А.Ю. Щеглов[1], О.А. Андреянова[2]

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ НА ПОЛУПРЯМОЙ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ТРЕТЬЕГО РОДА

Введение

Пусть при заданных положительных значениях a, β, T и $l \in (0, aT)$, прямая задача имеет вид начально-краевой постановки относительно функции $u(x,t)$ на полупрямой для уравнения гиперболического типа в области $\Lambda_{l,T} = \{(x,t)\colon\ 0 \leqslant t \leqslant \min\{T, T-(l-x)/a\},\ 0 \leqslant x < +\infty\}$:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x)g(t), \qquad (x,t) \in \Lambda_{l,T}, \tag{1}$$

$$-\beta u_x(0,t) = \mu(t) - u(0,t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \hat{T} = T - (l/a), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x. \tag{3}$$

Краевое условие (2) используется при моделировании малых колебаний конца стержня в упругой среде.

Обратная задача пусть состоит в восстановлении функций $f(x), \mu(t)$, $0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant \hat{T} = T - (l/a)$, и затем в нахождении решения $u(x,t)$, $(x,t) \in \Lambda_{l,T}$, прямой задачи (1) – (3), так, чтобы найденные функции $f(x)$, $\mu(t)$, $u(x,t)$ удовлетворяли уравнению (1) в области $\Lambda_{l,T}$, краевому условию (2) при $t \in [0, \hat{T}]$ и начальному условию (3) при заданных положительных числах l, T, a, β, таких, что $l < aT$, и известных функциях $\varphi(x), \psi(x)$, $g(t)$, $\hat{f}(s) = f(s)$, $x \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $s > l$, с дополнительно заданной функцией $h(t)$, такой, что

$$h(t) = u(l,t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

где $u(x,t)$ — решение задачи (1) – (3) в области $\Lambda_{l,T}$. Исследуем разрешимость прямой и обратной задач, алгоритмы решения последней.

Идентификация параметров в задачах для уравнений гиперболического типа привлекает повышенное внимание при анализе геофизических моделей [1-6], в задачах оптимального управления [7-10], в постановках обратных задач [11-19], и сопровождается использованием проработанных алгоритмов [20, 21] для компьютерной обработки экспериментальных данных. Можно отметить, что современные результаты по разнохарактерным исследованиям обратных задач охватывают самые разные типы уравнений и моделей с различными областями приложений [22-28].

[1] Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, МГУ имени М.В. Ломоносова, shcheg@cs.msu.ru

[2] МГУ имени М.В. Ломоносова, oksashka@gmail.com

Прямая задача

Теорема 1. *Если известны положительные значения T, a, β, l, такие, что $l < aT$, и функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и ограничена при $x \geqslant 0$, функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема и ограничена при $x \geqslant 0$, функция $f(x)$ непрерывна и ограничена при $x \geqslant 0$, и функции $g(t)$, $\mu(t)$ удовлетворяют условиям*

$$g(t) \in C^1[0,T], \tag{5}$$

$$\mu(t) \in C\big[0,\hat{T}\big],\ \ \mu(0) = \varphi(0) - \beta\varphi'(0),\ \ \exists\mu'(0) = \psi(0) - \beta\psi'(0), \tag{6}$$

где $\hat{T} = T - (l/a)$, то задача (1) – (3) *имеет единственное ограниченное, дважды непрерывно дифференцируемое на множестве $\Lambda_{l,T}$ решение $u(x,t)$.*

Доказательство. Покажем, что решение задачи (1) – (3) совпадает на множестве $\Lambda_{l,T}$ с решением $v(x,t)$ задачи Коши, получаемой продлением начальных условий (3) за луч $x \geqslant 0$ с выполнением условия (2), и покажем, что существование и единственность решения такой задачи Коши, установленные в [29] с использованием формулы Даламбера для неоднородного уравнения (1) при условии непрерывно дифференцируемого по обоим аргументам произведения $f(x)g(t)$ на множестве $\Lambda_{l,T}$, переносятся на случай непрерывной функции $f(x)$ на луче $x \geqslant 0$ и функции $g(t) \in C^1[0,T]$.

