Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ

_______________ /И.А.Соколов/

«_27_» _09_____________ 2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Наименование дисциплины (модуля):

Кратные интегралы и ряды

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки (специальность):

02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Направленность (профиль) ОПОП:

дисциплина относится к базовой части программы

Форма обучения:

очная

Москва 2023

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ бакалавриата, магистратуры, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки по направлениям 02.03.02, 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

1. Дисциплина относится к базовой части ОПОП ВО.

2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу и линейной алгебре в объеме, соответствующем программе первого года обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

3. Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

- **ОПК-1.Б** Способность применять и адаптировать существующие математические и компьютерные методы для разработки и реализации алгоритмов решения актуальных задач в области фундаментальной и прикладной математики
- **ОПК-2.Б** Способность применять и модифицировать математические модели, а также интерпретировать полученные математические результаты при решения задач в области профессиональной деятельности
- **ПК-2.Б**Способность понимать и применять в научно-исследовательской деятельности современный математический аппарат

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

Знать:

1. основы теории функциональных последовательностей и рядов;
2. основы теории степенных рядов;
3. основы теории двойных и n-кратных интегралов и, в частности, несобственных интегралов;
4. основы теории криволинейных и поверхностных интегралов;
5. основы теории поля и интегральные формулы анализа.
6. основы теории рядов Фурье

Уметь:

1. применять на практике теоретические факты о функциональных последовательностях и рядах, и, в частности, исследовать их на как на сходимость, так и на равномерную сходимость;
2. использовать подходы к исследованию функциональных последовательностей и рядов, также строить и исследовать степенные ряды;
3. применять теоретические подходы к анализу и вычислению кратных интегралов, и, в частности, анализировать несобственные кратные интегралы;
4. вычислять криволинейные и поверхностные интегралы, в том числе с использованием интегральных формул.

Владеть:

1. методами качественного анализа равномерной сходимости последовательностей и рядов;
2. навыками использования свойства равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов;
3. навыками замены переменных в кратных интегралах, а также параметризации при вычислении криволинейных и поверхностных интегралов.

4. Формат обучения: лекции и семинарские занятия проводятся с использованием меловой доски.

5. Объем дисциплины (модуля) составляет 5 з.е., в том числе 108 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 72 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), **Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**	**Всего (часы)**	В том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, часы			**Самостоятельная работа обучающегося, часы** *(виды самостоятельной работы – эссе, реферат, конт-рольная работа и пр.)*
		Занятия лекционного типа*	Занятия семинарского типа*	**Всего**	
1. Функциональные последовательности и ряды.	**26**	12	8	**20**	**6**
2. Степенные ряды. Разложение непрерывных функций в степенные ряды.	**20**	8	8	**16**	**4**
3. Текущий контроль успеваемости: домашняя контрольная работа № 1	**4**	0	0	**0**	**4**
4. Двойной и n-кратный интеграл.	**20**	8	8	**16**	**4**
5. Криволинейные интегралы	**10**	4	4	**8**	**2**
6. Поверхности и поверхностный интеграл	**20**	8	8	**16**	**4**
7. Текущий контроль успеваемости: домашняя контрольная работа № 2	**4**	0	0	**0**	**4**
8. Элементы теория поля	**22**	10	8	**18**	**4**
9. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 3	**2**	0	2	**2**	**0**
10. Ряды Фурье	**12**	4	6	**10**	**2**
11. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 4	**2**	0	2	**2**	**0**
Промежуточная аттестация: зачет	**2**	0	0	**0**	**2**
Промежуточная аттестация: устный экзамен	**36**	0	0	**0**	**36**
Итого	**180**	**54**	**54**	**108**	**72**

7. Фонд оценочных средств (ФОС)для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

Контрольная работа №1 (домашняя) (тема: Функциональные последовательности и ряды).

