

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ

И.А. Соколов/

_____ 2023 г.



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Наименование дисциплины (модуля):

Теория вероятностей и математическая статистика

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки (специальность):

02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Направленность (профиль) ОПОП:

Фундаментальная информатика и информационные системы

Форма обучения:

очная

Москва 2023

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ бакалавриата, магистратуры, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки по направлениям 02.03.02, 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

1. Дисциплина относится к базовой части ОПОП ВО .

2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу и линейной алгебре в объеме, соответствующем программе первого года обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

3. Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

- **ОПК-1.Б** Способность применять и адаптировать существующие математические и компьютерные методы для разработки и реализации алгоритмов решения актуальных задач в области фундаментальной и прикладной математики
 - **ОПК-2.Б** Способность применять и модифицировать математические модели, а также интерпретировать полученные математические результаты при решения задач в области профессиональной деятельности
 - **ПК-2.Б** Способность понимать и применять в научно-исследовательской деятельности современный математический аппарат
- Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

Знать:

1. основные понятия и наиболее важные задачи, решаемые в рамках теории вероятностей и математической статистики.

Уметь:

1. применять на практике статистический анализ к задачам физики, обработки сигналов и изображений, социологии, финансовой математики и других разделов науки и техники.

Владеть:

1. ключевыми методами решения задач теории вероятностей и математической статистики.

4. Формат обучения: лекции и семинарские занятия проводятся с использованием меловой доски.

5. Объем дисциплины (модуля) составляет 7 з.е., в том числе 136 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 116 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе				Самостоятельная работа обучающегося, часы (виды самостоятельной работы – эссе, реферат, контрольная работа и пр.)
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем)		Всего		
		*Занятия лекции	*Занятия семинарского типа			
1. Конечные вероятностные пространства. Дискретные случайные величины.	12	4	4	8	4	
2. Общее определение вероятностного пространства. Аксиоматика А.Н.Колмогорова.	6	2	2	4	2	
3. Условная вероятность и независимость в совокупности для множества событий.	6	2	2	4	2	
4. Случайные величины как измеримые отображения.	18	6	6	12	6	
5. Определение математического ожидания в общем случае. Свойства математических ожиданий.	12	4	4	8	4	
6. Независимость случайных величин.	12	4	4	8	4	
7. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 1.	2	0	0	0	2	
8. Виды сходимости последовательностей случайных величин.	6	2	2	4	2	
9. Законы больших чисел.	12	4	4	8	4	
10. Производящие и характеристические функции.	12	4	4	8	4	
11. Центральная предельная теорема.	6	2	2	4	2	
12. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 2.	2	0	0	0	2	
13. Условные математические ожидания.	6	2	2	4	2	

14. Статистическая структура. Статистика.	6	2	2	4	2
15. Точечные оценки.	12	4	4	8	4
16. Неравенство Рао-Крамера.	12	4	4	8	4
17. Метод моментов.	6	2	2	4	2
18. Достаточные статистики. Полные статистики.	12	4	4	8	4
19. Оценки максимального правдоподобия.	12	4	4	8	4
20. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа №3.	2	0	0	0	2
21. Доверительные интервалы.	12	4	4	8	4
22. Проверка гипотез.	18	6	6	12	6
23. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 4.	2	0	0	0	2
24. Критерии согласия хи-квадрат Пирсона для дискретных и абсолютно непрерывных распределений.	6	2	2	4	2
Промежуточная аттестация: зачет.	4	0	0	0	4
Промежуточная аттестация: устный экзамен	36	0	0	0	36
Итого	252	68	68	136	116

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

Контрольная работа № 1	
Вариант 1	Вариант 2
<p>1. Несколько раз бросается игральная кость. Какое событие более вероятно: {сумма выпавших очков четна} или {сумма выпавших очков нечетна}?</p> <p>2. Двое условились о встрече между 10 и 11 часами утра, причем договорились ждать друг друга не более 10 минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится.</p> <p>3. Имеются три урны с белыми и черными шарами, причем отноше-</p>	<p>1. Сорок участников турнира разбиваются на четыре равные группы. Найти вероятность того, что четыре сильнейших участника окажутся в разных группах.</p> <p>2. На отрезок наудачу бросают три точки, одну за другой. Какова вероятность того, что третья по счету точка упадет между двумя первыми?</p> <p>3. Два стрелка стреляют по мишени. Один из них попадает в цель в среднем в 5 случаях, а второй — в 8 случаях из 10. Перед выстрелом они бросают правильную монету для определения очередности.</p>

