

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики



УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ

И.А.Соколов/

_____ 2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Наименование дисциплины (модуля):

Теория риска

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки (специальность):

02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Направленность (профиль) ОПОП:

Общий профиль

Форма обучения:

очная

Москва 2023

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ бакалавриата, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки по направлениям 02.03.02, 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

1. Дисциплина относится к вариативной базовой части ОПОП ВО.

2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу, линейной алгебре и теории вероятностей в объеме, соответствующем программе первого и второго годов обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

3. Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

- **ОПК-2.Б** Способностью использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с фундаментальной информатикой и информационными технологиями
- **ПК-2.Б** Способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат, фундаментальные концепции и системные методологии, международные и профессиональные стандарты в области информационных технологий

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

Знать:

1. основные понятия и факты теории страхования и теории риска;
2. основные понятия математической демографии;
3. границы применимости демографических моделей;
4. основные актуарные функции, характеризующие пенсионные схемы;
5. основные особенности актуарных задач;
6. математическое описание процесса страхования;
7. аналитические методы расчета премий;
8. основные принципы перестрахования и их математическое описание;
9. основные методы расчета страховых резервов;
10. особенности анализа редких и крупных рисков.

Уметь:

1. строго обосновывать математические утверждения;
2. строить математические модели теории риска для анализа и решения страховых моделей
3. решать основные актуарные задачи на учебных примерах;
4. определять численность популяции в зависимости от различных условий (рамках излагаемой модели);

5. вычислять основные характеристики схемы финансирования пенсионного фонда;
6. рассчитывать премию методом Бюльмана-Штрауба;
7. находить оптимальный размер удержания при перестраховании;
8. рассчитывать резервы методами цепной лестницы и Борнхьюггера-Фергюсона.

Владеть:

1. современными средствами построения математических моделей теории риска
2. навыками выбора современных средств для решения основных актуарных задач
3. навыками применения математических методов для описания пенсионных схем
4. Формат обучения: лекции и семинарские занятия проводятся с использованием меловой доски и компьютерных презентаций.
5. Объем дисциплины (модуля) составляет 2 з.е., в том числе 24 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 48 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.
6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе			Самостоятельная работа обучающихся, часы (виды работы – эссе, реферат, контрольная работа и пр.)
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем)			
		Занятия лекционного типа*	Занятия семинарского типа*	Всего	
1. Функции полезности. Страховые премии. Полезность капитала. Общая задача назначения страховой премии как решения уравнения полезности. Примеры функций полезности. Принцип средней полезности в принятии решений. Франшизы. Страхование превышения убытка. Оптимальное страхование. Квотное страхование. Рисквые и офисные премии. Влияние	3	1	1	2	

инфляции на величину страховых выплат. Стандартные распределения страховых выплат. Смешанные распределения							
2. Модель индивидуального риска. Распределение величины частной выплаты. Распределение объема общей выплаты. Методы определения распределения общей выплаты. Определение распределения объема общей выплаты через производящую функцию моментов. Безопасная нагрузка. Определение величины относительной безопасной нагрузки в страховой премии. Зависимость величины страховой премии от величины страхового портфеля.	3	1			1		2
3. Модель коллективного риска. Обобщенные распределения. Типичные распределения числа выплат. Производящие функции обобщенных распределений. Моменты обобщенных распределений. Распределение общей выплаты в модели коллективного риска. Обобщенные распределения Пуассона и отрицательное биномиальное распределение. Дискретное обобщенное распределение Пуассона. Рекуррентная формула для дискретного обобщенного распределения Пуассона. Методы аппроксимации обобщенного распределения Пуассона.	6	2			2		4
4. Введение в математическую демографию. Стохастический и детерминистический подход. Основные характеристики популяции. Диаграмма Лексиса. Стационарные и устойчивые популяции. Модель Мальтуса. Условия, приводящие к устойчивой динамике популяции.	4	2			2		2
5. Актуарные приложения демографических моделей. Пенсионное обеспечение. Финансирование пенсионных схем. Основные функции, характеризующие накопление и расходование средств пенсионного фонда. Уравнение распределения дохода.	4	2			2		2
6. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 1	2	0			0		2
7. Промежуточная аттестация: письменный экзамен № 1	2	0			0		2
8. Случайный процесс изменения капитала. Случайный процесс Пуассона изменения числа выплат во времени. Случайная величина времени ожидания выплаты. Изменения величины капитала как обобщенный случайный процесс. Производящая функция обобщенного процесса изменения капитала. Временные ряды.	4	2			2		2
9. Оценки вероятности разорения. Случайная величина момента разорения в непрерывной и дискретной моделях изменения капитала. Момент разорения. Нахождение вероятности разорения для некоторых случаев распределения случайных величин частных выплат. Определение вероятности разорения	4	2			2		2