I. Найти предельную функцию для $\{f_n(x)\}$ и построить ее график:

1. $f_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \cos^m(n!\,2\pi x)$; 2. $f_n(x) = ne^{-nx^2}$; 3. $f_n(x) = \sqrt[n]{3 + x^{2n} + 4x^n}$; 4. $f_n(x) = x(1+e^{-nx})$;

II. Исследовать равномерную сходимость последовательности $f_n(x)$ на множестве E:

5. $f_n(x) = \sqrt[n]{\sin^n x + \cos^n x}$, $E = [0; \pi/2]$; 6. $f_n(x) = e^{n(x-2)}$, $E = [0; 4)$;

7. $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n}$, $E = (0; +\infty)$;

III. Найти множество сходимости (абсолютной и условной) ряда:

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+\cos^2 x}$; 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n+x}$; 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{x^2+n^2}$; 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n^2}$;

IV. Исследовать равномерную сходимость на множестве E:

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+n^2x^2}$, $E = (0, 1]$; 13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-\sqrt{n}\,x}$, $E = [0, +\infty)$; 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n2^n}$, $E = (-3/2, 3/2)$;

V. Определить область E существования функции $f(x)$ и исследовать ее на непрерывность:

15. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$;

VI. Найти множество сходимости степенного ряда:

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^n}{\sqrt{4^n n^2+1}}$; 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}$, $a > 0$; 18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{\ln^4 n}$; 20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2x)^n}{n!}$;

VII. Разложить функцию $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке x_0, используя разложения основных элементарных функций; указать радиус сходимости полученного ряда:

21. $f(x) = \arcsin(\frac{1}{3}x)$, $x_0 = 0$;

VIII. Разложить функцию $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке x_0, преобразовав ее при необходимости так, чтобы можно было применить формулы либо сумму геом. послед., либо $(1+x)^{\alpha}$; указать радиус сходимости полученного ряда:

22. $f(x)=\sin x\cos 3x,\quad x_0=0$;

IX. Используя методы либо дифференцирования либо интегрирования разложить функцию $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке $x_0=0$; указать радиус сходимости полученного ряда:
23. $f(x)=\arccos x$;

X. Применяя различные методы, разложить функцию $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке x_0; указать радиус сходимости полученного ряда:

24. $f(x)=\sin^4 x,\quad x_0=\pi/4$; 25. $f(x)=x\cos^3 2x,\quad x_0=0$,

26. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2},\quad x_0=0$; 27. $f(x)=\dfrac{5-x}{12-x-x^2},\quad x_0=0$.

Контрольная работа №2 (домашняя) (тема: Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы)

I. Расставить пределы интегрирования в том и в другом порядке в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, $f\in C(\overline{D})$, где:

1. $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 4\}$.
2. $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 9,\ x^2+(y+4)^2\ge 25\}$.

II. Переменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

3. $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x f(x,y)\,dy$.
4. $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{0.5x+1}^{7-x} f(x,y)\,dy$.

III. Вычисление площади плоской области. Переходя к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $x=r\sin\varphi$ либо к обобщенным к полярным координатам $x=ar\cos^{\alpha}\varphi$, $x=br\sin^{\alpha}\varphi$, вычислить площадь области, ограниченной следующими кривыми:

5. $(x^2+y^2)^2=2ax^3$.

6. $(x^2+y^2)^3=2a^2(x^4+y^4)$.

IV. Вычисление объема с помощью **ДВОЙНОГО** интеграла. Найти объем тела:

7. $0\le z\le x^2,\ x+y\le 5, x-2y\ge 2, y\ge 0$.

8. $x+y+z\le a,\ \ 3x+y\ge a,\ \ 3x+2y\le 2a,\ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0$.

V. Вычисление площади поверхности. Найти площадь поверхности:

9. $z^2=2xy$ если $0\le x\le a,\ 0\le y\le b$.

10. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ если $x^2+y^2\le 2ax$.

VI. Вычислить следующие тройные интегралы:

11. $\int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^3 xyz\,dz$.

12. $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy}(x+y+z)\,dz$.

VII. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в следующих тройных интегралах, *f(x,y,z)* непрерывна в соответствующей области:

13. $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz$

14. $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y f(x,y,z)\,dz$

VIII. Вычислить криволинейный интеграл первого рода по указанный кривой L:

15. $\int_L \frac{ds}{x-y}$, L есть отрезок AB, где $A=(0,-2),\ B(4,0)$.

16. $\int_L yds,\ L=\{(x,y): y=\sin x, 0\le x\le\pi\}$.

