

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета ВМК МГУ  
/И.А.Соколов/  
2023 г.



## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Наименование дисциплины (модуля):

**Математическое моделирование**

Уровень высшего образования:

**бакалавриат**

Направление подготовки (специальность):

**02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии**

Направленность (профиль) ОПОП:

**дисциплина относится к вариативной части программы**

Форма обучения:

**очная**

Москва 2023

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ бакалавриата, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки по направлениям 02.03.02, 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

1. Дисциплина относится к *вариативной* части ОПОП ВО.

2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу, линейной алгебре, уравнениям математической физики, численным методам в объеме, соответствующем программе трёх лет обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

3. Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

Выпускник, освоивший программу бакалавриата по направлению ФИИТ, должен обладать следующими общепрофессиональными компетенциями:

способностью использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с фундаментальной информатикой и информационными технологиями (ОПК-1);

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

**Знать:**

1. истоки формирования триады А.А. Самарского (модель – алгоритм - программа) как основы колеса вычислительного эксперимента;
2. примеры освоенных ранее задач, а также стохастических задач микро – макро моделирования;
3. основы вычислительных методов математического моделирования, включая подходы к проблеме описания больших систем на микроскопическом уровне с последующем огрублением до макроскопического;

**Уметь:**

1. давать ответ на фундаментальный вопрос о соответствии построенного алгоритма изучаемому явлению на основе понятий аппроксимации, устойчивости и сходимости;

**Владеть:**

1. методами построения и анализа дискретных моделей, пригодных для компьютерного анализа основных классов задач, возникающих в науке и технике;

4. Формат обучения: лекции и контрольные опросы проводятся с использованием меловой доски, а также компьютера с проецированием на экран.

Самостоятельная работа студентов предполагает подготовку теоретического материала и письменное выполнение домашних работ – упражнений, тестов, решение задач. В рамках самостоятельной работы использование студентами научной литературы, сети Интернет и иных информационных технологий для поиска и анализа дополнительных сведений по содержанию дисциплины.

В процессе проведения аудиторных занятий активно используется метод анализа фундаментальных научных идей, лежащих в основе дисциплины, и специфики применения этих идей в смежных областях.

5. Объем дисциплины (модуля) составляет 2 зачетных единицы, в том числе 24 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 48 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

Триада А.А. Самарского (модель – алгоритм - программа) как основа колеса вычислительного эксперимента иллюстрируется сначала на освоенных ранее задачах с последующим переходом на современные подходы, включая элементы микро – макро моделирования и стохастический анализ.

Курс нацелен на освоение студентами основ вычислительных методов математического моделирования. Изучаются методы построения дискретных моделей, пригодных для компьютерного анализа основных классов задач, возникающих в науке и технике. Рассматриваются методы, которые выдержали испытание практикой и применяются для решения реальных прикладных задач. Акцентируется фундаментальный вопрос о соответствии построенного алгоритма изучаемому явлению на основе понятий аппроксимации, устойчивости и сходимости.

Изучаются аналитические и численные подходы к проблеме описания больших систем на микроскопическом уровне с последующим огрублением до макроскопического. Рассмотрение проводится на примере газовой динамики как наиболее разработанной в этом контексте области знания, очерчиваемой такими ключевыми терминами, как уравнения Больцмана, Навье-Стокса, методы Монте-Карло, стохастическое исчисление. Излагаются стохастические подходы как к построению математических моделей, так и численных методов.

| Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю) | Всего (часы)             | В том числе  |           |   |   |
|---|--------------------------|--|-----------|---|---|
|   |                          | Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них |           |   | Самостоятельная работа обучающегося, часы |
|   | Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа  | Всего     |   |   |
| Тема 1. Численное моделирование переноса и диффузии   | 20                       | 8  | -         | 8 | 12  |
| Тема 2. Разрывы. Методы частиц  | 20                       | 8  | -         | 8 | 12  |
| Тема 3. Стохастическая иерархия   | 20                       | 8  | -         | 8 | 12  |
| 4. Промежуточная аттестация – зачет   | 12                       |  |           |   | 12  |
| <b>Итого</b>  | <b>72</b>                |  | <b>24</b> |   | <b>48</b>                                 |

## **Тема 1. Численное моделирование переноса и диффузии**

Колесо вычислительного эксперимента.