Рассмотрим для функции $v(x,t)$ задачу Коши

$$v_{tt}(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t) + \tilde{f}(x)g(t), \qquad (x,t) \in D_{[l-aT,+\infty),T}, \tag{7}$$

$$v(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \qquad v_t(x,0) = \tilde{\psi}(x), \qquad x \in [l-aT,+\infty), \tag{8}$$

где $D_{[l-aT,+\infty),T} = \{(x,t)\colon\ l-(T-t)a \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$. Пусть

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} z(x), & x \in [l-aT,0), \\ \varphi(x), & x \in [0,+\infty), \end{cases} \tag{9}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(0) + \psi'(0)x, & x \in [l-aT,0), \\ \psi(x), & x \in [0,+\infty), \end{cases} \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(0), & x \in [l-aT,0), \\ f(x), & x \in [0,+\infty). \end{cases}$$

Введённые таким образом значения функций $\tilde{\psi}(x)$ и $\tilde{f}(x)$, а также функции $\tilde{\varphi}(x)$ в случае её продолжения на полуинтервал $[l-aT,0)$ дважды непрерывно дифференцируемой функцией $z(x)$, являются ограниченными и сохраняют имеющуюся в условиях теоремы 1 исходную гладкость: $\tilde{\varphi}(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема, $\tilde{\psi}(x)$ — непрерывно дифференцируема, $\tilde{f}(x)$ — непрерывна на луче $[l-aT,+\infty)$. На основе формулы Даламбера для неоднородного уравнения [29] при ограниченных, дважды непрерывно дифференцируемой функции $\tilde{\varphi}(x)$ на луче $[l-aT,+\infty)$ и непрерывно дифференцируемых функциях $\tilde{\psi}(x)$ на луче $[l-aT,+\infty)$ и $\tilde{f}(x)g(t)$ при $(x,t) \in D_{[l-aT,+\infty),T}$, однозначное решение $v(x,t)$ задачи (7), (8), дважды непрерывно дифференцируемое при $(x,t) \in D_{[l-aT,+\infty),T}$, существует (по теореме 7.6 [29]) и имеет вид

$$v(x,t)=\frac{1}{2}\big(\tilde{\varphi}(x-at)+\tilde{\varphi}(x+at)\big)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}(\xi)\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^t g(\tau)\int_{x-(t-\tau)a}^{x+(t-\tau)a}\tilde{f}(\xi)\,d\xi d\tau,\quad (x,t)\in D_{[l-aT,+\infty),T}.\qquad(10)$$

Дифференцируя по аргументу x формулу (10) $\forall(x,t)\in D_{[l-aT,+\infty),T}$ с последующими заменами в получаемых интегралах подынтегральных аргументов: $x+(t-\tau)a=\xi$ и $x-(t-\tau)a=\eta$, имеем $\forall(x,t)\in D_{[l-aT,+\infty),T}$

$$v_x(x,t)=\frac{1}{2}\big(\tilde{\varphi}'(x-at)+\tilde{\varphi}'(x+at)\big)+\frac{1}{2a}\Big(\tilde{\psi}(x+at)-\tilde{\psi}(x-at)\Big)-$$
$$-\frac{1}{2a^2}\int_{x-at}^{x}g\left(t-\frac{x-\eta}{a}\right)\tilde{f}(\eta)\,d\eta+\frac{1}{2a^2}\int_x^{x+at}g\left(t+\frac{x-\xi}{a}\right)\tilde{f}(\xi)\,d\xi,\quad(11)$$

$$v_t(x,t)=\frac{a}{2}\big(\tilde{\varphi}'(x+at)-\tilde{\varphi}'(x-at)\big)+\frac{1}{2}\Big(\tilde{\psi}(x+at)+\tilde{\psi}(x-at)\Big)+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x}g\left(t-\frac{x-\eta}{a}\right)\tilde{f}(\eta)\,d\eta+\frac{1}{2a}\int_x^{x+at}g\left(t+\frac{x-\xi}{a}\right)\tilde{f}(\xi)d\xi,\quad(12)$$

$$v_{xx}(x,t)=\frac{1}{2}\big(\tilde{\varphi}''(x-at)+\tilde{\varphi}''(x+at)\big)+\frac{1}{2a}\tilde{\psi}'(x+at)-$$
$$-\frac{1}{2a}\tilde{\psi}'(x-at)+\frac{1}{2a^2}g(0)\Big(\tilde{f}(x-at)+\tilde{f}(x+at)\Big)-\frac{1}{a^2}g(t)\tilde{f}(x)+$$
$$+\frac{1}{2a^3}\int_{x-at}^{x}g'\left(t-\frac{x-\eta}{a}\right)\tilde{f}(\eta)d\eta+\frac{1}{2a^3}\int_x^{x+at}g'\left(t+\frac{x-\xi}{a}\right)\tilde{f}(\xi)d\xi,(13)$$

