

Н.Л. Семендяева^{1 2}, М.В. Орлов³, Тан Жуй⁴, Ян Эньпин⁵

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ SIR*

Введение

Модель распространения инфекционных заболеваний SIR была предложена шотландскими учёными Уильямом Огилви Кермаком и Андерсоном Греем Маккендриком около 100 лет назад [1]. Базовая модель Кермака-Маккендрика представляла собой систему интегро-дифференциальных уравнений для переменных, описывающих численность здоровых, заболевших и выздоровевших особей популяции. В той же работе был рассмотрен и упрощённый вариант модели – система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для аналогичных переменных. Именно за этой упрощённой моделью закрепилось в научном мире название SIR. SIR – аббревиатура трёх английских слов, отражающих принцип маркировки особей популяции: Susceptible (здоровые особи, восприимчивые к заболеванию), Infected (инфицированные переносчики болезни) и Recovered (выздоровевшие особи с приобретённым пожизненным иммунитетом). Для описания динамики численности трёх выделенных групп авторы использовали подход, аналогичный закону действующих масс в химии, согласно которому скорость заболевания прямо пропорциональна произведению численности восприимчивых и инфицированных особей популяции.

¹ 119992 ГСП-2 Москва, Ленинские Горы, МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК; e-mail: natalys@cs.msu.ru

² 518172, КНР, г. Шэньчжэнь, Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, факультет вычислительной математики и кибернетики; e-mail: 6620180045@smbu.edu.cn

³ 119992 ГСП-2 Москва, Ленинские Горы, МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК; e-mail: orlov@cs.msu.su

⁴ 518172, КНР, г. Шэньчжэнь, Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, факультет вычислительной математики и кибернетики; e-mail: rui.tang@smbu.edu.cn

⁵ 518172, КНР, г. Шэньчжэнь, Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, факультет вычислительной математики и кибернетики; e-mail: yangep@smbu.edu.cn

* Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Модель SIR стала основой для математического моделирования большого числа эпидемий и пандемий инфекционных заболеваний, затрагивающих нашу цивилизацию. Модификации модели (SIRS, SIS, SEIR, MSEIR и многие другие) использовались для описания распространения малярии и чумы в средние века, а также более поздних эпидемий гриппа, в том числе свиного, кори, гепатита, краснухи [2-6]. Не стала исключением и пандемия COVID-19; модели на базе SIR эффективно применяются для теоретического описания распространения коронавирусной инфекции [7-9]. Как правило, основные усилия исследователей направлены на уточнение модели SIR с целью адекватного объяснения наблюдаемой динамики эпидемии и построения достоверных краткосрочных прогнозов. При этом многие свойства исходной модели, а также её модификаций остаются неизученными.

Несмотря на почти столетнюю историю использования модели, интерес к аналитическому исследованию её свойств появился только в последние два десятилетия [3, 10-15]. В большинстве работ анализ решений системы SIR проводится для начальных условий, соответствующих старту эпидемии, поэтому результаты не могут быть обобщены на вторую и последующие эпидемиологические волны.

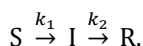
В данной статье основное внимание уделено теоретическим аспектам модели распространения инфекций SIR. Построено решение задачи Коши в интегральном виде. Предложена функция Ляпунова, с помощью которой выполнен качественный анализ стационарных состояний. Получено выражение значений координат точек покоя через W -функцию Ламберта для произвольных начальных данных. Продемонстрированы достоинства и недостатки модели SIR при моделировании пандемии COVID-19 в городе Ухань (КНР).

1. Математическая модель

Рассмотрим популяцию, особи которой могут находиться в одном из трёх состояний:

- инфицированные переносчики болезни (“Infected”);
- выздоровевшие особи, имеющие приобретённый пожизненный иммунитет (“Recovered”);
- здоровые особи, которые могут заразиться от инфицированных (“Susceptible”).

Предположим, что переходы из одного состояния в другое возможны в соответствии со следующей схемой:



Здесь k_1 – скорость заражения особи, k_2 – скорость выздоровления [ед.вр.⁻¹]; $k_1, k_2 \neq 0$.

Используются следующие предположения:

- популяция изолирована, нет взаимодействия с внешним миром;
- не учитываются процессы рождения и гибели особей;
- для заражения необходим контакт с инфицированным переносчиком болезни;
- распределение особей в ареале обитания является однородным.