Контрольная работа №3 (тема:Теория поля)
Найти: 1) $div(grad\,u)$;

2) $div\ (\vec{p}(r))$; $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

3) $rot(grad\ u)$;

4) $grad\ div\ \vec{p}$;

5) $div(rot\ \vec{p})$;

6) доказать $rot\,(u\vec{R}) = u\,rot\,\vec{R} + [grad\,u, \vec{R}]$;

7) $rot(rot\ \vec{p})$;

8) $div[\vec{R}, \vec{p}]$;

9) $rot(u\vec{c})$, $\vec{c}$ – *постоянный вектор* ,

где u, v –скалярные поля, а

$\vec{p} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, $\vec{R} = W\vec{i} + G\vec{j} + L\vec{k}$ – векторные.

Используя формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы

10) $I_1 = \oint\limits_{\gamma} xy^3\,dy - x^3y\,dx$, где $\gamma = \{(x,y) \in R^2 :\ x^2 + y^2 = a^2\}$

11) $I_2 = \oint\limits_{\gamma} (x-y)dx - (x+y)\,dy$, где $\gamma = \{(x,y) \in R^2 :\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\}$

12) $I_3 = \oint\limits_{\gamma} e^{-(x^2+y^2)}(\cos 2xydx + \sin 2xydy)$, где $\gamma = \{(x,y) \in R^2 :\ x^2 + y^2 = a^2\}$

Вопросы к коллоквиуму.

1. Функциональные последовательности и ряды. Критерий Коши равномерной на множестве сходимости.
2. Признаки равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости Дирихле-Абеля и Вейерштрасса.
3. Признак Дини равномерной сходимости. Почленный переход к пределу.
4. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование равномерно сходящихся рядов.
5. Понятие о сходимости в среднем. Почленноеинтегрирование рядов сходящихся в среднем.
6. Теорема Коши-Адамара. Непрерывность суммы степенного ряда внутри промежутка сходимости.
7. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенных рядов. Разложение функции в степенной ряд. Теорема Вейерштрасса (без док-ва).

7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

Зачетная работа

I.Найти предельную функцию для $\{f_n(x)\}$ и построить ее график:

$f_n(x) = \left(\frac{2}{\pi} arctg(nx)\right)$;

II. Исследовать равномерную сходимость последовательности $f_n(x)$ на множестве E: $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2 + n}$, $E = (0; +\infty)$;

III. Разложить функцию $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке x_0, указать радиус сходимости полученного ряда:

$f(x) = \sin x \cos 3x, \quad x_0 = 0$;

IV. Расставить пределы интегрирования в том и в другом порядке в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, $f \in C(\overline{D})$, где:

$D = \{(x,y): x^2 + y^2 \le 10y, \ y = 2x - 5, \ y = 0\}$;

V. Вычисление площади плоской области. Переходя к полярным координатам

$x = r\cos\varphi$, $x = r\sin\varphi$ либо к обобщенным к полярным координатам $x = a\,r\cos^\alpha\varphi$, $x = b\,r\sin^\alpha\varphi$, вычислить площадь области, ограниченной следующими кривыми:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{c^2}.$$

VI. Вычислить следующий тройной интеграл:

$$\int_0^4 dz \int_{-z}^{z} dx \int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} z^2 xy^2 dy.$$

Найти:

VII. $div(grad\cos(3x + 2y + z))$;

VIII. $rot(u\vec{c})$, $\vec{c}$ – *постоянный вектор* .

где u, v –скалярные поля, а

$\vec{p} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, $\vec{R} = W\vec{i} + G\vec{j} + L\vec{k}$ –векторные.

IX. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$I_1 = \oint\limits_{\gamma} xy^3 dy - x^3 y\, dx$, где $\gamma = \{(x,y) \in R^2 : \ x^2 + y^2 = a^2\}$.

Вопросы к экзамену.

Вопрос 1. Функциональные последовательности и ряды. Критерий Коши равномерной на множестве сходимости.

Вопрос 2. Признаки равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости Дирихле-Абеля и Вейерштрасса.

Вопрос 3. Признак Дини равномерной сходимости. Почленный переход к пределу.

Вопрос 4. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование равномерно сходящихся рядов.

Вопрос 5. Понятие о сходимости в среднем. Почленноеинтегрирование рядов сходящихся в среднем.

Вопрос 6. Теорема Коши-Адамара. Непрерывность суммы степенного ряда внутри промежутка сходимости.

Вопрос 7. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенных рядов. Разложение функции в степенной ряд. Теорема Вейерштрасса (без док-ва).