Свойства разностных схем: аппроксимация, устойчивость, сходимость, консервативность, монотонность. Операторный подход.

Способы построения разностных схем: интегро – интерполяционный и метод конечных элементов.

Разностные схемы для уравнения переноса. Численная диффузия, схемы второго порядка точности, монотонность, искусственная вязкость, лимитеры.

## **Тема 2. Разрывы. Методы частиц**

Неслучайный метод частиц на основе микро – макро перехода для явления переноса.

Детерминированные методы частиц, их классификация: методы «частица - сетка» и «частица - частица». Разрывный метод частиц, его преимущества. Моделирование разрывных решений нелинейных задач, тест «ступенька». Методы с «рождением - гибелью» частиц. «Точный» разрывный метод частиц. Устойчивость метода.

Консервативные схемы для уравнения диффузии с точки зрения метода частиц. Разрывный метод частиц для уравнения Бюргерса.

Метод частиц для системы уравнений газовой динамики. Задача о структуре фронта ударной волны.

## **Тема 3. Стохастическая иерархия**

Стохастическое описание. Стохастические дифференциальные уравнения. Винеровский процесс. Стохастический интеграл. Формула Ито. Сильные и слабые решения. Методы частиц (стохастический и детерминированный). Метод Монте-Карло. Разностные схемы решения стохастических дифференциальных уравнений по винеровской мере. Схема Эйлера – Маруямы. Схема Мильштейна. Схемы повышенного порядка точности.

Задача о столкновении двух твёрдых шаров. Система статистических дифференциальных уравнений по скачкообразным мерам для описания переноса и столкновений молекул.

Число Кнудсена. Переход к мезо – модели как диффузионному процессу в фазовом пространстве.

Уравнение Колмогорова – Фоккера - Планка.

Макро – модели стохастической газовой динамики (случайные и неслучайные).

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

### **Фонды оценочных средств, необходимые для оценки результатов обучения**

Типовые задания для проведения текущего контроля

#### **Примерный перечень вопросов к зачёту.**

1. Колесо вычислительного эксперимента.

2. Свойства разностных схем: аппроксимация, устойчивость, сходимость, консервативность, монотонность. Операторный подход.

3. Способы построения разностных схем: интегро – интерполяционный и метод конечных элементов.
4. Неслучайный метод частиц на основе микро – макро перехода для явления переноса.
5. Броуновское движение и диффузионные процессы. Стохастические дифференциальные уравнения. Винеровский процесс. Стохастический интеграл. Формула Ито. Стохастический метод частиц по винеровской мере.
6. Задача о столкновении двух твёрдых шаров. Система статистических дифференциальных уравнений по скачкообразным мерам для описания переноса и столкновений молекул.
7. Число Кнудсена. Переход к мезо – модели как диффузионному процессу в фазовом пространстве.
8. Уравнение Колмогорова – Фоккера - Планка.
9. Макро – модели стохастической газовой динамики (случайные и неслучайные).

| <b>ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (моду)</b> |                              |  |   |   |
|---|------------------------------|--|---|---|
| Оценка РО и соответствующие виды оценочных средств                                | 2                            | 3  | 4   | 5   |
| <b>Знания</b><br><i>Коллоквиум, Экзамен</i>                                       | Отсутствие знаний            | Фрагментарные знания                                     | Общие, но не структурированные знания   | Сформированные систематические знания                           |
| <b>Умения</b><br><i>Контрольная работа, зачет</i>                                 | Отсутствие умений            | В целом успешное, но не систематическое умение           | В целом успешное, но содержащее отдельные провалы умение (допускает неточности непринципиального характера) | Успешное и систематическое умение                               |
| <b>Навыки (владения), опыт деятельности</b><br><i>Экзамен</i>                     | Отсутствие (владения, опыта) | Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта) | В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме                              | Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач |

### **УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ**

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации.

Литература для самостоятельной работы студентов в соответствии с тематическим планом .

#### **Тема 1. Численное моделирование переноса и диффузии**

Явления переноса и диффузии

Численное моделирование переноса и диффузии. Детерминированные методы частиц  
Разностные схемы для уравнения переноса. Численная диффузия, схемы второго порядка точности, монотонность, искусственная вязкость, лимитеры.

