

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики



УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ

И.А.Соколов/

2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Наименование дисциплины (модуля):

Математический анализ I

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки (специальность):

02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Направленность (профиль) ОПОП:

дисциплина относится к базовой части программы

Форма обучения:

очная

Москва 2023

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ бакалавриата, магистратуры, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки по направлениям 02.03.02, 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

1. Дисциплина относится к базовой части ОПОП ВО.

2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по алгебре и геометрии в объеме, соответствующем профильному уровню подготовки программы по математике средней школы.

3. Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотношенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

- **ОПК-1.Б** Способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с фундаментальной информатикой и информационными технологиями
- **ПК-2.Б** Способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

Знать:

1. основы теории вещественных чисел;
2. основы теории числовых последовательностей и числовых рядов;
3. основы теории предела функции одной переменной и непрерывности;
4. основы теории дифференциального исчисления функции одной переменной;
5. основы теории интегрирования функций одной переменной;
6. основы теории предела, непрерывности и дифференцируемости функций многих переменных.

Уметь:

1. применять на практике теоретические факты о числовых последовательностях, о непрерывных функциях одного и нескольких переменных, о дифференциальных свойствах функций одного и нескольких переменных;
2. использовать аппарат дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной для решения теоретических и практических задач;
3. использовать аппарат дифференциального исчисления функций многих переменных для решения теоретических и практических задач.

Владеть:

1. методами дифференциального и интегрального исчисления функций одного переменного для решения задач оптимизации и геометрических приложений;
 2. навыками использования аппарата дифференциального исчисления функций многих переменных для решения задач оптимизации;
 3. навыками исследования числовых рядов при решении прикладных задач.
4. Формат обучения: лекции и семинарские занятия проводятся с использованием меловой доски.

5. Объем дисциплины (модуля) составляет 6 з.е., в том числе 108 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 108 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе			Самостоятельная работа обучающихся, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, часы		Всего	
		Занятия лекционного типа*	Занятия семинарского типа*		
1. Вещественные числа	14	4	4	8	6
2. Предел числовой последовательности	36	10	10	20	16
3. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 1	2	0	2	2	0
4. Предел и непрерывность функций одной переменной	36	10	10	20	16
5. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 2	2	0	2	2	0
6. Дифференцирование функций одной переменной	34	10	8	18	14
7. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 3	2	0	2	2	0
8. Текущий контроль успеваемости: коллоквиум	6	0	2	2	4
9. Интегрирование функций одной переменной	36	10	10	20	16
10. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 4	2	0	2	2	0
11. Исследование функций и построение её графика	14	10	2	12	2
Промежуточная аттестация: зачет	2	0	0	0	2
Промежуточная аттестация: устный экзамен	32	0	0	0	32
Итого:	216	54	54	108	108

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

Контрольная работа № 1	
<p>1. Найти $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$: $x_n = \sin^2 \frac{\pi n}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;</p> <p>2. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{e+a}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} = 0$, ($a > 0$);</p> <p>3. Пользуясь критерием Коши, исследовать на сходимость:</p> $x_n = 1 + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha}, \quad (\alpha < 1);$ <p>4. Доказать, что $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.</p>	
Контрольная работа № 2	
<p>1. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{1 - \cos x}$;</p> <p>2. Выделить у данной функции $f(x) = e^{x-2\sqrt{x}} - e^{-1}$ главный член вида: $c(x-1)^n$.</p> <p>3. Определить характер точек разрыва следующей функции $f(x) = [x] \sin \pi x + e^{\frac{1}{x}}$.</p> <p>4. Исследовать на непрерывность следующую функцию: $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x - \text{рационально}, \\ \sqrt{3}, & x - \text{иррационально}. \end{cases}$</p> <p>4. Исследовать на непрерывность следующую функцию: $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x - \text{рационально}, \\ -\frac{1}{2}, & x - \text{иррационально}. \end{cases}$</p>	
Контрольная работа № 3	
<p>1. Найти $d^2 y$, если $y = \frac{\ln x}{x} \cdot \sin x$;</p> <p>2. Найти $y^{(20)}$, если $y = x^3 \cdot e^{2x}$;</p>	

3. Найти y''_x , если $\begin{cases} x = \arctg t \\ y = \ln(1 + t^2) \end{cases}$.

4. Разложить данную функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности указанной точки x_0 до членов III порядка включительно:
 $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

5. Найти предел, пользуясь формулой Тейлора: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x) - 2x^3\sqrt{3-x^2}}{x^5}$.