$$v_{tt}(x,t)=\frac{a^2}{2}\big(\tilde{\varphi}''(x-at)+\tilde{\varphi}''(x+at)\big)+\frac{a}{2}\Big(\tilde{\psi}'(x+at)-\tilde{\psi}'(x-at)\Big)+$$
$$+\frac{1}{2}g(0)\Big(\tilde{f}(x-at)+\tilde{f}(x+at)\Big)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x}g'\left(t-\frac{x-\eta}{a}\right)\tilde{f}(\eta)\,d\eta+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_x^{x+at}g'\left(t+\frac{x-\xi}{a}\right)\tilde{f}(\xi)\,d\xi,\quad (x,t)\in D_{[l-aT,+\infty),T}.\qquad(14)$$

Формулы (11) – (14) дают непрерывные ограниченные производные $v_t(x,t)$, $v_x(x,t)$, $v_{tt}(x,t)$, $v_{xx}(x,t)$ при непрерывных ограниченных функциях $\tilde{\varphi}''(x)$, $\tilde{\psi}'(x)$ и в случае $g(t)\in C^1[0,T]$ с непрерывной ограниченной функцией $\tilde{f}(x)$. При этом производные $v_{tt}(x,t)$, $v_{xx}(x,t)$ удовлетворяют уравнению (7), а функция $v(x,t)$ и производная $v_t(x,t)$ — условиям (8). Из этого следует, что использование в уравнении (7) неоднородности в виде произведения $\tilde{f}(x)g(t)$, где каждый из сомножителей зависит от своего аргумента, позволяет ослабить условия на функцию $f(x)$ до непрерывности $f(x)$ на луче по сравнению с условием непрерывной дифференцируемости произведения $\tilde{f}(x)g(t)$ из теоремы 7.6 [29] с выражением однозначного решения задачи (7), (8) по той же формуле Даламбера (10). Итак, задача Коши (7), (8) имеет ограниченное, дважды непрерывно дифференцируемое решение $v(x,t)$, $(x,t)\in D_{[l-aT,+\infty),T}$, и при исходных функциях $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$, $\tilde{f}(x)$, $g(t)$, удовлетворяющих условиям теоремы 1.

Определим функцию $z(x)$. Подставляя правые части формул (10) и (11) в условие (2) при $x=0$, получаем

$$a\big(\tilde{\varphi}(-at)+\tilde{\varphi}(at)\big)-a\beta\big(\tilde{\varphi}'(-at)+\tilde{\varphi}'(at)\big)-\beta\left(\tilde{\psi}(at)-\tilde{\psi}(-at)\right)+$$
$$+\int_{-at}^{at}\tilde{\psi}(\xi)d\xi+\int_0^t g(\tau)\int_{-(t-\tau)a}^{(t-\tau)a}\tilde{f}(\xi)d\xi d\tau+\frac{\beta}{a}\int_{-at}^{0}g\left(t+\frac{\eta}{a}\right)\tilde{f}(\eta)d\eta-$$
$$-\frac{\beta}{a}\int_0^{at}g\left(t-\frac{\xi}{a}\right)\tilde{f}(\xi)d\xi=2a\mu(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{15}$$

С учётом формул для функций $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$, $\tilde{f}(x)$, представленных выше, из равенства (15) для функции $z(-at)$ при $t\in\left[0,\hat{T}\right]$ имеем

$$\frac{1}{2}\big(z(-at)+\tilde{\varphi}(at)\big)-\frac{\beta}{2}\big(z'(-at)+\tilde{\varphi}'(at)\big)+\frac{at+\beta}{2a}\psi(0)-\frac{\beta}{2a}\tilde{\psi}(at)-$$
$$-\frac{2\beta+at}{4}t\psi'(0)+\frac{1}{2a}\int_0^{at}\tilde{\psi}(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}f(0)\int_0^t[\beta+(t-\tau)a]g(\tau)\,d\tau-$$
$$-\frac{\beta}{2a^2}\int_0^{at}g\left(t-\frac{\xi}{a}\right)\tilde{f}(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t g(\tau)\int_0^{(t-\tau)a}\tilde{f}(\xi)\,d\xi\,d\tau=\mu(t) \tag{16}$$

— дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $z(s)$. С заменой $s=-at$ для уравнения (16) получаем задачу Коши:

$$z'(s)-\frac{1}{\beta}z(s)=F_1(s)-\frac{2}{\beta}\mu\left(\frac{-s}{a}\right),\quad s\in[-aT_1,0],\quad z(0)=\varphi(0), \tag{17}$$