Н.Н. Калиткин, П.В. Корякин. Численные методы. Книга 2. – М.: Издательский центр "Академия", 2013

О.А. Олейник. Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с разрывными начальными условиями // Доклады АН, 1956, т.95, №3, с.433–454;

- А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. О разрывных решениях квазилинейного уравнения первого порядка // ДАН СССР, 1954, т.99, №1, с.27-30;
- С.Н. Кружков. Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сб., 1966, т.70(112), №3, с.394–415;
- А. А. Самарский, А. В. Гулин. Численные методы. - М.: Наука, 1989
- Численные методы. В 2-х кн: кн. 2 : Методы математической физики / Н. Н. Калиткин, П. В. Корякин. - М. : Академия, 2013.
- Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики.—М.: Научный мир, 2000.
- Андреев В.Б. Лекции по методу конечных элементов. - М.: изд. МАКС Пресс, 2010.
- Иванов М.Ф., Гальбурт В.А. Численное моделирование динамики газов и плазмы методами частиц. - М.: МФТИ, 2000.
- Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику.—М., МФТИ, 1994.
- Кирьянов Д.В., Кирьянова Е.Н. Вычислительная физика. – М.: Полибук Мультимедиа, 2006. - <http://keldysh.ru/pages/comma/>
- Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам.—М., Эдиториал УРСС, 2018.

## **Тема 2. Разрывы. Методы частиц**

Детерминированные методы частиц, их классификация: методы «частица - сетка» и «частица - частица».

Иванов М.Ф., Гальбурт В.А. Численное моделирование динамики газов и плазмы методами частиц.—М.: МФТИ, 2000

Построить детерминированный метод частиц для уравнения переноса. Показать различие между методами типа «частица - сетка» и «частица - частица».

Разрывный метод частиц, его преимущества. Моделирование разрывных решений нелинейных задач, тест «ступенька». Методы с «рождением - гибелью» частиц. «Точный» разрывный метод частиц. Устойчивость метода.

*А.Ж. Баев, С.В. Богомолов.* Об устойчивости разрывного метода частиц для уравнения переноса. // Математическое моделирование, 2017, т.29, №9, с.3–18

*С.В. Богомолов, А.Е. Кувшинников.* Разрывный метод частиц на газодинамических примерах. // Математическое моделирование, 2019, т.31, №, с.

*E. Oñate, J. Miquel, P. Nadukandi.* An accurate FIC-FEM formulation for the 1D advection-diffusion-reaction equation // Comp. Methods Appl. Mech. Eng., 2016, №298, p.373-406.

Консервативные разностные схемы для уравнения диффузии. Точка зрения с позиции метод частиц. Разрывный метод частиц для уравнения Бюргерса.

Метод частиц для системы уравнений газовой динамики. Задача о структуре фронта ударной волны.

*С.В. Богомолов, К.В. Кузнецов.* Метод частиц для системы уравнений газовой динамики // Математическое моделирование, 1998, т.10, №7, с.93–100

*V.I. Kolobov, R.R. Arslanbekov, V.V. Aristov, A.A. Frolova, S.A. Zabelok.* Unified Solver for Rarefied and Continuum Flows with Adaptive Mesh and Algorithm Refinement.//Journal of Computational Physics, 2007, Vol. 223, p. 589.

*K. Morinishi.* A Continuum/Kinetic Hybrid Approach for Multi -- Scale Flow Simulation.// European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2006, TU Delft, the Netherlands.

### Тема 3. Стохастическая иерархия

Введение. Из истории кинетической теории.

Основная схема микро-макро перехода на простейших примерах.

Задания для самостоятельной работы. Изучение литературы: Арсеньев А.А. Кинетические уравнения//Серия «Математика, кибернетика».1985, № 1

Решить задачу о столкновении двух твёрдых шаров.

Уравнение Больцмана.

Вывод уравнения Больцмана для газа из твердых сфер. H-теорема. Свойства интеграла столкновений. Модели интеграла столкновений.

Задания для самостоятельной работы. Изучение литературы: Больцман Л. Избранные труды. - М.: Наука, 1984

Обосновать основные свойства интеграла столкновений.

Переход к системе Навье-Стокса. Связь с уравнениями газовой динамики для макроскопических величин.

Квазигидродинамика, кинетически-согласованный подход. Уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка.

Задания для самостоятельной работы. Изучение литературы: Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. - М.: Мир, 1978

Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. - М.: МАКС Пресс, 2004

Проинтегрировать умноженное на инварианты столкновений уравнение Больцмана по скорости.