для непрерывной и дискретной моделей изменения капитала. Неравенство Крамера-Лундберга..								
10. Определение вероятности разорения для дискретной авторегрессионной модели изменения капитала. Интегро-дифференциальное уравнение для вероятности разорения. Величина капитала на момент разорения. Вероятностные характеристики суммарного убытка. Вероятность разорения за конечное время. Интегро-дифференциальное уравнение для вероятности разорения за конечное время. Исследование интегро- дифференциального уравнения для вероятности разорения за конечное время с помощью преобразования Лапласа	6	2				2		4
11. Байесовские методы принятия решений. Метод Байеса для получения апостериорного распределения величины выплат. Функции ущерба в байесовских методах принятия решений. Модели пуассоновского\гамма-распределения и нормального\нормального распределений. Модель нормального\нормального распределения. Формула для страховой премии. Прогноз развития убытков на основе построения треугольников развития убытков.	4	2				2		2
12. Приложения теории риска. Перестрахование и его виды. Оптимальное перестрахование. Выплата бонуса за малые суммарные выплаты в коллективном страховании. Влияние перестрахования на вероятность разорения.	4	2				2		2
13. Задачи имущественного страхования (история возникновения страхования. Суть, цели и задачи страхования. Современное состояние страховой отрасли в России и в мире. Особенности функционирования страховой компании. Страховые и нестраховые риски. Имущественное страхование и страхование жизни. Общее описание актуарных задач, возникающих в имущественном страховании.)	4	2				2		2
14. Принципы расчета премий (расчет страховых премий с использованием нетто-премии; различные способы нагрузки премии; метод Бюльмана-Штрауба). Механизм перестрахования (организационные схемы перестрахования, основные типы договоров перестрахования; определение параметров договоров перестрахования на основе вероятности разорения;. решение задачи определения оптимальных значений уровней удержания)	6	2				2		4
15. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 2	2	0				0		2
16. Резервы в страховании (понятие страховых резервов; виды резервов, их назначение, причины создания. IBNR-резервы; основные методы расчета	6	2				2		4

резервов). Использование статистических данных в страховании (основные проблемы использования статистических данных; способы коррекции данных; особенности моделирования крупных и редких рисков; имитационные модели как средство оценки потенциального убытка от катастрофических рисков).					
17. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 3	2	0		0	2
Промежуточная аттестация: письменный экзамен №2	6	0		0	6
Итого	72	24		24	48

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

Контрольная работа № 1
<ol style="list-style-type: none"> 1. Функция полезности страхователя $u(w) = -e^{-0.002w}$. Найдите максимально возможную премию G при возмещении 4-й части ущерба. 2. Суммарная выплата S подчиняется обобщенному распределению Пуассона с параметрами $(\lambda=0.25, p(1)=0.5, p(4)=0.25, z(5)=0.25)$. С какой вероятностью суммарная выплата будет равна 5? 3. Число выплат N соответствует смешанному обобщенному отрицательному биномиальному распределению с параметрами $R, p=0.25$. Параметр R подчиняется геометрическому распределению с параметром $q=0.1$. Чему равно среднее число выплат и дисперсия числа выплат?

Контрольная работа № 2
<ol style="list-style-type: none"> 1. Что изображается на диаграмме Лексиса? Определите число умерших в возрасте от x до $x+dx$ из числа родившихся в период $[u; u+du]$. Решение поясните на диаграмме Лексиса. 4. Что обозначает величина $(Pa)(t)$ (название и интерпретация)? В чем отличие величин $(Pa)(t)$ и $(Pa)(x)$? 5. Приведите уравнение баланса поступления и расходования средств для группы пенсионеров. Поясните его смысл. 6. Пусть $\varphi(x) = x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, \alpha > 0, \beta > 0$. Вычислите R и при $\alpha = 2, \beta = 1$ определите, является ли популяция устойчивой или стационарной. 7. Чему равно $P(t)$ в экспоненциальном случае, если $s(x) = e^{-\mu(x-a)}, a \leq x \leq r$ и $m(x) = 1/(r-x)$?

