Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета ВМК МГУ
_____________ **/И.А.Соколов/**
«24» 05 _______________ **2023 г.**

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Наименование дисциплины (модуля):

Уравнения математической физики

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки (специальность):

02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Направленность (профиль) ОПОП:

Общий профиль

Форма обучения:

очная

Москва 2023

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ бакалавриата, магистратуры, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки по направлениям 02.03.02, 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

1. Цели и задачи освоения дисциплины

В процессе освоения дисциплины студенты должны изучить основные задачи для уравнений математической физики, овладеть методами их решений и получить представление от использования уравнений математической физики при решении практических задач.

2. Место дисциплины в структуре ООП ВПО бакалавриата

Дисциплина относится к базовой части профессионального цикла. Содержание курса определяется образовательным стандартом МГУ высшего профессионального образования по направлению 010400 Прикладная математика и информатика (1 ступень бакалавриата двухуровневой программы "интегрированный магистр" непрерывной подготовки).
Дисциплина "Уравнения математической физики" существенным образом базируется на дисциплинах "Математический анализ" и "Обыкновенные дифференциальные уравнения", используя как теоритические, так и методологические концепции этих дисциплин.
Дисциплина "Уравнения математической физики" имеет базовое значение для подготовки по направлению "Прикладная математика и информатика", поскольку в результате её освоения обучающиеся приобретают навыки применения математических методов для описания и исследования различных естественнонаучных процессов и явлений.

3. Требования к результатам освоения содержания дисциплины.
Компетенции обучаемого, формируемые в результате освоения дисциплины.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВПО по данному направлению:

a) **общекультурных (ОК):** владеть основными методами построения и изучения математических моделей в естествознании;
b) **профессиональных (ПК):** знание аналитических методов решения простейших задач для линейных уравнений в частных производных как средства тестирования реалистических моделей, требующих применения численных методов (ПК-15).

В результате освоения дисциплины студент должен:

знать – постановки задач для уравнений параболического, эллиптического и гиперболического типов и методы их исследования (ОК-10);

уметь применять на практике методы решения задач математической физики в ограниченных и неограниченных областях (ОК-10);

понимать и применять на практике методы исследования задач математической физики и методы их решения;

уметь - находить, анализировать и контекстно обрабатывать научно-техническую информацию, связанную с уравнениями математической физики (ОК-10);

- демонстрировать способность к анализу и синтезу в области математической физики (ОК-10);
- демонстрировать способность к письменной и устной коммуникации на русском языке (ОК-14);
- очно представить математические знания в устной форме (ПК-4);

владеть навыками решения задач математической физики;

- методами математической физики для решения различных задач (ПК-15);
- навыками постановки новых задач для уравнений математической физики (ПК-2).

«**Уравнения математической физики**» - базовый (обязательный) курс для студентов 3 курса, читается в 5 семестре (естественнонаучный цикл).

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы (145 часов). Лекции – 36 часов, семинары – 36 часов. Экзамен в 5 семестре.

4. Структура дисциплины (модуля) и ее место в учебном плане

4.1 Тематический план курса (для «интегрированного магистра»)

№	Название темы	Аудиторные занятия (часы)		Самостоятельная работа студента
		лекции	семинары	
	Пятый семестр			
1.	Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка	2	2	4
2.	Уравнения параболического типа	10	12	20
3.	Уравнения эллиптического типа	12	10	24
4.	Уравнения гиперболического типа	12	12	24
	Итого:	**36**	**36**	**73**

4. 2. Структура дисциплины по видам работ

№ п/п	Раздел Дисциплины	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
			лекц	прак	Сам	
1	Классификация уравнений с частными производными.	1	2	2	4	Контроль домашнего задания
2	Задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.	2-4	8	8	12	Контроль домашнего задания
3	Задачи для уравнения теплопроводности на прямой и на полупрямой.	5-6	4	4	9	Контрольная работа № 1.
4.	Гармонические функции. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа и Пуассона.	7-11	10	10	20	Контроль домашнего задания
5.	Потенциалы и их применение.	12	2	0	4	
6.	Задача Коши для уравнения колебаний на прямой. Задачи для уравнения колебаний на полупрямой.	13-14	4	6	8	Контроль домашнего задания
7.	Задачи для уравнения колебаний на отрезке.	15-16	4	6	8	Контрольная работа № 2.
8.	Задачи с данными на характеристиках.	17	2	0	4	
9.	Сопряженные дифференциальные операторы. Метод Римана.	18	2	0	4	

4.3. Лабораторные работы

Лабораторные работы не предусмотрены учебным планом.