где функция $F_1(s)$ $\forall s\in\left[-a\hat{T},0\right]$ имеет вид

$$F_1(s)=\frac{1}{\beta}\tilde{\varphi}(-s)-\tilde{\varphi}'(-s)-\frac{1}{a}\tilde{\psi}(-s)+\frac{\beta-s}{a\beta}\psi(0)+\left(\frac{s}{a}-\frac{s^2}{2a\beta}\right)\psi'(0)+$$
$$+\frac{1}{a\beta}\int_0^{-s}\tilde{\psi}(\xi)\,d\xi+\frac{1}{a\beta}f(0)\int_0^{-s/a}(\beta-s-a\theta)g(\theta)\,d\theta-$$
$$-\frac{1}{a^2}\int_0^{-s}g\left(-\frac{s+\xi}{a}\right)\tilde{f}(\xi)\,d\xi+\frac{1}{a\beta}\int_0^{-s/a}g(\theta)\int_0^{-s-a\theta}\tilde{f}(\xi)\,d\xi d\theta.$$

Задача (17) имеет [30] единственное решение $z(s)=z_1(s)$, $s\in\left[-a\hat{T},0\right]$:

$$z_1(s)=\varphi(0)e^{s/\beta}-\int_s^0 e^{(s-\xi)/\beta}\left(F_1(\xi)-\frac{2}{\beta}\mu(-\xi/a)\right)d\xi. \tag{18}$$

При этом $z_1(0)=\varphi(0)$ по условию из (17). А из входящих в условие (6) равенств $\mu(0)=\varphi(0)-\beta\varphi'(0)$, $\mu'(0)=\psi(0)-\beta\psi'(0)$ следует, что

$$z_1'(0)=\frac{1}{\beta}z_1(0)+F_1(0)-\frac{2}{\beta}\mu(0)=\frac{2}{\beta}\varphi(0)-\frac{2}{\beta}\mu(0)-\varphi'(0)=\varphi'(0),$$
$$z_1''(0)=\frac{1}{\beta}z_1'(0)+\frac{2}{a\beta}\mu'(0)+F_1'(0)=\varphi''(0).$$

Из равенств $z_1(0)=\varphi(0), z_1'(0)=\varphi'(0), z_1''(0)=\varphi''(0)$ и формул (18), (9) следует, что начальная функция $\tilde{\varphi}(x)$ задачи Коши (7), (8) имеет ограниченную непрерывную производную $\tilde{\varphi}''(x)$ при $x\in[l-aT,+\infty)$.

По построению функции $z(x)=z_1(x)$ ограниченное, дважды непрерывно дифференцируемое решение $v(x,t)$ задачи (7), (8) удовлетворяет условиям (2), (3) и однозначно определяется формулой (10). Таким образом, формула (10) с учётом условий теоремы даёт на множестве $\Lambda_{l,T}\subset D_{[0,l],T}$ и однозначное ограниченное, дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(x,t)=v(x,t)$ задачи (1) – (3) на множестве $\Lambda_{l,T}$. Теорема 1 доказана.

Формулы для решения прямой задачи в некоторых подобластях

С рассчитанными значениями $z(x)$ функция $\tilde{\varphi}(x)$ в начальном условии задачи (7), (8) принимает вид

$$\tilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(0)e^{\frac{x}{\beta}}-\int_x^0 e^{\frac{(x-\theta)}{\beta}}\left(F_1(\theta)-\frac{2}{\beta}\mu\left(\frac{-\theta}{a}\right)\right)d\theta, & x\in\left[-a\hat{T},0\right],\\ \varphi(x), & x\in[0,+\infty).\end{cases}$$

С найденной функцией $\tilde{\varphi}(x)$ формула (10) даёт решение $u(x,t)$ задачи (1) – (3) на отдельных подмножествах области $\Lambda_{l,T}$ следующего вида:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\big)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^t g(\tau)\int_{x-(t-\tau)a}^{x+(t-\tau)a}f(\xi)\,d\xi d\tau,\qquad (x,t)\in\Delta_{(l/2),(\,l/(2a))},$$

где $\Delta_{(l/2),(\,l/(2a))}=\{(x,t)\colon\ at\leqslant x\leqslant l-at,\ 0\leqslant t\ \leqslant(l/(2a))\}$.