<p>ние числа белых шаров к числу черных равно p_1, p_2, p_3 для 1-й, 2-й, 3-й урн соответственно. Наудачу (с вероятностью $1/3$) выбирается урна и из нее шар. Какова вероятность того, что он белый?</p> <p>4. Случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $0.5(X+ X)$.</p>	<p>Посторонний наблюдатель знает условия стрельбы, но не знает, кто в данный момент стреляет. Вот он видит, что стрелок попал в цель. Какова вероятность того, что стрелял первый стрелок?</p> <p>4. Пусть X и Y - независимые случайные величины с непрерывными функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. Найти функцию распределения произведения XY.</p>
Контрольная работа № 2	
Контрольная работа № 2	
Вариант 1	
<p>1. Пусть X и Y -- независимые случайные величины, причем $X+Y$ принимает значения $0, 1, 2$ с вероятностями $1/3$ каждое. Доказать, что одна из величин X или Y имеет вырожденное распределение.</p> <p>2. Найти распределение, которому соответствует характеристическая функция $\exp(- t)$.</p> <p>3. Пусть X_1, X_2, \dots - Последовательность независимых случайных величин, причем X_n принимает значения $-n, 0$ и n с вероятностями $1/(2n^2), 1-1/n^2, 1/(2n^2)$ соответственно. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел.</p> <p>4. Найти приближенное значение для вероятности того, что число успехов в 100 испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $0,5$ лежит в интервале $(35,65)$.</p>	<p>Вариант 2</p> <p>1. Доказать, что функция $f(z)= z$ не является производящей функцией вероятностного распределения.</p> <p>2. Найти распределение, которому соответствует характеристическая функция $1/(1+t^2)$.</p> <p>3. Пусть X_1, X_2, \dots - Последовательность независимых случайных величин, причем X_n принимает значения $2^{-(n)}$ и $2^{-(n)}$ с вероятностями $1/2$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел.</p> <p>4. . Найти приближенное значение для вероятности того, что число успехов в 100 испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $0,5$ лежит в интервале $(47,53)$.</p>
Контрольная работа № 3	
Контрольная работа № 3	
Вариант 1	
<p>1. Пусть X_1, \dots, X_n независимы и имеют нормальное распределение $N(0, \theta^2)$. Доказать, что $T(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ -- эффективная оценка функции $\tau(\theta) = \theta^2$.</p>	<p>Вариант 2</p> <p>1. Пусть X_1, \dots, X_n независимы и имеют гамма-распределение $\Gamma(\frac{1}{\theta}, 1)$. Доказать, что $T(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ является эффективной оценкой θ.</p> <p>2. Пусть X_1, \dots, X_n независимы и имеют гамма-распределение</p>

<p>2. Пусть X_1, \dots, X_n независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[a, b]$. Найти оценку методом моментов для a и b по первым двум моментам.</p> <p>3. Пусть X_1, \dots, X_n независимы и</p> $X_i = \begin{cases} 1, \theta, \\ 2, \theta, \\ 3, 1 - 2\theta. \end{cases}$ <p>Найти одномерную достаточную статистику.</p> <p>4. Пусть X_1, \dots, X_n независимы и распределены с плотностью</p> $\begin{cases} \exp\{-(x - \theta)\}, & x > \theta, \\ 0, & x \leq \theta. \end{cases}$ <p>Найти оценку максимального правдоподобия для θ.</p>	<p>$\Gamma(\theta, \lambda)$. Найти оценку методом моментов для θ и λ по первым двум моментам.</p> <p>3. Пусть X_1, \dots, X_n независимы и</p> $X_i = \begin{cases} 1, \theta_1, \\ 2, \theta_2, \\ 3, 1 - \theta_1 - \theta_2. \end{cases}$ <p>Найти двумерную достаточную статистику.</p> <p>4. Пусть X_1, \dots, X_n независимы и имеют нормальное распределение $N(\theta, 2\theta)$, $\theta > 0$. Найти оценку максимального правдоподобия для θ.</p>
Контрольная работа № 4	
<p style="text-align: center;">Вариант 1</p> <p>1. Пусть X_1, \dots, X_n независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, \theta]$. Построить крайний доверительный интервал для θ с коэффициентом доверия α, основанный на центральной статистике $G(X, \theta) = \frac{\max X_i}{\theta}$.</p> <p>2. Пусть X_1, \dots, X_n независимы и имеют распределение Пуассона $P(\theta)$. Построить центральный доверительный интервал с коэффициентом доверия α, используя точечную оценку $T(X) = \bar{X}$.</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 2</p> <p>1. Пусть X_1, \dots, X_n независимы и имеют нормальное распределение $N(\theta, 1)$. Построить крайний доверительный интервал для θ с коэффициентом доверия α, основанный на центральной статистике</p> <p>2. Пусть X_1, \dots, X_n независимы и имеют нормальное распределение с параметрами m и 1. Построить центральный доверительный интервал для m с коэффициентом доверия α, используя точечную оценку $T(X) = \bar{X}$.</p> <p>3. Пусть X_1, \dots, X_n независимы и имеют биномиальное распределе-</p>

<p>3. Пусть X_1, \dots, X_n независимы и имеют плотность распределения</p> $f(x, \theta) = \begin{cases} \exp\{-(x - \theta)\}, & x > \theta, \\ 0, & x \leq \theta. \end{cases}$ <p>Построить наиболее мощный критерий размера α для проверки гипотезы $H_0: \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1: \theta = \theta_1 < \theta_0$. Найти мощность критерия.</p>	<p>ние $b(1, \theta), 0 < \theta < 1$. Построить равномерно наиболее мощный критерий размера α для проверки гипотезы $H_0: \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1: \theta < \theta_0$. Найти функцию мощности.</p>
---	--

Вопросы для индивидуального собеседования на устном экзамене.