#### Стохастические методы частиц.

Броуновское движение и диффузионные процессы. Стохастические дифференциальные уравнения. Винеровский процесс. Стохастический интеграл. Формула Ито. Сильные и слабые решения.

Задания для самостоятельной работы. Изучение литературы: Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. . - М.: Мир, 2003

Арсеньев А.А. Лекции о кинетических уравнениях. - М.: Наука, 1992

Скоруход А.В. Стохастические уравнения для сложных систем. - М.: Наука, 1983

С. В. Богомолов, Н. Б. Есикова, А. Е. Кувшинников, “Микро-макро модели Фоккера-Планка-Колмогорова для газа из твёрдых сфер”,

Матем. моделирование, 28:2 (2016), 65–85; Math. Models Comput. Simul., 8:5 (2016), 533–547.

Bogomolov S.,V., Esikova N. B., Kuvshinnikov A. E., Smirnov P. N. On gas dynamic hierarchy// In: The Seventh Conference on Finite Difference Methods.FDM 2018. LNCS. Springer. 2019. Vol. 11386. P.1–8.

Королюк В.С., Портенко Н.И., Скоруход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике.—М.: Наука, 1985

Iacus S.M. Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations. - Springer, 2008

K. JACOBS. STOCHASTIC PROCESSES FOR PHYSICISTS. Understanding Noisy Systems - CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2010.



Численное решение системы стохастических дифференциальных уравнений по мере Пуассона. Стохастическое описание. Метод частиц (стохастический и детерминированный). Метод Монте-Карло.

Разностные схемы решения стохастических дифференциальных уравнений по винеровской мере. Схема Эйлера – Маруямы. Схема Мильштейна. Схемы повышенного порядка точности.

Задания для самостоятельной работы. Изучение литературы: Берд Г. Молекулярная газовая динамика. - М.: Мир, 1981

А.В. Лукшин, С.Н. Смирнов. Численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений// Математическое моделирование, 1990, том 2, номер 11, стр. Кузнецов Д.Ф. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. - СПб.: Наука, 1999

Миллер Б.М., Панков А.Р. Случайные процессы в примерах и задачах. - М.: Изд. МАИ, 2001 Построить стохастический метод частиц для уравнения конвекции – диффузии.

P Jenny P., Torrilhon M., Heinz S. A solution algorithm for the fluid dynamic equations based on a stochastic model for molecular motion, Journal of Computational Physics, 229 (2010) 1077

8. Ресурсное обеспечение:

### Основная литература

Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.Наука, Физматлит, 2-е изд., 2001, 320 с.

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. ун-тов. М., Изд-во МГУ, 1999. 798с. – изд.6-е, испр. и дополн.

Дополнительная литература

Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений.—М.: МАКС Пресс, 2004

*Н.Н. Калиткин.* Численные методы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2014.

С.С. Степанов. Стохастический мир: электрон. версия книги, 2011, URL:<http://synset.com/pdf/ito.pdf>; англ. пер.: *S.S. Stepanov.* Stochastic world. – Springer International Publishing, 2013.

### Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

<http://samarskii.ru>

<http://explore.tandfonline.com/page/est/monte-carlo-codes-in-science>

<http://istina.msu.ru/profile/bogomo/>

<http://e-collection.library.ethz.ch/eserv/eth:46805/eth-46805-02.pdf>

<http://link.springer.com/journal/40571>

<http://www.imamod.ru/journal/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://wccm-eccm-ecfd2014.org/frontal/Ebook.asp>

<http://elibrary.ru>

Келдыш Мстислав Всеволодович на <https://www.youtube.com>

<https://eqworld.ipmnet.ru/>

## **Информационные технологии, используемые в процессе обучения**

1. Программное обеспечение для подготовки слайдов лекций MS PowerPoint
2. Программное обеспечение для создания и просмотра pdf-документов Adobe Reader
3. Издательская система LaTeX.

## **Материально-техническая база**

Для преподавания дисциплины требуется класс, оборудованный маркерной или меловой доской и проектором.

Для демонстрации аппаратных средств защиты требуется наличие компьютеров с разъёмом PCI-express.

9. Язык преподавания - русский.

10. Преподаватели: профессор, д.ф.-м.н. Богомолов Сергей Владимирович

11. Автор программы: профессор, д.ф.-м.н. Богомолов Сергей Владимирович