Динамика концентраций инфицированных и здоровых особей с приобретённым иммунитетом и без иммунитета (соответственно, x , y и z) при некоторых дополнительных упрощающих предположениях [1,10] описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= nk_1xz - k_2x, \\ \frac{dy}{dt} &= k_2x, \\ \frac{dz}{dt} &= -nk_1xz.\end{aligned}$$

Через n обозначено среднее число особей, входящих в круг общения одной особи. Задача рассматривается на двухмерном симплексе

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x + y + z = 1. \quad (1)$$

Поскольку переменные связаны линейным соотношением, математическая модель эволюции популяции может быть представлена в виде автономной системы двух ОДУ для переменных x и y

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = nk_1x(1 - x - y) - k_2x, \\ \frac{dy}{dt} = k_2x; \end{cases} \quad (2)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (3)$$

Начальные условия (3) принадлежат множеству

$$\Omega = \{(x, y) \in R^2: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

Ниже будет показано, что решение системы (2) с начальными условиями (3) всегда принадлежит множеству Ω . Тогда задача Коши (2), (3) (будем называть её далее моделью SIR) удовлетворяет всем условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ [16] на полуинтервале $[0, +\infty)$. Действительно, при всех $t \geq 0$ частные производные по x и y функций правых частей системы (2)

$f_1(x, y) = nk_1x(1 - x - y) - k_2x$ и $f_2(x, y) = k_2x$ равномерно ограничены на Ω константой $4nk_1 + k_2$, что влечёт выполнение условия Липшица [16] и существование и единственность решения задачи Коши (2), (3) на $[0, +\infty)$.

Лемма 1. *Решение системы (2) с начальными условиями (3) на Ω не покидает множества Ω , существует и единственно при $t \in [0, +\infty)$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим несколько частных случаев.

Пусть $x_0 = 0, y_0 \in [0, 1]$. Тогда решение имеет вид $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv y_0$.

Пусть теперь $x_0 + y_0 = 1$. В этом случае, в силу того, что система (2) имеет первый интеграл $x + y = 1$, так как

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(x + y) = nk_1x(1 - (x + y)),$$

получаем $x(t) + y(t) \equiv 1$, откуда

$$x(t) = x_0 e^{-k_2 t} \in [0, 1], \quad y(t) = 1 - x_0 e^{-k_2 t} \in [0, 1]$$

при всех $t \in [0, +\infty)$.

Осталось рассмотреть общий случай $x_0 \in (0, 1), y_0 \in (0, 1), x_0 + y_0 < 1$. На основании локальной теоремы существования и единственности и в силу непрерывности функций $x(t), y(t), x(t) + y(t)$ можно утверждать, что существует момент времени $\tau > 0$ такой, что решение задачи Коши (2), (3) обладает следующими свойствами: $x(t) \in (0, 1), y(t) \in (0, 1), x(t) + y(t) < 1$ при $t \in [0, \tau)$. При этом функции $y(t)$ и $x(t) + y(t)$ монотонно возрастают на $[0, \tau)$. Решение может покинуть множество Ω только в двух случаях: либо $x(\tau) + y(\tau) = 1$, что невозможно, так как в этом случае $x(t) + y(t) \equiv 1, t \in [0, \tau]$, либо $x(\tau) = 0$, что также невозможно, так как применение неравенства Чаплыгина [16] к первому дифференциальному уравнению (2) влечёт противоречие:

$$0 = x(\tau) \geq x_0 e^{-k_2 \tau} > 0.$$

Значит, решение никогда не покидает множества Ω , что позволяет применить глобальный вариант теоремы существования и единственности из [16], как и указано выше. Лемма 1 доказана.

2. Качественный анализ

Поведение решения системы ОДУ (2) в простейших ситуациях $x_0 = 0, x_0 + y_0 = 1$ описано в Лемме 1. Уравнения для фазовых траекторий модели SIR в остальных случаях можно получить в

аналитическом виде, решая следующую линейную по x задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{nk_1}{k_2} (1 - x - y) - 1,$$

$$x(y_0) = x_0, \quad x_0 \in (0,1), \quad y_0 \in (0,1), \quad x_0 + y_0 < 1.$$

Используя метод вариации произвольных постоянных [17], находим

$$x = 1 - y + ce^{-ay}, \quad \text{где } a = \frac{nk_1}{k_2}, \quad c = -e^{ay_0}(1 - x_0 - y_0). \quad (4)$$

Типичный фазовый портрет системы (2) на двухмерном симплексе (1) изображён на рисунке 1.

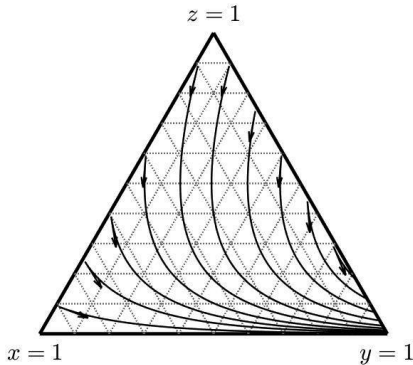


Рис.1. Фазовый портрет модели SIR на 2-симплексе $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1$. Тонкие линии – фазовые траектории. Стрелки указывают направление движения системы вдоль фазовых траекторий. Значения параметров: $k_1 = 1, k_2 = 1, n = 4$. Начальные условия (x_0, y_0) : $(0.1, 0.01), (0.4, 0.01), (0.6, 0.01), (0.75, 0.), (0.9, 0.01), (0.01, 0.1), (0.01, 0.25), (0.01, 0.4), (0.01, 0.55), (0.01, 0.7)$.