4.4. Курсовой проект (курсовая работа, расчетно-графическое задание, реферат, контрольная работа)

Курсовой проект не предусмотрен учебным планом.

4.5. Консультации

Лектор курса, преподаватели, ведущие практические занятия, периодически проводят консультации по дисциплине.

4.6. Интерактивные образовательные технологии, используемые в аудиторных занятиях

Используются традиционные технологии проведения лекций и практических занятий в аудиториях. Все методические материалы для прохождения дисциплины отражены на сайте в Интернете.

5. Содержание дисциплины «Уравнения математической физики.

5.1. Содержание лекций.

1. **Введение**

Основные понятия об уравнениях математической физики. Классификация уравнений в частных производных второго порядка.

2. **Уравнения параболического типа.**

Уравнения теплопроводности и диффузии. Постановка основных задач.

Метод разделения переменных решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности. Существование решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности.

Принцип максимального значения для уравнения теплопроводности. Теоремы единственности и устойчивости решения первой начально-краевой задачи. Единственность решения общей начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Задача Коши для уравнения теплопроводности и формула для ее решения. Единственность решения задачи Коши. Метод продолжения решения начально-краевых задач на полупрямой.

3. **Уравнения эллиптического типа.**

Уравнения Лапласа и Пуассона. Примеры физических полей, описываемых этими уравнениями. Постановка внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана.

Формулы Грина. Свойства гармонических функций. Принцип максимального значения. Функция Грина.

Единственность и устойчивость решения внутренней задачи Дирихле. Внешние задачи Дирихле, условия на бесконечности, единственность решения. Единственность решения внутренней задачи Неймана и необходимое условие ее разрешимости.

Потенциалы простого и двойного слоя. Потенциал двойного слоя с единичной плотностью. Скачек потенциала двойного слоя. Сведение внутренней задачи Дирихле к интегральному уравнению Фредгольма 2 рода. Существование решения внутренней задачи Дирихле.

4. **Уравнения гиперболического типа.**

Уравнение колебаний, примеры физических процессов. Постановка основных задач.

Задача Коши для уравнения колебаний, формула Даламбера. Существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши. Метод продолжения решения начально-краевых задач для уравнения колебаний на полупрямой.

Метод разделения переменных решения начально-краевых задач для уравнения колебаний, существование решения. Интеграл энергии, единственность решения начально-краевых задач для уравнения колебаний.

Задача с данными на характеристиках. Эквивалентная система интегральных уравнений. Теоремы существования и единственности решения задачи с данными на характеристиках.

Сопряженные дифференциальные операторы, примеры. Метод Римана.

5.2. Практика.

План практических занятий.

Тема1.Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

1 занятие. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка линейных относительно старших производных, основанная на законе инерции квадратичной формы. Характеристики. Характеристическое уравнение. Приведение к канонической форме уравнения с двумя независимыми переменными.

№№ 1.1 – 1.5, 1.8, 1.21, 1.26; 11.1 – 11.6, 11.7.

Дома: №№ 1.6, 1.9, 1.11, 1.23, 1.25; 11.8.

Дополнительно: №№ 1.7, 1.10, 1.14, 1.22, 1.24.

Тема 2. Уравнение теплопроводности.

2 занятие. Уравнение теплопроводности с одной пространственной переменной. Начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и их редукция.

№№ 2.1, 2.3, 2.5, 2.7 – 2.9, 2.17.

Дома: №№ 2.2, 2.6, 2.10 – 2.12, 2.15, 2.16.

Дополнительно: №№ 2.4, 2.13, 2.14, 2.18, 2.19.

3 занятие. Решение начально-краевых задач на отрезке для однородного уравнения теплопроводности методом разделения переменных. Задача Штурма-Лиувилля, её собственные значения и собственные функции.

№№ 3.1, 3.7, 3.8, 3.10, 3.12, 3.13.

Дома: №№ 3.2, 3.3, 3.4, 3,5, 3.6, 3.9, 3.11.

Дополнительно: №№ 3.14, 3.15.

4 занятие. Решение начально-краевых задач на отрезке для неоднородного уравнения теплопроводности.

№№ 4.1, 4.2, 4.4, 4.7, 4.12, 4.21, 4.24, 4.25.

Дома: №№ 4.3, 4.5, 4.6, 4.9, 4.13, 4.19, 4.22.

Дополнительно: №№ 4.8, 4.10, 4.11, 4.14 – 4.16, 4.18, 4.20, 4.23.