Контрольная работа № 3
<ol style="list-style-type: none"> 1. Почему задача расчета премии является одной из важнейших в страховании? 2. Предприятие покупает годовой страховой полис для того, чтобы застраховать свой доход на случай плохой погоды, которая вынуждает

временно прекратить работу. В течение года число случаев ухудшения погоды, приводящих к прекращению работы предприятия, имеет распределение Пуассона с параметром 1.5. По условию договора страховщик не платит ничего в первом случае такого ухудшения погоды, но выплачивает по 10 000 за каждое последующее ухудшение погоды. Определить ожидаемые выплаты страховщика.

3. Компания обеспечивает страховую защиту домов в трех городах, производящие функции моментов величины потерь в которых $M_1(t) = (1 - 2t)^{-3}$, $M_2(t) = (1 - 2t)^{-2.5}$, $M_3(t) = (1 - 2t)^{-4.5}$. Найдите $E[X^3]$, где X – случайная величина суммарных потерь во всех городах.

4. На основе каких данных выполняется расчет премии в модели Бюльмана-Штрауба?

Контрольная работа № 4

1. Объясните, какие проблемы возникают при оценке последствий редких и крупных рисков
2. В чем суть применения метода имитационного моделирования для оценки крупных редких рисков?
3. Заполните недостающее значение убытков 2014 года в таблице кумулятивного развития убытков, если известно, что суммарный резерв, вычисленный методом цепной лестницы, равен 238.

Год страховых событий	Год развития убытков		
	1	2	3
2014	1256	1397	X
2015	1090	1278	
2016	1314		

4. Найдите отношение резервов для 2017 года, вычисленных методом Борнхюттера-Фергюсона и методом цепной лестницы, если известно, что ожидаемая убыточность соответствует 2015 году, инфляция отсутствует. В таблице приведены значения годовых убытков и заработанные премии соответствующих лет.

7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

Вопросы к экзамену №1.

1. Функции полезности и их построения для лица принимающего решение.
2. Примеры функций полезности.
3. Общая задача назначения страховой премии как решения уравнения полезности.

4. Принцип средней полезности в принятии решений.
5. Франшизы. Страхование превышения убытка.
6. Оптимальное страхование.
7. Квотное страхование.
8. Рисковые и офисные премии.
9. Влияние инфляции на величину страховых выплат.
10. Стандартные распределения страховых выплат.
11. Смешанные распределения
12. Распределение величины частной выплаты.
13. Распределение объема общей выплаты. Методы определения распределения общей выплаты.
14. Определение распределения объема общей выплаты через производящую функцию моментов.
15. Безопасная нагрузка. Определение величины относительной безопасной нагрузки в страховой премии.
16. Зависимость величины страховой премии от величины страхового портфеля.
17. Обобщенные распределения. Типичные распределения числа выплат.
18. Производящие функции обобщенных распределений. Моменты обобщенных распределений.
19. Распределение общей выплаты в модели коллективного риска.
20. Обобщенные распределения Пуассона и отрицательное биномиальное распределение.
21. Дискретное обобщенное распределение Пуассона.
22. Рекуррентная формула для дискретного обобщенного распределения Пуассона.
23. Методы аппроксимации обобщенного распределения Пуассона
24. Элементы математической демографии и пенсионного страхования
25. Диаграммы Лексиса. Функция плотности популяции.
26. Интенсивность смертности поколений. Решение задач нахождение числа умерших в определенном возрастном (временном) диапазоне из числа родившихся в заданный период времени.
27. Стационарные и устойчивые популяции.
28. Актuarные приложения.
29. Динамика популяции.
30. Модельная схема пенсионного страхования. Функция накопления по конечному моменту.
31. Накопление актuarных обязательств. Функция накопления.
32. Основные функции для работающих, характеризующие финансирование пенсионной схемы (актуарная приведенная величина будущих пенсионных выплат для активной группы, нормальный уровень удержаний, актuarные накопленные обязательства, актuarная приведенная величина будущих пенсионных взносов).
33. Метод индивидуальных удержаний.