1. Вероятностное пространство. Операции над событиями. Свойства вероятности. Условная вероятность. Независимость событий. Критерий независимости. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
2. Прямое произведение вероятностных пространств. Независимые испытания Бернулли.
3. Случайная величина. Порожденное и индуцированное вероятностные пространства.
4. Функция распределения, ее свойства. Дискретные, сингулярные и абсолютно непрерывные функции распределения и случайные величины. Плотность распределения.
5. Теорема Лебега о разложении функции распределения.
6. Моменты случайных величин. Их свойства.
7. Совокупности случайных величин. Совместная функция распределения. Независимость случайных величин. Критерии независимости.
8. Виды сходимости последовательностей случайных величин.
9. Неравенства Маркова и Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева.
10. Лемма Бореля-Кантелли. Неравенство Колмогорова.
11. Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова. Усиленный закон больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин.
12. Характеристические функции и их свойства.
13. Закон больших чисел в форме Хинчина. Центральная предельная теорема.
14. Условное математическое ожидание.
15. Статистическая структура. Выборка. Статистика. Порядковые статистики. Вариационный ряд. Выборочные моменты и выборочная функция распределения. Их свойства.
16. Точечная оценка. Несмещенность, состоятельность, оптимальность. Теорема о единственности оптимальной оценки.
17. Функция правдоподобия. Достаточные статистики, полные статистики. Теорема факторизации.

18. Неравенство Рао-Крамера. Эффективные оценки.
19. Теорема Рао-Блекуэлла-Колмогорова. Оптимальность оценок являющихся функцией полной достаточной статистики.
20. Метод моментов. Свойства оценок, полученных методом моментов.
21. Метод максимального правдоподобия. Свойства оценок максимального правдоподобия.
22. Доверительные интервалы. Методы центральной статистики и использования точечной оценки.
23. Проверка гипотез. Лемма Неймана-Пирсона.
24. Критерии согласия Колмогорова и χ -квадрат.

Экзаменационный билет состоит из двух вопросов и задачи, например:

1. Случайная величина. Порожденное и индуцированное вероятностные пространства. Функция распределения, ее свойства.
2. Функция правдоподобия. Достаточные статистики, полные статистики. Теорема факторизации.
3. Пусть X имеет биномиальное распределение $b(n, \frac{1}{2})$. Найти оценку максимального правдоподобия для n .

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)				
Оценка РО и соответствующие виды оценочных средств	2	3	4	5
Знания <i>Экзамен</i>	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения <i>Контрольная работа, зачет</i>	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержательные пробелы (допускает неточности принципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) <i>Экзамен</i>	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)	
Результаты обучения	Компетенция, с которой связано достижение результата обучения
<p>Знать: основные задачи, решаемые в рамках теории вероятностей и математической статистики, и методы их решения;</p> <p>Уметь: применять на практике методы вероятностного и статистического анализа к задачам физики, геологии, биологии, финансовой математики и других разделов науки и техники;</p> <p>Владеть: навыками оптимального выбора методов и параметров при решении задач исследования стохастических явлений, анализа и обработки данных.</p>	ОПК-1.Б
<p>Знать: основные понятия и наиболее важные задачи, решаемые в рамках прикладных исследований, связанных со статистическим анализом данных;</p> <p>Уметь: применять на практике методы статистического и вероятностного анализа, правильно интерпретировать результаты решения задач оценки неизвестных параметров и проверки гипотез;</p> <p>Владеть: ключевыми методами решения задач анализа вероятностных свойств случайных экспериментов и статистического анализа данных.</p>	ОПК-2.Б
<p>Знать: основные методы анализа случайных процессов, описывающих реальные процессы и явления;</p> <p>Уметь: решать базовые задачи анализа и проверки гипотез и разрабатывать процедуры принятия решений на основе этих методов;</p> <p>Владеть: навыками оптимального выбора методов и параметров при решении задач анализа случайных процессов, описывающих реальные процессы и явления.</p>	ПК-2.Б

8. Ресурсное обеспечение:

Основная литература

1. Ю.В. Прохоров, Л.С. Пономаренко. Лекции по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Изд-во Московского университета, 2012.
2. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей. – М.: Наука, 1986.
3. Чибисов Д.М., Пагурова В.И. Задачи по математической статистике. – М.: Изд-во МГУ, 1990.

Дополнительная литература

1. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1989.
2. Гнеденко Б.В.. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1990.
3. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1982.
4. Феллер В.. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир. 1984.
5. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1992.

Информационные справочные системы:

- 1) <https://elibrary.ru/>
- 2) <http://mathworld.wolfram.com/>

Материально-техническое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

9. Язык преподавания - русский.

10. Преподаватели: профессор факультета ВМК МГУ В.Ю. Королев.

11. Авторы программы: профессора факультета ВМК МГУ В.Ю. Королев, В.В. Ульянов, В.Г. Ушаков.