5 занятие. Задачи для уравнения теплопроводности на прямой.

№№ 5.1, 5.3, 5.6, 5.11 – 5.13, 5.16.

Дома: №№ 5.2, 5.4, 5.7, 5,10, 5.14, 5.15.

Дополнительно: №№ 5.5, 5.8, 5.9, 5.17.

6 занятие. Задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой. Метод продолжения.

№№ 5.18, 5.19, 5.21, 5.23.

Дома: №№ 5.20, 5.22, 5.25.

Дополнительно: №№ 5.24, 5.26.

7 занятие. Контрольная работа №1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных. Задачи для уравнения теплопроводности.

8 занятие. Разбор задач из контрольной работы №1. Проверка домашних заданий по темам 1, 2.

Тема 3. Уравнения Лапласа и Пуассона.

9 занятие. Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона методом разделения переменных в полярной системе координат в двумерных областях простой геометрической формы.

№№ 7.1, 7.2, 7.4, 7.9, 7.11, 7.13, 7.15, 7.17.

Дома: №№ 7.3, 7.5 -7.8, 7.12, 7.14, 7.16, 7.18.

Дополнительно: №№ 6.1, 6.5, 6.13 – 6.16; 7.10.

10 занятие. Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона методом разделения переменных в декартовой системе координат в двумерных областях простой геометрической формы.

№№ 7.19, 7.20, 7.27.

Дома: №№ 7.21, 7.22, 7.26.

Дополнительно: №№ 7.25.

11 занятие. Решение задач Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона методом функций Грина. Построение функции Грина методом зеркальных изображений.

№№ 8.4, 8.5, 8.10, 8.9, 8.13.

Дома: №№ 8.6 – 8.8, 8.11, 8.12.

Дополнительно: №№ 8.1 – 8.3, 8.14, 8.15.

12 занятие. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в односвязной области на плоскости методом конформных отображений.

№№ 9.2, 9.4, 9.5, 9.13, 9.19, 9.20, 9.21.

Дома: №№ 9.1, 9.3, 9.8, 9.9, 9.18, 9.22.

Дополнительно: №№ 9.6, 9.7, 9.10 – 9.12, 9.14 – 9.17.

Тема 4. Уравнение колебаний.

13 занятие. Решение задачи Коши для уравнения колебаний на прямой методом распространяющихся волн. Формула Даламбера.

№№ 12.2 - 12.4, 12.7.

Дома: №№ 12.1, 12.5, 12.6, 12.20.

Дополнительно: №№ 10.1, 10.8.

14 занятие. Решение начально-краевых задач для уравнения колебаний на полупрямой. Метод продолжения.

№№ 12.8 – 12.10, 12.13, 12.14, 12.16, 12.17.

Дома: №№ 12.11, 12.12, 12.15, 12.18.

Дополнительно: №№ 10.6; 12.19.

15 занятие. Решение начально-краевых задач для уравнения свободных колебаний на отрезке методом разделения переменных.

№№ 10.7; 13.1, 13.3.

Дома: №№ 10.2 – 10.4; 13.2, 13.4.

Дополнительно: №№ 10.5, 10.9.

16 занятие. Решение начально-краевых задач для уравнения вынужденных колебаний на отрезке методом разделения переменных.

№№ 13.5, 13.6, 13.9, 13.11, 13.7.

Дома: №№ 13.8, 13.10, 13.12.

Дополнительно: №№ 13.14 - 13.16.

17 занятие. Контрольная работа №2. Задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Задачи для уравнения колебаний.

18 занятие. Разбор задач из контрольной работы №2. Проверка домашних заданий по темам 3, 4.

5.3. Список дополнительных задач.

1. $u_{xy} = \alpha \cdot u_x + \beta \cdot u_y$, $\alpha = const$, $\beta = const$. Выполните замену неизвестной функции: $u(x,y) = e^{\mu x + \nu y} \cdot v(x,y)$, где μ и ν – параметры. Можно ли выбрать μ и ν так, чтобы в канонической форме уравнения для новой функции $v(x,y)$ не содержались её первые производные?

2. Найдите функцию $u(x,t)$, являющуюся решением задачи
$u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$;
$u(0,t) = 0$, $u(l,t) = u_0 \cdot l$, $t > 0$; $u_0 = const$;
$u(x,0) = u_0 \cdot x$, $0 \le x \le l$.