34. Метод агрегированных удержаний. Основные функции для вышедших на пенсию.
 35. Уравнение распределения дохода.

Типовые задачи для экзамена №1.

1. Вычислить количество индивидуумов, которые достигнут возраста 25 лет между моментами времени 50 и 51 и умрут до момента времени 53, $b(u) = 100(1 - e^{-u/100})$, $u > 0$; $s(x) = e^{-x/100}$ $x > 0$.
2. В экспоненциальном случае получить упрощенную формулу для $a_p(t)$. Чему равно $a_p(t)$, если $\theta = \delta - \rho = 0$?
3. Показать, что в экспоненциальном случае $B(t) = {}^T P(t) (\bar{a}_t^h / \bar{a}_t^h)$, где $\bar{a}_t^h = \int_r^\infty e^{-(\rho-\beta)(x-t)} \frac{s(x)}{s(t)} dx$.
4. Проектируемый уровень начальных выплат по выходу на пенсию для живущих в возрасте x в момент времени t равен $f_w(r)g(t+r-x)$ и число живущих в возрасте от x до $x+dx$ в момент времени t есть $n(t-x+a)s(x)dx$. Проверить, что

$$(aV)(t) = \int_a^r f_w(r) g(t+r-x) n(t-x+a) s(x) (aV)(x) dx.$$

5. В автомобильном страховании плотность распределения с.в. ущерба B есть $f_B(x) = 0.001, 0 < x < 1000$. Вероятность страхового случая $q = 0.1$. Компания продает полисы с франшизой $d = 250$. Требуется найти нетто-премию по такому полису.
6. В обобщенном распределении Пуассона индивидуальная выплата имеет показательное распределение с параметром $\beta = 0.02$, параметр распределения числа выплат принимает значение 1 с вероятностью 0.75 и значение 5 с вероятностью 0.25. Чему равна средняя суммарная выплата?

Экзаменационный билет состоит из двух вопросов (из числа вышеперечисленных) и двух задач (указанного выше типа).

Вопросы к экзамену №2.

1. Свойства случайного процесса числа исков.
2. Обобщенный пуассоновский процесс суммарного иска.
3. Коэффициент поправки для непрерывной модели изменения капитала.
4. Теорема о величине вероятности разорения в непрерывной модели изменения капитала.
5. Вероятность разорения для случая показательного распределения индивидуального иска.
6. Вероятность разорения в дискретной модели изменения капитала.
7. Вероятность разорения в авторегрессионной модели изменения капитала.
8. Теорема о распределении величины капитала на момент разорения.
9. Случайная величина L_1 .

10. Случайная величина максимального ущерба.
11. Производящая функция моментов случайной величины L . Уравнение для определения вероятности разорения.
12. Теорема о вероятности распределения для смеси экспоненциальных распределений индивидуального иска.
13. Примеры распределений индивидуального иска.
14. Методы аппроксимации распределения суммарного иска.
15. Останавливающее потери перестрахование. Рекуррентная формула для среднего значения перестрахованного иска.
16. Случайная величина дивиденда за малый иск.
17. Перестрахование и вероятность разорения.
18. Оптимальное перестрахование
19. Основные задачи, возникающие в имущественном страховании.
20. Математическое описание процесса страхования.
21. Распределения числа страховых случаев
22. Распределения размера страховых возмещений.
23. Суммарная величина страховых возмещений.
24. Принципы расчета премий
25. Расчет премий на основе накопленной статистики (модель Бюльмана-Штрауба)
26. Механизм перестрахования. Основные типы договоров перестрахования.
27. Определение удержаний в перестраховании. Относительная проблема удержаний
28. Резервы в страховании
29. Методы расчета резервов (цепной лестницы, Кейп Код, Борнхьюгера-Фергюсона)
30. Страхование катастрофических рисков

Типовые задачи для экзамена №2.

1. Портфель рисков разделен на три класса, соответствующие данные за три года представлены в следующих таблицах.

Суммарные убытки (Y_{ij}) Объемы классов (P_{ij})

Класс\год	1	2	3	1	2	3
1	33	41	50	20	15	19
2	50	57	59	20	25	30
3	62	55	65	11	22	18

С помощью модели Бюльмана-Штрауба определите величины премий по классам, считая, что в будущем объемы классов сохранятся на уровне наблюдаемых в таблице средних значений объемов.