6. Раскрыть неопределённость: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Контрольная работа № 4

Вариант №1

Вычислить следующие интегралы:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$;

2. $\int (x \ln x)^3 dx$;

3. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^4 x}$;

4. $\int \frac{2x+1}{3x-2} dx$.

Вариант №2

Вычислить следующие интегралы:

1. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{2e^{2x} - 3}}$;

2. $\int (x^3 \ln^2(1+x)) dx$;

3. $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^4 x}$;

4. $\int \frac{1-2x}{4x-3} dx$.

Вопросы к коллоквиуму

Коллоквиум проводится в форме устного собеседования. Билет коллоквиума содержит темы из следующего списка:

1. Вещественные числа, правило их сравнения. Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани у ограниченного сверху(снизу) числового множества.
2. Арифметические операции над вещественными числами. Свойства вещественных чисел.
3. Понятие об эквивалентных и неэквивалентных (равномощных и неравномощных) множествах. Счётные множества и множества мощности континуум. Доказательство их неэквивалентности. Полнога множества вещественных чисел. Аксиоматический метод задания вещественных чисел.
4. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Теорема о единственности предела. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.
5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Их взаимосвязь и свойства. Примеры.
6. Арифметические операции над сходящимися последовательностями.
7. Предельный переход в неравенствах для последовательностей.
8. Расширенная числовая ось. Бесконечно удалённые точки. Понятие ε -окрестности конечных и бесконечных точек. Понятие предела последовательности в терминах окрестностей.
9. Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности. Число e .
10. Понятие предельной точки множества и предельной точки последовательности. Теорема о существовании верхнего и нижнего пределов у бесконечного ограниченного множества. Теорема Больцано-Вейерштрасса об ограниченной последовательности.
11. Фундаментальная последовательность и её свойства. Критерий Коши сходимости последовательности.
12. Два определения предела (предельного значения) функции: по Гейне и по Коши, их эквивалентность. Единственность предела функции в данной точке. Односторонние пределы. Бесконечные пределы и пределы на бесконечности.
13. Критерий Коши существования предела функции.
14. Бесконечно малые функции в окрестности данной точки, сравнение порядков их малости. Бесконечно большие функции в окрестности данной точки, сравнение порядков их роста. Символы o -малое, O -большое со звёздочкой. Понятие об эквивалентных бесконечно малых (бесконечно больших) функциях. Примеры.
15. Арифметические операции над функциями, имеющими пределы.
16. Предельный переход в функциональных неравенствах.
17. Непрерывность функции в точке. Определения непрерывности по Гейне и по Коши. Непрерывность функции в точке слева или справа. Локальные свойства непрерывных функций: ограниченность, сохранение знака.
18. Арифметические операции над непрерывными функциями. Суперпозиция функций. Непрерывность сложной функции.
19. Точки разрыва функции. Их классификация. Примеры.
20. Непрерывность функции на множестве. Свойства функций на отрезке: теоремы о прохождении функции через нуль и через промежуточное значение.

21. Теоремы об ограниченности функции, непрерывной на отрезке (I теорема Вейерштрасса) и о достижении такой функцией точных верхней и нижней граней её значений (II теорема Вейерштрасса).
22. Равномерная непрерывность функции на множестве. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции на отрезке.

Типовой билет коллоквиума

1. Дать определение того, что число M является точной верхней гранью множества значений функции $f(x)$ на отрезке $[0;2]$.
 2. Сформулировать первую теорему Вейерштрасса.
 3. Дать определение по Коши того факта, что соотношение $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b + 0$ неверно.
 4. Дать определение точки разрыва II рода для функции одной переменной.
 5. *Дать определения, формулировки всех утверждений и привести их доказательства по следующей теме:*
Предельные точки множества и последовательности. Теорема о существовании верхнего и нижнего пределов у ограниченной последовательности.
- 7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

Зачетная работа

(По усмотрению преподавателя в варианты зачётной работы можно вставить по несколько формулировок и определений из материала)

1. Исследовать на сходимость следующую числовую последовательность:

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{2n-1}}.$$

2. Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x}$.

3. Исследовать функцию на непрерывность и дифференцируемость: $f(x) = \ln(1 + x^4) \cos \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$.

4. Найти du , d^2u , где $u = f(v)$, а функция $v(x)$ задана так: $v = \sqrt{1 + x^2}$.

5. Найти f'_x , f''_{xx} , если $y = f(x)$, и x , y заданы следующим образом:

$$\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$$

6. Вычислить следующие неопределённые интегралы:

$$a) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}};$$

б) $\int \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx$;
 в) $\int \arcsin x dx$.