3. Найдите функцию $u(x,t)$, являющуюся решением задачи
$u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$;
$a^2 = \dfrac{k}{C\rho}$, $k = const > 0$, $C = const > 0$, $\rho = const > 0$;
$-k \cdot u_x(0,t) = q$, $-k \cdot u_x(l,t) = q$, $t > 0$; $q = const > 0$;

$$u(x,0)=\frac{q}{k}\left(\frac{l}{2}-x\right),\quad 0\le x\le l\,.$$

4. Найдите функцию $u(x,t)$, являющуюся решением задачи
   $u_t=a^2u_{xx}$, $0<x<l$, $t>0$;
   $a^2=\dfrac{k}{C\rho}$, $k=const>0$, $C=const>0$, $\rho=const>0$;
   $-k\cdot u_x(0,t)=q$, $-k\cdot u_x(l,t)=q$, $t>0$; $q=const>0$;
   $u(x,0)=0$, $0\le x\le l$.
   Найдите $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)$.

5. Проверьте, что для любого $T>0$ функция $u(x,t)=x^2+2a^2t$ удовлетворяет уравнению $u_t=a^2u_{xx}$ на множестве $Q=\{0<x<l,\ 0<t\le T\}$ и непрерывна в замкнутом множестве $\overline{Q}=\{0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$. В каких точках $\overline{Q}$ функция $u(x,t)$ достигает своего максимума; своего минимума?

6. Функция $u(x,t)$ является решением задачи
   $u_t=a^2u_{xx}$, $0<x<+\infty$, $t>0$;
   $u(0,t)=u_0=const$, $t>0$;
   $u(x,0)=\dfrac{u_0}{2}$, $0\le x<+\infty$.
   Постройте график функции $u(x_0,t)$, $x_0=const\ne 0$.

7. Проверьте, что решением задачи без начального условия
   $u_t=a^2u_{xx}$, $0<x<+\infty$, $t>-\infty$; $a=const>0$;
   $u(0,t)=u_0\cos(\omega\cdot t)$, $t>-\infty$; $u_0=const$, $\omega=const\ge 0$;
   являются функции
   $$u_1(x,t)=u_0\exp\left\{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}\cdot\frac{x}{a}\right\}\cos\left(\omega\cdot t-\sqrt{\frac{\omega}{2}}\cdot\frac{x}{a}\right),$$
   $$u_2(x,t)=u_0\exp\left\{\sqrt{\frac{\omega}{2}}\cdot\frac{x}{a}\right\}\cos\left(\omega\cdot t+\sqrt{\frac{\omega}{2}}\cdot\frac{x}{a}\right).$$
   Для выделения единственного решения задачи воспользуйтесь условием его ограниченности.

5.4. Список теоретических задач.

1. Найти множество точек на плоскости, в которых уравнение
   $$xu_{xx}-2yu_{xy}+u_{yy}=0$$
   является уравнением эллиптического, гиперболического или параболического типа.
2. Найти множество точек на плоскости, в которых уравнение
   $$xu_{xx}-(y+|y|)\cdot u_{yy}+u_y=0$$
   является уравнением эллиптического, гиперболического или параболического типа.
3. Найти множество точек на плоскости, в которых уравнение
   $$xu_{xx}+yu_{yy}=0$$

является уравнением эллиптического, гиперболического или параболического типа.

4. Найти множество точек на плоскости, в которых уравнение
$$y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$$
является уравнением эллиптического, гиперболического или параболического типа.

5. Найти множество точек на плоскости, в которых уравнение
$$x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$$
является уравнением эллиптического, гиперболического или параболического типа.

6. Функция $u(x,t)$ является решением задачи
$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 2,\ 0 < t \le 4,\ a \text{ – любое,}$$
$$u(0,t) = t(4-t),\ \ 0 \le t \le 4,$$
$$u(2,t) = 2\sin 3t,\ \ 0 \le t \le 4,$$
$$u(x,0) = \sin 4\pi x,\ \ 0 \le x \le 2.$$
Найти наибольшее и наименьшее значение $u(x,t)$ на множестве $Q = \{(x.t).\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le t \le 4\}$. Ответ обосновать.

7. Функция $u(x,t)$ является решением задачи
$$u_t(x,t) = 4u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \le 2,$$
$$u(0,t) = 1 - e^t,\ \ 0 \le t \le 2,$$
$$u(1,t) = 1 - \cos 6t,\ \ 0 \le t \le 2,$$
$$u(x,0) = \sin 2\pi x,\ \ 0 \le x \le 1.$$
Найти наибольшее и наименьшее значение $u(x,t)$ на множестве $Q = \{(x.t).\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le 2\}$. Ответ обосновать.

