма-Лиувилля, теорема об ортогональности собственных функций, отвечающих разным собственным значениям.
8. Задача Штурма-Лиувилля, теорема об оценке снизу на собственные значения.
9. Определение функционала, локального экстремума функционала, допустимой вариации функций, вариации функционала. Теорема о необходимом условии экстремума функционала.
10. Основная лемма вариационного исчисления. Теорема о необходимом условии экстремума функционала вида $\int F(x, y, y') dx$, уравнение Эйлера.
11. Основная лемма вариационного исчисления. Теорема о необходимом условии экстремума функционала вида $\int F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$.
12. Основная лемма вариационного исчисления в двумерном случае. Теорема о необходимом условии экстремума для функционала вида $\iint F(x, y, u(x, y), u_x, u_y) dx dy$.
13. Вариационная задача на условный экстремум, теорема о необходимом условии экстремума в этой задаче.
14. Вариационное свойство собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля.
15. Основные понятия теории устойчивости, примеры. Редукция общей задачи к задаче для нулевого решения.
16. Лемма об устойчивости нулевого решения однородной линейной системы.
17. Теорема об устойчивости нулевого решения однородной линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами.
18. Теорема об устойчивости по первому приближению (первый метод Ляпунова, только формулировка).
19. Положительно определенные функции и их свойства, примеры. Функция Ляпунова для нормальной системы ОДУ.
20. Теорема об устойчивости нулевого решения нормальной системы ОДУ (второй метод Ляпунова). Пример.
21. Теоремы асимптотической устойчивости нулевого решения нормальной системы ОДУ (второй метод Ляпунова). Пример.
22. Точки покоя (положения равновесия) нормальной автономной системы ОДУ. Классификация точек покоя (с эскизами фазовых траекторий и обоснованием эскиза узла) линейной однородной системы ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и невырожденной матрицей.

23. Грубые точки покоя, поведение фазовых траекторий нормальной автономной системы ОДУ 2-го порядка в окрестности грубой точки покоя.
24. Первые интегралы (ПИ) нормальной системы ОДУ, лемма о производной в силу системы.
25. Геометрический смысл ПИ, теорема о представлении решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ с помощью функционально независимых ПИ.
26. Линейное однородное уравнение в частных производных (УЧП) 1-го порядка и соответствующая ему система характеристик.
27. Теорема о связи между решениями линейного однородного УЧП 1-го порядка и первыми интегралами системы характеристик.
28. Теорема об общем решении линейного однородного УЧП 1-го порядка.

Типовые задачи для зачета.

<p>1. Решить систему нелинейных ОДУ $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{x^2+z^2} = \frac{dz}{x}$</p> <p>2. Исследовать на устойчивость: $\begin{cases} x' = 2e^t - x \\ x(0) = 1 \end{cases}$</p> <p>3. Найти a и b, при которых асимптотически устойчиво нулевое решение уравнения $y^{(IV)} + by'' + ay' + 2y + y = 0$</p> <p>4. Исследовать на устойчивость все положения равновесия системы $\begin{cases} x' = 1 - 2x - y^2 \\ y' = e^{-4x} - 1 \end{cases}$</p> <p>5. Изобразить эскиз траекторий решений системы в окрестности положения равновесия системы ОДУ $\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = x - y \end{cases}$</p>	<p>6. Решить краевую задачу $\begin{cases} x^2 y'' - 6y = 8x^2, \\ \lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0, \\ y(1) = -1. \end{cases}$</p> <p>7. Построить функцию Грина: $\begin{cases} y'' + 9y = f(x), \\ y'(\frac{\pi}{6}) = y(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases}$</p> <p>8. Решить уравнение $x(y+z) \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z,$</p> <p>9. Решить задачу Коши $(y^2 + z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = y, \quad x = y^2, \quad y - 3z = 0.$</p> <p>10. Найти стационарные кривые функционала $\int_0^1 (xy' + y'^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$</p>
---	--

Вариант зачетной работы состоит из трех задач и двух вопросов, например

1. Найти стационарные кривые функционала $\int_0^1 (xy' + y'^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 y'' - 6y = 8x^2, \\ \lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0, \\ y(1) = -1. \end{array} \right.$$

2. Решить краевую задачу

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{x^2 + z^2} = \frac{dz}{x}$$

3. Решить систему нелинейных ОДУ

4. Определение функции Грина краевой задачи для линейного ОДУ 2-го порядка, теорема о существовании и единственности функции Грина.

5. Определение функционала, локального экстремума функционала, допустимой вариации функции, вариации функционала. Теорема о необходимом условии экстремума функционала.

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)				
Оценка	2	3	4	5
РО и соответствующие виды оценочных средств				
Знания <i>Зачет</i>	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения <i>Контрольная работа, зачет</i>	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) <i>Зачет</i>	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)	
Результаты обучения	Компетенция, с частью формированием которой связано достижение результата обучения
<p>Знать:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. основы теории и стандартные методы решения краевых задач и задач Штурма-Лиувилля для линейных ОДУ второго порядка; 2. основы теории вариационного исчисления, их связь с краевыми задачами и задачей Штурма-Лиувилля; 3. основы теории и классические методы интегрирования уравнений в частных производных первого порядка. <p>Уметь:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. решать краевые задачи для линейных ОДУ (в том числе с использованием функции Грина), а также задачи Штурма-Лиувилля для линейных ОДУ; 2. формулировать простейшие прикладные вариационные задачи, применять на практике необходимые условия экстремума для поиска экстремалей в основных задачах вариационного исчисления. <p>Владеть:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. навыками интегрирования основных классов уравнений в частных производных первого порядка. 	ОПК-1.Б
<p>Знать:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. основы теории устойчивости по Ляпунову и методы исследования устойчивости; 2. классификацию положений равновесия автономных систем на плоскости. <p>Уметь:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. применять первый метод Ляпунова для исследования устойчивости решений систем ОДУ; 2. классифицировать положения равновесия автономных систем ОДУ на плоскости, исследовать поведение фазовых траекторий в окрестности положений равновесия и изображать эскизы типичных фазовых портретов; <p>Владеть:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. навыками использования определения устойчивости по Ляпунову, а также построения функций Ляпунова, для исследования устойчивости решений систем ОДУ; 	ОПК-2.Б
<p>Владеть:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. навыками использования определения устойчивости по Ляпунову, а также построения функций Ляпунова, для исследования устойчивости решений систем ОДУ; 	ПК-2.Б

8. Ресурсное обеспечение:

Основная литература:

1. Денисов А.М., Разгулин А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Макс-ПРЕСС, 2009.
2. Дмитриев В.И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: КДУ, 2007.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: Изд-во РХД, 2000.
4. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. М.: Эдиториал УРСС, 2002.

Дополнительная литература:

1. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.
3. Эльсгольд Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Эдиториал УРСС, 2002.

Информационные справочные системы: <https://eqworld.ipmnet.ru/>

Материально-техническое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

9. Язык преподавания - русский.

10. Преподаватели: доцент факультета ВМК МГУ А.Г. Разборов, математик факультета ВМК МГУ А.С. Старостин.

11. Авторы программы: профессор факультета ВМК МГУ В.И. Дмитриев.