7. Вычислить главный член функции $f(x) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{|x|}}$ вида: $C(1-x)^n$ при $x \rightarrow 1$.
8. Вычислить главный член функции $f(x) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{|x|}}$ вида: $C(1-x)^n$ при $x \rightarrow 1$.
9. Исследовать функцию на равномерную непрерывность: $f(x) = (\ln x)^x \cdot \sin \frac{1}{x}$, $2 \leq x < +\infty$.
10. Доказать функциональное неравенство: $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, ($x > 0$).
11. Разложить по формуле Тейлора в окрестности указанной точки x_0 до членов III порядка следующую функцию: $f(x) = x^x - 1$, $x_0 = 1$.
12. Пользуясь формулой Тейлора, найти предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x}{2}}}{x^4}$.

Вопросы к экзамену

Экзамен сдается в устной форме. В экзаменационном билете – один вопрос из приведенного ниже списка.

1. Вещественные числа, правило их сравнения. Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани у ограниченного сверху (снизу) числового множества.
2. Арифметические операции над вещественными числами. Свойства вещественных чисел.
3. Понятие об эквивалентных и неэквивалентных (равномощных и неравномощных) множествах. Счётные множества и множества мощности континуум. Доказательство их неэквивалентности. Полнота множества вещественных чисел. Аксиоматический метод задания вещественных чисел.
4. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Теорема о единственности предела. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.
5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Их взаимосвязь и свойства. Примеры.
6. Арифметические операции над сходящимися последовательностями.
7. Предельный переход в неравенствах для последовательностей.
8. Числовая ось. Бесконечно удалённые точки. Понятие ε -окрестности конечных и бесконечных точек. Понятие предела последовательности в терминах окрестностей.
9. Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности. Число e .

10. Понятие предельной точки множества и предельной точки последовательности. Теорема о существовании верхнего и нижнего пределов у ограниченной последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса об ограниченной последовательности.
11. Фундаментальная последовательность и её свойства. Критерий Коши сходимости последовательности.
12. Два определения предела (предельного значения) функции: по Гейне и по Коши, их эквивалентность. Единственность предела функций в данной точке. Односторонние пределы. Бесконечные пределы и пределы на бесконечности.
13. Критерий Коши существования предела функции.
14. Асимптотическое сравнение функций. O -символика, эквивалентность. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Примеры.
15. Арифметические операции над функциями, имеющими пределы.
16. Предельный переход в функциональных неравенствах.
17. Непрерывность функции в точке. Определения непрерывности по Гейне и по Коши. Непрерывность в точке слева или справа. Локальные свойства непрерывных функций: ограниченность, сохранение знака.
18. Арифметические операции над непрерывными функциями. Суперпозиция функций. Непрерывность сложной функции.
19. Точки разрыва функции. Их классификация. Примеры.
20. Непрерывность функции на множестве. Свойства функций, непрерывных на отрезке: теоремы о прохождении функции через нуль и через промежуточное значение.
21. Теоремы об ограниченности функции, непрерывной на отрезке (I теорема Вейерштрасса) и о достижении такой функцией точных верхней и нижней граней её значений (II теорема Вейерштрасса).
22. Равномерная непрерывность функции на множестве. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции на отрезке.
23. Монотонная функция. Обратная функция. Теорема о существовании обратной функции у данной строго монотонной функции. Теорема о существовании односторонних пределов у монотонной функции.
24. Критерий непрерывности обратной функции для данной строго монотонной функции.
25. Элементарные функции. Непрерывность простейших элементарных функций.
26. Первый и второй замечательные пределы. Следствия из них.
27. Производная и дифференциал функции. Их физический и геометрический смысл. Дифференцируемость функции в точке и существование у неё производной. Правая, левая производные функции в точке. Связь дифференцируемости и непрерывности функции в точке. Применение дифференциала в приближённых вычислениях.
28. Дифференцирование сложной функции и обратной функции. Инвариантность формы записи первого дифференциала. Производные и дифференциалы суммы, разности, произведения и частного двух функций. Вектор-функция и её производная.
29. Производные и дифференциалы простейших элементарных функций.
30. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница. Неинвариантность формы записи второго дифференциала. Дифференцирование функций, заданных параметрически, и вектор-функций.
31. Возрастание и убывание функции в точке. Локальный экстремум функции. Достаточные условия возрастания и убывания функции в точке. Необходимое условие локального экстремума.
32. Теорема Ролля о нуле производной.