Для того чтобы лучше понять поведение траекторий системы (2) в фазовом пространстве, исследуем на устойчивость точки покоя (положения равновесия) этой системы. Координаты (x^*, y^*) точек покоя системы (2) являются решением системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} f_1(x^*, y^*) = 0, \\ f_2(x^*, y^*) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} nk_1 x^* (1 - x^* - y^*) - k_2 x^* = 0, \\ k_2 x^* = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) имеет бесконечного много решений вида $(0, y^*)$, $0 \leq y^* \leq 1$, при этом $z^* = 1 - y^*$. Значит, у системы ОДУ (2) есть неизолированные точки покоя.

Проведём исследование точек покоя на устойчивость по первому приближению (первым методом Ляпунова) [16,17]. Матрица Якоби в точке покоя $(0, y^*)$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} nk_1(1 - 2x^* - y^*) - k_2 & -nk_1x^* \\ k_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nk_1(1 - y^*) - k_2 & 0 \\ k_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Её определитель равен нулю; собственные числа

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = nk_1(1 - y^*) - k_2.$$

По теореме о неустойчивости нулевого решения линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами [16] точка покоя $(0, y^*)$ будет неустойчивой при выполнении условия $\lambda_2 > 0$:

$$nk_1(1 - y^*) - k_2 > 0 \Leftrightarrow 1 - y^* > \frac{k_2}{nk_1} \Leftrightarrow y^* < 1 - \frac{k_2}{nk_1}.$$

Значит, если параметры модели связаны неравенством

$$1 - \frac{k_2}{nk_1} > 0 \Leftrightarrow \frac{k_2}{nk_1} < 1 \Leftrightarrow k_2 < nk_1, \quad (6)$$

то система (2) имеет неустойчивые точки покоя вида $(0, y^*)$, где $y^* \in \left[0, 1 - \frac{k_2}{nk_1}\right)$.

Для остальных точек покоя системы (2) вида $(0, y^*)$ при $y^* \in \left[\max\left(0; 1 - \frac{k_2}{nk_1}\right), 1\right]$ первый метод Ляпунова неприменим, однако их устойчивость можно исследовать с помощью функции Ляпунова (второй метод Ляпунова) [16,17]. Рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию

$$V(x, y) = x + \frac{1}{2} \frac{nk_1}{k_2} (y - y^*)^2$$

на множестве Ω . Функция $V(x, y)$ положительно определена на Ω . Действительно, $V(x, y) = 0$ в точке $(0, y^*)$; $V(x, y) > 0$ во всех остальных точках множества Ω . Найдём производную $\left. \frac{dV(x, y)}{dt} \right|_{(2)}$ функции $V(x, y)$ в силу системы (2) :

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(x, y)}{dt} \right|_{(2)} &= \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} (nk_1x(1 - x - y) - k_2x) + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} k_2x = \\ &= 1 \cdot (nk_1x(1 - x - y) - k_2x) + \frac{nk_1}{k_2} (y - y^*) \cdot k_2x = \end{aligned}$$

$$= nk_1x(1 - x - y + y - y^*) - k_2x = nk_1x(1 - x - y^*) - k_2x =$$

$$= x(nk_1(1 - y^*) - k_2) - nk_1x^2.$$

Поскольку в рассматриваемом случае $nk_1(1 - y^*) - k_2 = \lambda_2 \leq 0$, то

$$\left. \frac{dV(x,y)}{dt} \right|_{(2)} \leq 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

По теореме Ляпунова об устойчивости [16] все точки покоя системы (2) вида $(0, y^*)$, где $y^* \in \left[\max\left(0; 1 - \frac{k_2}{nk_1}\right), 1 \right]$, являются устойчивыми. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 2. Если $k_2 \geq nk_1$, то все точки покоя $(0, y^*)$, $y^* \in [0, 1]$ системы (2) являются устойчивыми по Ляпунову положениями равновесия.

Если $k_2 < nk_1$, то точки покоя вида $(0, y^*)$, где $y^* \in \left[0, 1 - \frac{k_2}{nk_1}\right)$, являются неустойчивыми, а все точки покоя вида $(0, y^*)$, где $y^* \in \left[1 - \frac{k_2}{nk_1}, 1\right]$, являются устойчивыми по Ляпунову.

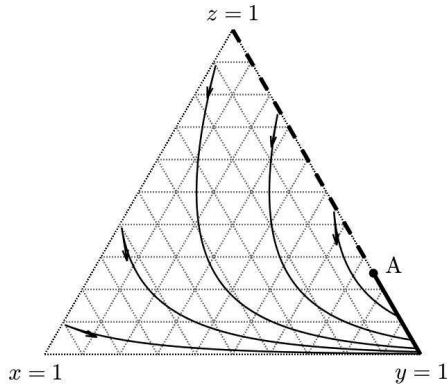


Рис.2. Положение точек покоя системы (2) на 2-симплексе $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1$. Значения параметров: $k_1 = 1, k_2 = 1, n = 4$. Сплошная линия – устойчивые точки покоя; $A\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ – устойчивая точка покоя. Пунктирная линия – неустойчивые точки покоя. Тонкие линии – фазовые траектории системы.