2. Суммарный резерв убытков, вычисленный методом Борнхюттера-Фергюсона по данным, представленным в кумулятивной таблице, равен 8249.

Год страховых событий	Год развития убытков			Заработанная премия	
	0	1	2		3
2003	1456	1820	1930	1975	2100
2004	1508	1878	2001		P_{2004}
2005	1564	1909			2250
2006	1610				2320

Определите заработанную премию 2004 года, при условии, что ожидаемая убыточность равна 91%.

3. Определить выражение для плотности распределения суммарной годовой выплаты, если $E[I_d] = 7/12 - d + 2d^3/3 - d^4/4$. При каких значениях аргумента существует указанная плотность распределения ?

4. Суммарная годовая выплата S подчиняется обобщенному закону Пуассона с параметрами $(\lambda=1, p(1)=2/3, p(2)=2/3)$. Найти $DI_1(S)$.

5. Годовая выплата в дискретной модели разорения подчиняется обобщенному закону Пуассона с параметрами $(\lambda=0.25, p(1)=2/3, p(2)=2/3)$. Вычислите значения R_0 и R_2 .

6. В непрерывной модели изменения капитала случайная величина суммарной выплаты представляет собой обобщенный процесс Пуассона с параметрами $(\lambda=3, p(x)=1.5e^{-3x} + e^{-2x})$. При значении суммарной годовой премии $s=5/3$ требуется вычислить величину коэффициента безопасной нагрузки и указать выражение для вероятности разорения за конечное время.

Экзаменационный билет состоит из двух вопросов (из числа вышеперечисленных) и двух задач (указанного выше типа).

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)				
Оценка	2	3	4	5
РО и соответствующие виды оценочных средств				
Знания	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания

Умения	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности не принципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности)	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)

Результаты обучения	Компетенция, с частичным формированием которой связано достижение результата обучения
<p>Знать:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. основные понятия и факты теории страхования и теории риска; 2. основные понятия математической демографии; 3. границы применимости демографических моделей; 4. основные актуарные функции, характеризующие пенсионные схемы; 5. основные особенности актуарных задач; 6. математическое описание процесса страхования; 7. аналитические методы расчета премии; 8. основные принципы перестрахования и их математическое описание; 9. основные методы расчета страховых резервов; 10. особенности анализа редких и крупных рисков. <p>Уметь:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. строго обосновывать математические утверждения; 2. строить математические модели теории риска для анализа и решения страховых моделей 3. решать основные актуарные задачи на учебных примерах; 4. определять численность популяции в зависимости от различных условий (рамках излагаемой модели); 5. вычислять основные характеристики схемы финансирования пенсионного фонда; 	ОПК-2.Б

6. рассчитывать премию методом Бюльмана-Штрауба; 7. находить оптимальный размер удержания при перестраховании; 8. рассчитывать резервы методами цепной лестницы и Борнхьюттера-Фергюсона.	
Владеть: 1. современными средствами построения математических моделей теории риска 2. навыками выбора современных средств для решения основных актуарных задач 3. навыками применения математических методов для описания пенсионных схем	ПК-2.Б

8. Ресурсное обеспечение:

Основная литература:

1. Архипов А.П. Основы страховой деятельности. М., Бек. 1999
2. Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Д. Актуарная математика М., 2001
3. Штрауб Э. Актуарная математика имущественного страхования М., 1995
4. Фалин Г.И., Фалин А.И. Теория риска для актуариев в задачах. М.: Изд-во ф-та ВМиК, 2001.
5. Catastrophe Modeling: A New Approach to Managing Risk, ed. P. Grossi, H. Kunreuther. Springer, 2005

Дополнительная литература:

1. Фалин А.И., Фалин Г.И. Введение в актуарную математику. М.: ФАЦ МГУ, 1994.
2. Мак Т. Математика рискового страхования М.: Олимп-Бизнес, 2005
3. Павловский Ю.Н. Имитационные модели и системы, М.: ФАЗИС, 2000

Информационные справочные системы: <https://www.casact.org/>
<http://www.fema.gov/hazus/>

Материально-техническое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской, с экраном для показа слайдов.

9. Язык преподавания - русский.
10. Преподаватели: доцент факультета ВМК МГУ И.П. Поспелова
11. Авторы программы: доценты факультета ВМК МГУ Д.В. Денисов, И.П. Поспелова