33. Теорема Лагранжа (формула конечных приращений). Следствия: критерии постоянства и монотонности функции.
34. Теорема Коши (обобщённая формула конечных приращений).
35. Раскрытие неопределённости. Правило Лопиталя раскрытия неопределённости вида: $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Применение правила Лопиталя для раскрытия других неопределённости.
36. Формула Тейлора с остаточным членом $R_{n+1}(x)$ в форме Шлёмлиха-Роша.
37. Выражения остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа, в форме Коши и в форме Пеано. Оценка остаточного члена $R_{n+1}(x)$.
38. Формула Маклорена. Разложение по формуле Маклорена простейших элементарных функций. Примеры применения формулы Тейлора-Маклорена.
39. Первообразная функции и неопределённый интеграл. Основные свойства неопределённого интеграла. Таблица неопределённых интегралов.
40. Основные методы интегрирования: замена переменных и интегрирование по частям. Вычисление интегралов от простейших рациональных дробей 4 типов.
41. Алгебраический многочлен. Теорема о разложении на множители произвольного алгебраического многочлена и многочлена с вещественными коэффициентами.
42. Рациональная функция (рациональная дробь). Теорема о представлении рациональной дроби в виде линейной комбинации простейших дробей. Алгоритм интегрирования рациональной дроби.

		ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)			
Оценка		2	3	4	5
РО и соответствующие виды оценочных средств	Знания	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
	Коллоквиум, Экзамен				
Умения	Отсутствие умений	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности нецелесообразного характера)	Успешное и систематическое умение
	Контрольная работа, самостоятельная работа, зачет				
Навыки (владения, опыт деятельности)	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного	В целом, сформированные навыки (владения), но использу-	Сформированные навыки (владения), применяемые

Экзамен	опыта)	емы не в активной форме	при решении задач
Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)			
Результаты обучения		Компетенция, с которой связано достижение результата обучения	
Знать: 1. основы теории вещественных чисел; 2. основы теории числовых последовательностей и числовых рядов; 3. основы теории предела функции одной переменной и непрерывности; 4. основы теории дифференциального исчисления функции одной переменной; 5. основы теории интегрирования функций одной переменной; 6. основы теории предела, непрерывности и дифференцируемости функций многих переменных.			ОПК-1.Б
Уметь: 1. применять на практике теоретические факты о числовых последовательностях, о непрерывных функциях одного и нескольких переменных, о дифференциальных свойствах функций одного и нескольких переменных; 2. использовать аппарат дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной для решения теоретических и практических задач; 3. использовать аппарат дифференциального исчисления функций многих переменных для решения теоретических и практических задач.			ОПК-2.Б

8. Ресурсное обеспечение:

Основная литература:

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Часть 1. М.: «Проспект», изд-во МГУ. 2004.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 1. М.: Физматлит, 2014.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука. 1990; М.: АСТ, Астрель. 2004.

4. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.. Задачи и упражнения по математическому анализу. Часть 2. М.: изд-во МГУ. 2017.
- Дополнительная литература:**
1. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. М.: Наука, 2002.
 2. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 1, 2. М.: Наука, 2001.
 3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1, 2. М.: 2003, 2004.
 4. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999.
 5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1,2. М.: Физматлит. 2001.
 6. Зорич В.А. Математический анализ, ч. 1, 2. М.: МЦНМО, 2012.
 7. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1. Предел, непрерывность, дифференцируемость. Издание второе переработанное и дополненное. М.: Физматлит, 2003.
 8. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Т. 2. Интегралы, ряды. Издание второе переработанное и дополненное. М.: Физматлит, 2003.
 9. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу (функции нескольких переменных). Санкт-Петербург, 1994.
 10. И.В.Садовничая, Е.В.Хорошилова. Определенный интеграл. Теория и практика вычислений. М.: МАКС-Пресс, 2008.
 11. И.В.Садовничая, Т.Н.Фоменко. Математический анализ. Функции многих переменных: теория и задачи. М.: МАКС-Пресс, 2008.
 12. В.Н.Денисов, В.В.Тихомиров. Математический анализ. Вып. 1-4. М.: МАКС-Пресс, 2005.
- Материально-техническое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.
9. Язык преподавания - русский.
10. Преподаватели:
профессор факультета ВМК МГУ Т.Н. Фоменко,
доценты факультета ВМК МГУ В.В.Нефедов.
11. Авторы программы:
профессора факультета ВМК МГУ И.В.Садовничая, В.В.Фомичев, Т.Н.Фоменко, доценты факультета ВМК МГУ В.В.Тихомиров, А.А.Никитин.