Расположение точек покоя системы (2) на 2-симплексе (1) для модельных значений параметров показано на рисунке 2. Устойчивые точки покоя отмечены сплошной линией; они заполняют отрезок от

точки $A\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ до точки с координатами $(0,1,0)$. Неустойчивые точки покоя отмечены пунктирной линией; они заполняют полуинтервал от точки с координатами $(0,0,1)$ (включая) до точки $A\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ (не включая).

Согласно Лемме 2, структура множеств устойчивых по Ляпунову и неустойчивых положений равновесия модели SIR определяется значением единственного безразмерного параметра $\frac{k_2}{nk_1} = \frac{1}{a}$, принимающего положительные значения. Множество неустойчивых точек покоя вида $(0, y^*)$ задаётся условиями $x^* = 0$, $y^* \geq 0$, $y^* < 1 - \frac{k_2}{nk_1}$. Множество устойчивых точек покоя вида $(0, y^*)$ определяется системой $x^* = 0$, $0 \leq y^* \leq 1$, $y^* \geq 1 - \frac{k_2}{nk_1}$ (рисунок 3).

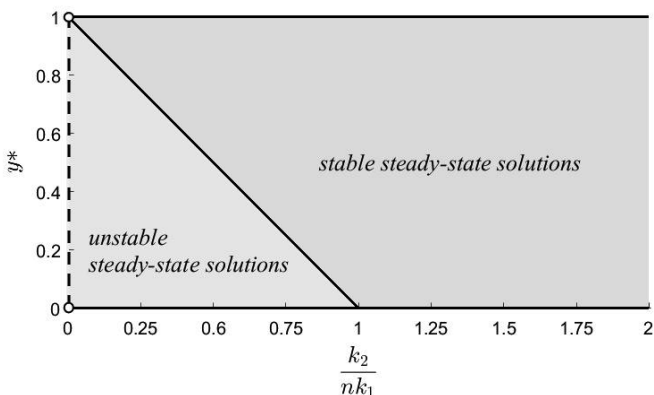


Рис.3. Зависимость структуры множеств устойчивых и неустойчивых точек покоя от безразмерного параметра $\frac{k_2}{nk_1}$ в модели SIR.

3. Поведение траекторий исследуемой системы на бесконечности

Лемма 3. Решение системы (2) с начальными условиями (3) из Ω обладает следующими свойствами:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y^* \in [0,1],$$

то есть траектория системы (2) на бесконечности стремится к точке покоя, координаты которой определяются начальными условиями (3). При этом

- если $x_0 = 0$, то $y^* = y_0$;
- если $x_0 + y_0 = 1$, то $y^* = 1$;
- если $x_0 \in (0,1)$, $y_0 \in [0,1)$, $x_0 + y_0 < 1$, то $y(t)$ монотонно возрастает при $t \in [0, +\infty)$, а $x(t)$ или монотонно убывает при $t \in [0, +\infty)$, или сначала монотонно возрастает на участке $t \in [0, t_*]$, $t_* > 0$, а далее монотонно убывает при $t \geq t_*$.

Доказательство. Случаи $x_0 = 0$ и $x_0 + y_0 = 1$ рассмотрены в Лемме 1. В остальных случаях из результатов Леммы 1 имеем: $x(t) \in (0,1)$, $y(t) \in (0,1) \forall t > 0$; кроме того, функции $y(t)$ и $x(t) + y(t)$ монотонно возрастают при $t \in [0, +\infty)$. Так как функция $y(t)$ монотонно возрастает и ограничена сверху 1, то у неё существует предел на бесконечности, который не превосходит 1, то есть $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y^* \in (y_0, 1]$.

Запишем первое дифференциальное уравнение системы (2) в виде

$$\frac{dx}{dt} = (nk_1\alpha(t) - k_2)x,$$

где $\alpha(t) \equiv 1 - x(t) - y(t)$ монотонно убывает на полуинтервале $[0, +\infty)$ и принимает значения из интервала $(0,1)$.

Если $nk_1\alpha(0) - k_2 \leq 0$, то $nk_1\alpha(t) - k_2 < 0$ при $t \in (0, +\infty)$, то есть $x(t)$ монотонно убывает на промежутке $[0, +\infty)$.

Если $nk_1\alpha(0) - k_2 > 0$, то $x(t)$ возрастает на начальном участке, где $nk_1\alpha(t) - k_2 > 0$. Покажем, что $x(t)$ не может возрастать на бесконечном промежутке. Предположим противное. Тогда $x(t) \geq x_0 > 0 \forall t \geq 0$. Но тогда из второго уравнения системы (2) вытекает, что $\frac{dy}{dt} = k_2x \geq k_2x_0$, откуда имеем: $y(t) \geq k_2x_0t + y_0 > 1$ при достаточно больших t , что невозможно. Таким образом, найдётся момент времени $t_* > 0$ такой, что $nk_1\alpha(t_*) - k_2 = 0$, и, значит, $nk_1\alpha(t) - k_2 < 0$ при $t > t_*$, откуда вытекает монотонное убывание функции $x(t)$ на указанном промежутке.