8. Функция $u(x,t)$ является решением задачи
$$u_t(x,t) = 9u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < \pi,\ 0 < t \le 1,$$
$$u(0,t) = t + 1,\ \ 0 \le t \le 1,$$
$$u(\pi,t) = \cos t,\ \ 0 \le t \le 1,$$
$$u(x,0) = \cos x,\ \ 0 \le x \le \pi.$$
Найти наибольшее и наименьшее значение $u(x,t)$ на множестве $Q = \{(x.t).\ 0 \le x \le \pi,\ 0 \le t \le 1\}$. Ответ обосновать.

9. Функция $u(x,t)$ является решением задачи
$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},\ 0 < t \le 2,\ a \text{ – любое,}$$
$$u(0,t) = -te^{-t},\ \ 0 \le t \le 2,$$
$$u\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 3\sin t,\ \ 0 \le t \le 2,$$
$$u(x,0) = \sin 2x,\ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$$
Найти наибольшее и наименьшее значение $u(x,t)$ на множестве $Q = \left\{(x.t).\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le t \le 2\right\}$. Ответ обосновать.

10. Функция $u(x,t)$ является решением задачи
$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \le 2, a \text{ – любое,}$$

$$u(0,t)=-t,\quad 0\le t\le 2,$$
$$u(1,t)=\sin 2t,\quad 0\le t\le 2,$$
$$u(x,0)=5\sin \pi x,\quad 0\le x\le 1.$$

Найти наибольшее и наименьшее значение $u(x,t)$ на множестве $Q=\{(x.t).\, 0\le x\le 1,\, 0\le t\le 2\}$. Ответ обосновать.

11. Доказать, что решение следующей задачи неединственно. Найти функцию $u(x,t)\in C^{2,1}\{[0,\pi]\times[0,T]\}$ такую, что
$$u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<\pi,\ 0<t\le T,\ a \text{ – любое},$$
$$u(0,t)=t,\quad u(\pi,t)=1-\cos t,\ 0\le t\le T.$$

12. Доказать, что решение следующей задачи неединственно. Найти функцию $u(x,t)\in C^{2,1}\{[0,\pi]\times[0,T]\}$ такую, что
$$u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<1,\ 0<t\le T,\ a \text{ – любое},$$
$$u(0,t)=t,\quad u(1,t)=\sin \pi t,\ 0\le t\le T.$$

13. Доказать, что решение следующей задачи неединственно. Найти функцию $u(x,t)\in C^{2,1}\{[0,\pi]\times[0,T]\}$ такую, что
$$u_t(x,t)=4u_{xx}(x,t),\quad 0<x<1,\ 0<t\le T,$$
$$u(0,t)=t,\quad u(1,t)=1-e^t,\ 0\le t\le T.$$

14. Доказать, что решение следующей задачи неединственно. Найти функцию $u(x,t)\in C^{2,1}\{[0,\pi]\times[0,T]\}$ такую, что
$$u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<\pi,\ 0<t\le T,\ a \text{ – любое},$$
$$u(0,t)=\sin t,\quad u(\pi,t)=\sin 2t,\ 0\le t\le T.$$

15. Доказать, что решение следующей задачи неединственно. Найти функцию $u(x,t)\in C^{2,1}\{[0,\pi]\times[0,T]\}$ такую, что
$$u_t(x,t)=16u_{xx}(x,t),\quad 0<x<2,\ 0<t\le T,$$
$$u(0,t)=\sin\frac{\pi}{2}t,\quad u(2,t)=1-\cos \pi t,\ 0\le t\le T.$$

16. Функция $u(x,t)$ является решением задачи
$$u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<l,\ t>0,\ a \text{ – любое},$$
$$u_x(0,t)=0,\quad u_x(l,t)=0,\ t>0,$$
$$u(x,0)=2-\sin\frac{\pi}{l}x,\ 0\le x\le l.$$

Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

17. Функция $u(x,t)$ является решением задачи
$$u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<\pi,\ t>0,\ a \text{ – любое},$$
$$u_x(0,t)=0,\quad u_x(\pi,t)=0,\ t>0,$$
$$u(x,0)=1+\cos 2x,\ 0\le x\le \pi.$$

Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

18. Функция $u(x,t)$ является решением задачи
$$u_t(x,t)=4u_{xx}(x,t),\quad 0<x<\pi,\ t>0,$$
$$u_x(0,t)=0,\quad u_x(l,t)=0,\ t>0,$$
$$u(x,0)=\cos x+\cos 2x,\ 0\le x\le \pi.$$

Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

19. Функция $u(x,t)$ является решением задачи

$$u_t(x,t)=9u_{xx}(x,t),\quad 0<x<1,\ t>0,$$
$$u_x(0,t)=0,\quad u_x(l,t)=0,\ t>0,$$
$$u(x,0)=1+\sin\pi x+\cos 2\pi x,\ 0\le x\le 1.$$

Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

20. Функция $u(x,t)$ является решением задачи

$$u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<\pi,\ t>0,\ a \text{ – любое},$$
$$u_x(0,t)=0,\quad u_x(l,t)=0,\ t>0,$$
$$u(x,0)=3+\sin x,\ 0\le x\le \pi.$$

Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

21. Найти значения параметров a, b, c при которых функция

$$u(x,y)=ax^2y^2+bx^4+2y^4+cy$$

будет гармонической.

22. Найти значения параметров a, b, c при которых функция

$$u(x,y)=ax^2y^2+4x^4+by^4+cx+ay+c$$

будет гармонической.

23. Найти значения параметров a, b, c при которых функция

$$u(x,y)=ax^2y^2+bx^4+6y^4+cy^2+4x^2+c$$

будет гармонической.

24. Найти значения параметров a, b, c при которых функция

$$u(x,y)=2x^2y^2+bx^4+ay^4+y+c$$

будет гармонической.

25. Найти значения параметров a, b, c при которых функция

$$u(x,y)=2ax^2y^2+bx^4+2y^4+cy+a$$

будет гармонической.

26. Доказать, что для функции $u(x,y)=\cos(kx)\cdot sh(ky)+\sin(px)\cdot ch(py)$ справедлива формула среднего значения.

27. Доказать, что для функции $u(x,y)=x^2-y^2+xy$ справедлива формула среднего значения.

28. Доказать, что для функции $u(x,y,z)=\sin 3x\cdot\sin 4y\cdot sh5z$ справедлива формула среднего значения.

29. Доказать, что для функции $u(x,y)=e^y\cos x+e^{-y}\sin x$ справедлива формула среднего значения.

30. Доказать, что для функции $u(x,y)=4xy+x^2-y^2+2x+y+3$ справедлива формула среднего значения.

31. Функция $u(x,y)$ является решением внутренней задачи Дирихле

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\quad x^2+y^2<1,$$
$$u(x,y)=3-2y,\ \ x^2+y^2=1.$$

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $u(x,y)$ в круге $x^2+y^2=1$.

32. Функция $u(x,y)$ является решением внутренней задачи Дирихле

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\quad x^2+y^2<1,$$
$$u(x,y)=5+3y,\ \ x^2+y^2=1.$$

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $u(x,y)$ в круге $x^2+y^2=1$.

33. Функция $u(x,y)$ является решением внутренней задачи Дирихле

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\quad x^2+y^2<1,$$
$$u(x,y)=4-5x,\quad x^2+y^2=1.$$

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $u(x,y)$ в круге $x^2+y^2=1$.

34. Функция $u(x,y)$ является решением внутренней задачи Дирихле

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\quad x^2+y^2<1,$$
$$u(x,y)=6+2x,\quad x^2+y^2=1.$$

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $u(x,y)$ в круге $x^2+y^2=1$.

35. Функция $u(x,y)$ является решением внутренней задачи Дирихле

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\quad x^2+y^2<1,$$
$$u(x,y)=x+4y,\quad x^2+y^2=1.$$

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $u(x,y)$ в круге $x^2+y^2=1$.

6. *Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации*

6.1. *Контрольные работы.*

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1.

КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.

1. Найдите области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнения

$$\mathrm{sign}\,y\cdot u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=0$$

и в каждой из этих областей приведите его к канонической форме.

2. Найдите функцию $u(x,t)$, являющуюся решением задачи

$$u_t=u_{xx}+x,\ 0<x<\pi,\ t>0;$$
$$u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0,\ t>0;$$
$$u(x,0)=\sin(2x),\ 0\le x\le\pi.$$

3. Найдите функцию $u(x,t)$, являющуюся решением задачи

$$u_t=u_{xx}-\frac{1}{t+1}+10e^{-6t}\cdot\sin(4x),\ -\infty<x<+\infty,\ t>0;$$
$$u(x,0)=3+2\sin(4x),\ -\infty<x<+\infty.$$

4. Найдите функцию $u(x,t)$, являющуюся решением задачи

$$u_t=u_{xx},\ 0<x<+\infty,\ t>0;$$
$$u_x(0,t)=0,\ t>0;$$
$$u(x,0)=e^{-x},\ 0<x<+\infty.$$

Выразите $u(x,t)$ через функцию ошибок $erf(z)$. Найдите $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)$.