Вопрос 8. Двойные интегралы. Определение и существование двойного интеграла для прямоугольника. (Леммы Дарбу без доказательства).

Вопрос 9. Два определения двойного интеграла для произвольной области. Свойства двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному однократному (случай прямоугольника).

Вопрос 10. Сведение двойного интеграла к повторному для произвольной области. Понятие о тройном и n-кратном интеграле.

Вопрос 11. Замена переменных в кратном интеграле (без док-ва). Геометрический смысл. Элементы объема в сферических и цилиндрических координатах.

Вопрос 12. Кратные несобственные интегралы. Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Основной признак сравнения.

Вопрос 13. Несобственные интегралы от функций любого знака. Абсолютная сходимость.

Вопрос 14. Понятие о криволинейных интегралах и о сведении их к однократным интегралам.

Вопрос 15. Понятие поверхности. Три леммы. Площадь поверхности.

Вопрос 16. Понятие о поверхностных интегралах. Сведение поверхностных интегралов к двойному интегралу.

Вопрос 17. Дивергенция и ротор линейного оператора и дифференцируемого векторного поля.

Вопрос 18. Формулы Грина и Остроградского-Гаусса.

Вопрос 19. Понятие о формуле Стокса. Условия независимости криволинейного интеграла на плоскости от пути интегрирования.

Вопрос 20. Ортонормированные системы и общие ряды Фурье. Неравенство Бесселя.

Вопрос 21. Тригонометрические ряды Фурье. Выражение для частичной суммы. Принцип локализации Римана. Простейшее условие сходимости.

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)

Оценка / РО и соответствующие виды оценочных средств	2	3	4	5
Знания *Коллоквиум, Экзамен*	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения *Контрольная работа, зачет*	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципи-ального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) *Экзамен*	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)	
Результаты обучения	Компетенция, с частичным формированием которой связано достижение результата обучения
Знать: 1. основы теории функциональных последовательностей и рядов; 2. основы теории степенных рядов; 3. основы теории двойных и n-кратных интегралов и, в частности, несобственных интегралов; 4. основы теории криволинейных и поверхностных интегралов; 5. основы теории поля и интегральные формулы анализа; 6. основы теории рядов Фурье. **Уметь:** 1. применять на практике теоретические факты о функциональных последовательностях и рядах, и, в частности, исследовать их на равномерную сходимость; 2. применять теоретические подходы к анализу и вычислению кратных интегралов, и, в частности, анализировать несобственные кратные интегралы	ОПК-1.Б

Владеть: 1. методами качественного анализа равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов, а также методами разложения функций в степенные ряды;	
Уметь: 1. использовать подходы к исследованию функциональных последовательностей и рядов, также строить и исследовать степенные ряды; 2. вычислять криволинейные и поверхностные интегралы, в том числе с использованием интегральных формул. **Владеть:** 1. навыками замены переменных в кратных интегралах, а также параметризации при вычислении криволинейных и поверхностных интегралов.	ОПК-2.Б
Владеть: 1. методами качественного анализа равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов, а также методами разложения функций в степенные ряды; 2. навыками использования свойства равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.	ПК-2.Б

8. Ресурсное обеспечение:

Основная литература:

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., СендовБл.Х. Математический анализ. Часть 2. М.: «Проспект», изд-во МГУ. 2004.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 2. М.: Физматлит, 2014.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука. 1990; М.: АСТ, Астрель. 2004.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1,2. М.: Физматлит. 2001.
5. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.. Задачи и упражнения по математическому анализу. Часть 2. М.: изд-во МГУ. 2017.

Дополнительная литература:

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т. 2. М.: Высшая школа. 1988, М.: Дрофа. 2003.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа, т. 2. М.: Наука. 1991.
3. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.. Математический анализ в задачах и упражнениях (числовые и функциональные ряды). М.: Факториал, 1996.
4. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу, т. 2. М.: Наука. 1986. Т. 3. М.: Физматлит. 1995.
5. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967, М.: URSS. 2007.

Материально-техническое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

9. Язык преподавания - русский.

10. Преподаватели: профессор факультета ВМК МГУ А.В Ильин.

11. Авторы программы: профессора факультета ВМК МГУ А.В. Ильин, И.С. Ломов.