Осталось показать, что $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Так как функция $x(t)$ монотонно убывает при $t \geq t_*$, $t_* \geq 0$, и ограничена снизу, то предел на бесконечности существует. Рассмотрим промежуток (t_*, t_{**}) , где t_{**} – любое число, большее t_* . Обозначим $k_{**} = nk_1\alpha(t_{**}) - k_2 < 0$. В силу монотонного убывания функции $\alpha(t)$ получаем:

$$k_{**} > nk_1\alpha(t) - k_2 \quad \forall t > t_{**}.$$

Применение неравенства Чаплыгина [16] влечёт:

$$x(t) \leq x(t_{**})e^{k_{**}(t-t_{**})} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Лемма 3 полностью доказана.

Попробуем восстановить координату y^* точки покоя по начальным данным x_0, y_0 из множества Ω . Оказывается, эта координата не выражается в элементарных функциях, однако её можно описать с помощью специальной функции Ламберта [18,19].

Применение формулы (4) к решению задачи Коши (2), (3) приводит к тождеству

$$x(t) \equiv 1 - y(t) - (1 - x_0 - y_0)e^{-a(y(t)-y_0)}.$$

Перейдём в этом тождестве к пределу при $t \rightarrow +\infty$. Используя результаты Леммы 3, получаем

$$0 = 1 - y^* - (1 - x_0 - y_0)e^{-a(y^*-y_0)}.$$

Таким образом, y^* — это корень уравнения

$$g(y) = 0, \tag{7}$$

где

$$g(y) = 1 - y - (1 - x_0 - y_0)e^{-a(y-y_0)}.$$

Покажем, что уравнение $g(y) = 0$ при любом начальном условии x_0, y_0 из Ω , удовлетворяющем ограничениям $x_0 \in (0,1)$, $y_0 \in (0,1)$, $x_0 + y_0 < 1$, имеет единственный корень $y^* \in (y_0, 1)$. Действительно,

$$g(y_0) = x_0 > 0, \quad g(1) = -(1 - x_0 - y_0)e^{-a(1-y_0)} < 0.$$

Значит, на интервале $(y_0, 1)$ имеется хотя бы один корень уравнения. Кроме того,

$$g'(y) = -1 + a(1 - x_0 - y_0)e^{-a(y-y_0)},$$

$$g''(y) = -a^2(1 - x_0 - y_0)e^{-a(y-y_0)} < 0,$$

откуда следует, что $g(y)$ или монотонно убывает, или сначала возрастает, а потом убывает. В обоих случаях уравнение (7) имеет единственный корень $y^* \in (y_0, 1)$, который может быть найден численно, например, методом деления отрезка пополам (дихотомия).

Покажем, что y^* можно выразить через основную вещественную ветвь W_0 функции Ламберта W . Для этого выпишем цепочку соотношений:

$$g(y) = 0 \Leftrightarrow (1 - x_0 - y_0)e^{-a(y-y_0)} = 1 - y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - x_0 - y_0)e^{ay_0} = e^{ay}(1 - y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - x_0 - y_0)ae^{-a(1-y_0)} = e^{-a(1-y)}a(1 - y).$$

После замены $u = -a(1 - y)$ получаем основное тождество Ламберта в виде

$$ue^u = -a(1 - x_0 - y_0)e^{-a(1-y_0)}.$$

При этом правая часть последнего равенства допускает оценку

$$-a(1 - x_0 - y_0)e^{-a(1-y_0)} > -a(1 - y_0)e^{-a(1-y_0)} \geq -\frac{1}{e},$$

так как, выполнив замену $v = a(1 - y_0) > 0$, получим

$$ve^{-v} \leq \frac{1}{e}, \quad v \geq 0.$$

Тогда

$$u = W_0(-a(1 - x_0 - y_0)e^{-a(1-y_0)}),$$

откуда находим

$$y^* = 1 + \frac{1}{a}W_0(-a(1 - x_0 - y_0)e^{-a(1-y_0)}) = 1 + \frac{1}{a}W_0(ace^{-a}). \quad (8)$$

Значения остальных переменных в точке покоя равны

$$x^* = 0, \quad z^* = 1 - y^* = -\frac{1}{a}W_0(ace^{-a}).$$

Заметим, что формула (8) формально справедлива и при $x_0 + y_0 = 1$. Действительно, в этом случае $c = 0$; тогда

$$y^* = 1 + \frac{1}{a}W_0(0) = 1.$$

4. Замечание о сходимости одного интеграла

Равенство (4) позволяет записать второе уравнение системы (2) в виде

$$\frac{dy}{dt} = k_2(1 - y + ce^{-ay}), \quad y(0) = y_0.$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{dy}{k_2(1 - y + ce^{-ay})} = dt,$$

откуда, интегрируя и учитывая начальное условие, для времени перехода $T(y)$ из y_0 в $y > y_0$ получаем

$$T(y) = \frac{1}{k_2} \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{1 - \eta + ce^{-a\eta}}. \quad (9)$$

Интеграл в (9) не берётся в элементарных функциях. Покажем, что он сходится для любого значения $y \in [y_0, y^*)$ при $y_0 < y^*$ и расходится при $y = y^*$.