5. Запишите общий вид решения задачи

$u_t = a^2 u_{xx} - bu + f(x,t)$, $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$; $b = const > 0$;
$u(x,0) = \varphi(x)$, $-\infty < x < +\infty$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2. ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА. ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

1. Найдите функцию $u(r,\varphi)$, являющуюся решением задачи

$\Delta u = 0$, $0 < r < 2$, $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$, r, φ – полярные координаты на плоскости;

$u(r,0) = 0$, $u\left(r, \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$, $0 \le r \le 2$;

$u(2,\varphi) = 3\sin(12\varphi) - 4\sin(16\varphi)$, $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$.

2. Найдите функцию $u(x,y)$, являющуюся решением задачи

$\Delta u = \cos\left(\dfrac{\pi x}{a} - \dfrac{\pi y}{b}\right) - \cos\left(\dfrac{\pi x}{a} + \dfrac{\pi y}{b}\right)$, $|x| < a$, $|y| < b$,

x, y – декартовы координаты на плоскости;

$u(-a,y) = \cos\dfrac{3\pi y}{2b}$, $u(a,y) = \sin\dfrac{8\pi y}{b}$,

$u(x,-b) = -\sin\dfrac{5\pi x}{a}$, $u(x,b) = -\cos\dfrac{7\pi x}{2a}$.

3. Методом зеркальных изображений постройте функцию Грина задачи Дирихле в области $x < 0$, $y > 0$, $z < 0$ в пространстве $Oxyz$.

4. Найдите функцию $u(x,t)$, являющуюся решением задачи

$u_{tt} = \dfrac{1}{4} u_{xx}$, $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$;

$u(x,0) = 0$, $\quad u_t(x,0) = \begin{cases} 4 - x^2, & |x| \le 2; \\ 0, & |x| \ge 2. \end{cases}$

Постройте график функции $u(1,t)$.

5. Найдите функцию $u(x,t)$, являющуюся решением задачи

$9u_{tt} = u_{xx}$, $0 < x < +\infty$, $t > 0$;

$u(0,t) = e^t$, $t > 0$;

$u(x,0) = e^{-3x}$, $u_t(x,0) = e^{-3x}$, $0 \le x < +\infty$.

6. Найдите функцию $u(x,t)$, являющуюся решением задачи

$u_{tt} = u_{xx} + 2\sin\dfrac{3x}{2}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$;

$u(0,t) = 0$, $u_x(\pi,t) = 0$, $t > 0$;

$u(x,0) = \sin\dfrac{x}{2} - \sin\dfrac{3x}{2}$, $u_t(x,0) = 0$, $0 \le x \le \pi$.

6.2. Оценочные средства для текущего контроля и промежуточной аттестации самостоятельной работы студентов. Коллоквиум.

Коллоквиум не предусмотрен учебным планом.

6.3. Оценочные средства для текущего контроля и промежуточной аттестации самостоятельной работы студентов. Контроль домашнего задания (КДЗ).

КДЗ №1. Проверка освоения метода приведения к каноническому виду дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

КДЗ №2. Проверка освоения метода разделения переменных для решения разнообразных начально-краевых задачах для уравнения теплопроводности на отрезке.

КДЗ №3. Проверка освоения методов решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой и полупрямой.

КДЗ №4. Проверка освоения методов решения задач Дирихле и Неймана.

КДЗ №5. Проверка освоения методов решения задачи Коши для уравнения колебаний на прямой и полупрямой.

КДЗ №6. Проверка освоения метода разделения переменных для решения разнообразных начально-краевых задачах для уравнения колебаний на отрезке.

6.4. Оценочные средства для текущего контроля и промежуточной аттестации самостоятельной работы студентов.

Осуществляется при помощи контроля домашних заданий.

7. Оценочные средства рубежного контроля.

7.1. Оценочные средства рубежного контроля. Зачетная работа.

Зачетная работа учебным планом не предусмотрена.

7.2. Оценочные средства рубежного контроля. Список определений и теорем.

1. Определения канонических форм дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка линейных относительно старших производных, зависящих от двух независимых переменных.
2. Определение классического решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.
3. Определение классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.
4. Определения фундаментальных решений уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости.
5. Определение функции Грина для задачи Дирихле.
6. Определения потенциалов простого слоя и двойного слоя.
7. Определение интеграла энергии.
8. Определение сопряженного дифференциального оператора.
9. Теорема существования решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.
10. Принцип максимума для уравнения теплопроводности.
11. Теорема единственности решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.
12. Теорема устойчивости решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.
13. Теорема единственности решения общей начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.
14. Теорема существования решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.
15. Свойства гармонических функций.