- Нижняя граница интегрирования.

$$\lim_{\eta \rightarrow y_0+0} g(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow y_0+0} (1 - \eta + ce^{-a\eta}) = 1 - y_0 + x_0 + y_0 - 1 = x_0.$$

При $x_0 \neq 0$ точка $\eta = y_0$ не является особой точкой подынтегральной функции, равной $\frac{1}{g(\eta)}$. При $x_0 = 0$ подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки $\eta = y_0$. Заметим, что значение $x_0 = 0$ не представляет практического интереса, поскольку в этом случае в популяции отсутствуют инфицированные особи, и возникновение эпидемии исключено. Далее предполагаем $x_0 > 0 \Rightarrow y_0 < 1$.

- Верхняя граница интегрирования.

а) При $c = 0$ интеграл в (9) можно выразить в элементарных функциях:

$$t(y) = \frac{1}{k_2} \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{1-\eta} = \frac{1}{k_2} \ln \frac{1-y_0}{1-y}.$$

В данном случае $y^* = 1$. Если $y \in [y_0, y^*)$, то интеграл сходится; если $y = y^* = 1$, то интеграл расходится.

б) При $c < 0$

$$\lim_{\eta \rightarrow y-0} (1 - \eta + ce^{-a\eta}) = 1 - y + ce^{-ay}.$$

Если $y < y^*$, то подынтегральная функция в (9) строго положительна и ограничена; интеграл сходится.

Если $y = y^*$, то подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки $\eta = y^*$; интеграл

$$\int_{y_0}^{y^*} \frac{d\eta}{1-\eta+ce^{-a\eta}} \quad (10)$$

является несобственным интегралом второго рода. Докажем его расходимость. Заметим, что при $\eta < y^*$

$$0 < g(\eta) = 1 - \eta + ce^{-a\eta} = 1 - \eta + ce^{-ay^*} e^{a(y^*-\eta)} <$$

$$< 1 - \eta + ce^{-ay^*} (1 + a(y^* - \eta)) =$$

$$= 1 + ce^{-ay^*} (1 + ay^*) - \eta(1 + ace^{-ay^*}) = h(\eta);$$

$$g(y^*) = h(y^*) = 0.$$

Значит, при $0 \leq \eta < y^*$ выполняется неравенство $\frac{1}{g(\eta)} > \frac{1}{h(\eta)}$. Покажем,

что несобственный интеграл $\int_{y_0}^{y^*} \frac{d\eta}{h(\eta)}$ расходится. Введём обозначения для коэффициентов линейной функции $h(\eta)$:

$$A = 1 + ce^{-ay^*} (1 + ay^*), \quad B = 1 + ace^{-ay^*} > 0.$$

Тогда по определению несобственного интеграла второго рода

$$\int_{y_0}^{y^*} \frac{d\eta}{h(\eta)} = \int_{y_0}^{y^*} \frac{d\eta}{A - B\eta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(-\frac{1}{B} \ln(A - B\eta) \right) \Big|_{y_0}^{y^* - \varepsilon} = +\infty.$$

По признаку сравнения [20] интеграл (10) также расходится.

5. Результаты расчётов

Прежде всего отметим одну важную особенность модели SIR. При определённых значениях параметров и начальных данных график функции $x(t)$ имеет локальный максимум. Пример такого поведения системы (2) приведён на рисунке 4. Слева построены траектории при тестовых значениях параметров. Справа изображён соответствующий фазовый портрет системы на плоскости (x, y) .

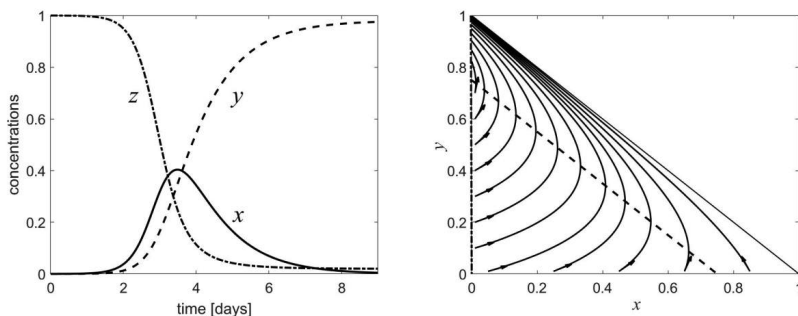


Рис.4. Слева: временная эволюция концентраций инфицированных особей (x), переболевших с иммунитетом (y) и здоровых без иммунитета (z) в модели SIR. Значения параметров [день⁻¹]: $nk_1 = 4$, $k_2 = 1$. Справа: фазовый портрет модели SIR на плоскости (x, y) . Пунктирная линия – нульклина $x + y = \frac{3}{4}$ первого уравнения системы (2). Штрих-пунктирная линия – нульклина $x = 0$ первого и второго уравнений системы (2). Тонкие линии – фазовые траектории системы.

Локальный максимум функции $x(t)$ появляется при одновременном выполнении двух условий.

- В системе ОДУ (2) должны существовать неустойчивые точки покоя. Как показано выше, необходимым и достаточным условием существования неустойчивых точек покоя является соотношение (6), связывающее константы скоростей процессов выздоровления и заражения: $\frac{k_2}{nk_1} < 1$.

- Начальные значения переменных должны принадлежать множеству $x_0 > 0, y_0 \geq 0, x_0 + y_0 < 1 - \frac{k_2}{nk_1}$.

При выполнении первого условия нульклина $x + y = 1 - \frac{k_2}{nk_1}$ первого уравнения системы (2) пересечёт множество Ω . При выполнении второго условия фазовая траектория системы пересечёт указанную нульклину. Точка пересечения фазовой траектории и нульклина соответствует локальному максимуму \bar{x} функции $x(t)$; в ней можно определить значения всех переменных:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= 1 - \bar{x} - \bar{y} = \frac{k_2}{nk_1}, \\ \bar{y} &= y_0 + \frac{k_2}{nk_1} \ln \frac{z_0}{\bar{z}} = y_0 + \frac{k_2}{nk_1} \ln \left(z_0 \frac{nk_1}{k_2} \right), \\ \bar{x} &= 1 - \bar{y} - \bar{z} = 1 - y_0 - \frac{k_2}{nk_1} \ln \left(z_0 \frac{nk_1}{k_2} \right) - \frac{k_2}{nk_1}.\end{aligned}$$

Значения \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} зависят от начальных данных и отношения констант скоростей заражения nk_1 и выздоровления k_2 . Безразмерная величина $a = \frac{nk_1}{k_2}$ называется в эпидемиологии *основным репродуктивным числом* и имеет стандартное обозначение R_0 . Появление локального максимума функции $x(t)$ свидетельствует о том, что в популяции произошла неконтролируемая вспышка заболевания; приведённые выше исследования доказывают, что при $R_0 > 1$ неконтролируемая вспышка заболевания неизбежна.

В заключение продемонстрируем возможности модели SIR при описании распространения эпидемии COVID-19. Поскольку в модели нет возможности учесть мероприятия, проводимые с целью локализации и полной остановки эпидемии (например, карантинные мероприятия или вакцинацию), модель может дать корректное описание лишь начального этапа распространения эпидемии.

На рисунке 5 поведено сравнение результатов моделирования со статистическими данными по заболеваемости COVID-19 в городе Ухань (КНР) в начале 2020 года. Значения параметров математической модели SIR были выбраны так, чтобы удовлетворительно описать начальную стадию первой волны эпидемии (см. вкладку на рисунке). Известно, что до 23 января 2020 года в городе не предпринимались меры по локализации заболевания. 23 января был объявлен локдаун, остановлена работа общественного транспорта, введён централизованный карантин. Согласно представленным расчётам, карантинные мероприятия в Ухане позволили сократить суммарное число жителей, заболевших до 12 марта 2020 года, почти в 4 раза.

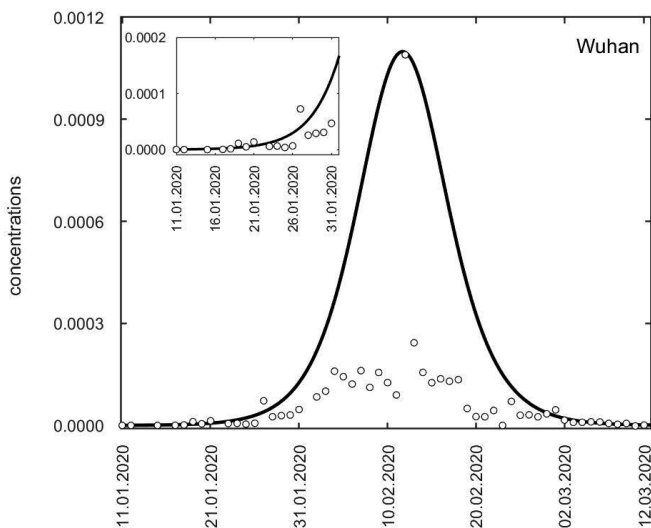


Рис.5. Ухань, КНР. Изменение концентрации жителей города, инфицированных COVID-19. Точки – статистические данные (http://www.sy72.com/covid19/t_105536.html), линия – результаты расчётов по модели SIR при $nk_1 = 6.45$, $k_2 = 6.15$ [день⁻¹].

Заключение

В работе рассмотрена математическая модель распространения инфекционных заболеваний SIR. Модель представляет собой систему двух ОДУ для концентраций инфицированных и выздоровевших особей популяции и содержит три параметра. Несмотря на простоту и лаконичность, модель демонстрирует нетривиальное поведение, описанное в трёх доказанных в работе леммах. В частности, система ОДУ имеет неизолированные точки покоя, которые заполняют отрезок (Лемма 2). Координаты точек покоя зависят от значений начальных данных и параметров модели; эти зависимости содержат основную вещественную ветвь W_0 функции Ламберта W (Лемма 3).