16. Принцип максимума для гармонических функций.
17. Теорема единственности решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
18. Теорема устойчивости решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
19. Необходимое условие разрешимости внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа.
20. Теорема единственности решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа.
21. Теоремы единственности решений внешних задач Дирихле для уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости.
22. Свойства функции Грина для задачи Дирихле.
23. Теорема существования решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
24. Теорема существования решения задачи Коши для уравнения колебаний.
25. Теорема единственности решения задачи Коши для уравнения колебаний.
26. Теорема устойчивости решения задачи Коши для уравнения колебаний.
27. Теорема существования решения первой начально-краевой задачи для уравнения колебаний на отрезке.
28. Теорема единственности решения первой начально-краевой задачи для уравнения колебаний на отрезке.
29. Теорема существования решения задачи для уравнения гиперболического типа с данными на характеристиках.
30. Теорема единственности решения задачи для уравнения гиперболического типа с данными на характеристиках.

7.3. Оценочные средства рубежного контроля. Вопросы к экзамену.

1. Классификация уравнений с частными производными второго порядка.
2. Вывод уравнения теплопроводности в пространстве.
3. Уравнение теплопроводности с одной пространственной переменной. Постановка основных задач.
4. Метод разделения переменных для доказательства существования решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.
5. Принцип максимума для уравнения теплопроводности.
6. Единственность и устойчивость решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.
7. Единственность решения общей начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.
8. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.
9. Существование решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.
10. Метод продолжения решения первой и второй начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой.
11. Уравнения Лапласа и Пуассона. Постановка основных задач. Фундаментальные решения уравнения Лапласа.
12. Первая и вторая формулы Грина. Третья (основная) формула Грина.
13. Свойства гармонических функций.
14. Принцип максимума для гармонических функций.
15. Единственность и устойчивость решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
16. Единственность решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа и необходимое условие ее разрешимости.
17. Единственность решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двух и трехмерных случаях.
18. Свойства функции Грина для задачи Дирихле.
19. Потенциалы простого и двойного слоя. Потенциал двойного слоя с единичной плотностью.
20. Сведение внутренней задачи Дирихле к интегральному уравнению Фредгольма 2 рода.
21. Существование решения внутренней задачи Дирихле.

22. Уравнение колебаний. Постановка основных задач.
23. Формула Даламбера. Существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши для уравнения колебаний.
24. Метод разделения переменных для доказательства существования решения первой начально-краевой задачи для уравнения колебаний.
25. Интеграл энергии. Теоремы единственности решения начально-краевых задач для уравнения колебаний.
26. Задачи с данными на характеристиках. Эквивалентная система интегральных уравнений.
27. Существование решения задачи с данными на характеристиках.
28. Единственность решения задачи с данными на характеристиках.
29. Сопряженный дифференциальный оператор. Примеры.
30. Метод Римана.

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

а) основная литература:

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.—М.: Наука. Изд-во Москов. Ун-та. 2004.–798 с.
2. Захаров Е.В., Дмитриева И.В., Орлик С.И. Уравнения математической физики. Сборник задач. Методическое пособие.– М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2009.– 160 с.

б) дополнительная литература:

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1971.–512 с.
2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. —М.: Наука, 1974.–431 с.
3. Захаров Е.В., Дмитриева И.В., Орлик С.И. Уравнения математической физики. Учебник для студ. высш. учеб. заведений.—М.: Издательский центр "Академия", 2010. 320 с.
4. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике.—М.: Наука, 1972.–687 с.
5. Владимиров В.С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Михайлов В.П., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Сборник задач по уравнениям математической физики.—М.: ФИЗМАТЛИТ. 2001.–288 с.
6. Костомаров Д.П., Сушко В.Г. Методы математической физики.–М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. 1989.– 28 с.

в) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы. Студентам предлагается искать дополнительную информацию на сайтах, посвященных математической физике (предполагается обучение особенностям поиска).

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) Наличие литературы в отраслевой библиотеке, медиапроектор и компьютер для проведения лекций-презентаций.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО, ОС МГУ «Прикладная математика и информатика», с учетом рекомендаций Примерной основной образовательной программы (ПрООП) по направлению 010400 «Прикладная математика и информатика», бакалавриат.

Рецензент - профессор А.В. Гулин.

Составители: Профессор Захаров Е.В., Доцент Дмитриева И.В., Доцент Орлик С.И.