Модель SIR может использоваться при описании начала развития эпидемии в разных городах и странах, в том числе в случае неконтролируемой вспышки заболевания. С помощью параметра n можно учитывать плотность населения в разных регионах, сохраняя значения остальных параметров неизменными. Для построения более точных долгосрочных аналитических прогнозов модель должна быть усовершенствована. Необходимо рассматривать потерю иммунитета

(модель SIRS), наличие инкубационного периода (модель SEIR), врождённый иммунитет (модель MSEIR) и другие особенности протекания заболевания [21]. Построение достоверных прогнозов невозможно без учёта эффекта вакцинации. Необходимо корректно описывать карантинные мероприятия.

Любое усложнение математической модели приводит к увеличению числа параметров и расширению спектра возможных сценариев поведения системы. Практический интерес представляют математические модели распространения инфекций, демонстрирующие сложное пространственно-временное поведение: периодические и хаотические колебания, уединённые бегущие импульсы и серии импульсов, формирование концентрических и спиральных волн, их спонтанное разрушение и возникновение спиральной турбулентности. Большую часть перечисленных явлений невозможно описать с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений; необходимо использовать уравнения реакции-диффузии или сетевые агентно-ориентированные модели микроуровня [22,23]. Как правило, в основе пространственно-распределённых моделей микроуровня лежат согласованные системы ОДУ, поэтому детальное теоретическое исследование моделей макроуровня, и, в частности, модели SIR и её модификаций, имеет фундаментальное значение.

Литература

1. *Kermack W.O., McKendrick A.G.* A contribution to the mathematical theory of epidemics // Proceedings of the Royal Statistical Society, London, 1927, Vol.A, №115, pp.700–721.
2. *Hethcote H.W.* The mathematics of infectious diseases // SIAM Review, 2000, Vol.42, №.4, pp.599–653.
3. *Weiss H.* The SIR model and the foundations of public health // MATerials MATemàtics, 2013, Vol.2013, №3, pp.1-17.
4. *Siettos C.I., Russo L.* Mathematical modeling of infectious disease dynamics // Virulence, 2013, V.4, №4, p.295-306.
5. *Xiao Y., Zhao T., Tang S.* Dynamics of an infectious diseases with media/psychology induced non-smooth incidence // Mathematical Biosciences and Engineering, 2013, Vol.10, №2, pp.445-461.
6. *Driessche P.* Reproduction numbers of infectious disease models // Infectious Disease Modelling, 2017, Vol.2, pp.288-303.
7. *Roda W.C., Varughese M.B., Han D., Li M.Y.* Why is it difficult to accurately predict the COVID-19 epidemic? // Infectious Disease Modelling, 2020, Vol.5, pp.271 – 281.

8. *Guiro A., Koné B., Ouaro S.* Mathematical model of the spread of the coronavirus disease 2019 (COVID-19) in Burkina Faso // *Applied Mathematics*, 2020, Vol.11, pp.1204-1218.
9. *Jayatilaka R., Patel R., Brar M., Tang Y., Jisrawi N.M., Chishtie F., Drozd J., Valluri S.R.* A mathematical model of COVID-19 transmission // *Materials Today: Proceedings*, 2022, Vol.54., pp.101-112.
10. *Братусь А.С., Новожиллов А.С., Платонов А.П.* Динамические системы и модели биологии. - М.: Физматлит, 2011, 400 с.
11. *Wang F.* Application of the Lambert W Function to the SIR Epidemic Model // *The College Mathematics Journal*, 2010, Vol.41, №2, pp.156-159.
12. *Harko T., Lobo F.S.N., Mak M.K.* Exact analytical solutions of the susceptible-infected-recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates, *Appl. Math. Comput.*, 2014, Vol.236, pp.184–194.
13. *Ito H.* Input-to-state stability and Lyapunov functions with explicit domains for SIR model of infectious diseases // *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, 2021, Vol.26, №9, pp.5171-5196.
14. *Kudryashov N., Chmykhov M., Vigdorowitsch M.* Analytical features of the SIR model and their applications to COVID-19 // *Applied Mathematical Modelling*, 2021, Vol.90, pp.466–473.
15. *Prodanov D.* Comments on some analytical and numerical aspects of the SIR model // *Applied Mathematical Modelling*, 2021, Vol.95, pp.236–243.
16. *Денисов А.М., Разгулин А.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: МАКС Пресс, 2009, 232 с.
17. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения. - М.: Издательство ЛКИ, 2013, 320 с.
18. *Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D. J., Knuth D. E.* On the Lambert W function // *Adv. Comput. Math.*, 1996, Vol.5, pp.329-359.
19. *Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К.* W-функция Ламберта и её применение в математических задачах физики. - Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2006, 160 с.
20. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Часть 2. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002, 464 с.
21. *Jenner A.L., Aogo R.A., Davis C.L., Smith A.M., Craig M.* Leveraging Computational Modeling to Understand Infectious Diseases // *Curr Pathobiol Rep.*, 2020, Vol.8, pp.149–161.

22. *Okabe Y., Shudo A.* Microscopic numerical simulation of epidemic models on networks // *Mathematics*, 2021, 9, 932.
23. *Saucedo O., Tien J.H.* Host movement, transmission hot spots, and vector-borne disease dynamics on spatial networks // arXiv:2204.07678v2 [q-bio.PE] 20 Apr 2022.