В областях, представляющих интерес для исследования обратной задачи, с учётом разделения в постановке обратной задачи значений функции $f(x)$ на известные: $\hat{f}(x)=f(x)$ при $x>l$, и требующие восстановления в рамках обратной задачи значения $f(x)$ при $x\in[0,l]$, имеем

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\big)+\frac{1}{2a}\Bigg[\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+$$
$$+\int_0^{t-(l-x)/a}g(\tau)\left(\int_{x-(t-\tau)a}^{l}f(\xi)d\xi+\int_l^{x+(t-\tau)a}\hat{f}(\xi)d\xi\right)d\tau+$$
$$+\int_{t-(l-x)/a}^{t}g(\tau)\int_{x-(t-\tau)a}^{x+(t-\tau)a}f(\xi)\,d\xi d\tau\Bigg],\qquad (x,t)\in\Delta^2,\qquad (19)$$

где $\Delta^2=\Lambda_{aT,T}\setminus\big(\Delta_{(l/2),l/(2a)}\cup\Lambda_{l+aT,T}\big)$, и

$$\Delta^2=\{(x,t)\colon\ \max\{at,l-at\}\leqslant x\leqslant l+at,\ \ 0\leqslant t\leqslant T\};$$

$$u(x,t)=e^{\frac{x-at}{\beta}}\left[\frac{\varphi(0)}{2}-\int_{x-at}^0\left(\frac{F_1(\theta)}{2}-\frac{1}{\beta}\mu\left(\frac{-\theta}{a}\right)\right)e^{\frac{-\theta}{\beta}}d\theta\right]+\frac{at-x}{2a}\psi(0)+$$

$$+\frac{\varphi(x+at)}{2}-\frac{(x-at)^2}{4a}\psi'(0)+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+\right.$$

$$+f(0)\int_0^{t-(x/a)}\big((t-\tau)a-x\big)g(\tau)d\tau+\int_l^{x+at}\hat{f}(\xi)\int_0^{t+(x-\xi)/a}g(\tau)\,d\tau d\xi+$$

$$\left.+\int_0^x f(\xi)\int_0^{t-(x-\xi)/a}g(\tau)d\tau d\xi+\int_x^l f(\xi)\int_0^{t+(x-\xi)/a}g(\tau)d\tau d\xi\right], \quad (20)$$

где $(x,t)\in\Delta^5$, и

$$\Delta^5=\Lambda_{l,T}\setminus\Lambda_{aT,T}=\{(x,t)\colon\ \max\{0,l-(T-t)/a\}\leqslant x\leqslant at,\ \ 0\leqslant t\leqslant T\}.$$

Обратная задача. Единственность решения обратной задачи

Определение 1. *Три функции $f(s)$, $\mu(\tau)$, $u(x,t)$, где $0\leqslant s\leqslant l$, $0\leqslant\tau\leqslant\hat{T}$, $(x,t)\in\Lambda_{l,T}$, $\hat{T}=T-l/a$, называются решением обратной задачи* (1) – (4), *если при заданных положительных значениях l,T,a,β, таких, что $l<aT$, и заданных функциях $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$, $\hat{f}(s)$, таких, что функция $\varphi(x)$ ограничена и дважды непрерывно дифференцируема при $x\geqslant 0$, функция $\psi(x)$ ограничена и непрерывно дифференцируема при $x\geqslant 0$, функция $\hat{f}(s)$ ограничена и непрерывна при $s>l$, выполняются условие* (5) *и условие*

$$h(t)\in C[0,T],\quad h(0)=\varphi(l),\quad h'(0)=\psi(l),\quad g(0)\neq 0, \quad (21)$$

функции $f(x)$, $\mu(t)$, $u(x,t)$ таковы, что $f(x)$ ограничена и непрерывна при $x\in[0,l]$ с условием $f(l)=\lim\limits_{x\to l+0}\hat{f}(x)$, для $\mu(t)$ выполняются условия (6), *$u(x,t)$ ограничена и дважды непрерывно дифференцируема на множестве $\Lambda_{l,T}$, а также на $\Lambda_{l,T}$ выполняются уравнение* (1), *условия* (2) *и* (3).

Теорема 2. *Пусть заданы положительные значения l,T,a,β, такие, что $l<aT$, и заданы функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$, удовлетворяющие ограничениям на них из условий теоремы 1, условиям* (5), (21), *а функция $\hat{f}(s)$ задана, ограничена и непрерывна при $s>l$. Тогда обратная задача* (1) – (4) *не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Предположим, от противного, существование двух различных решений обратной задачи (1) – (4) функций $f_1(s)$, $\mu_1(\tau)$, $u_1(x,t)$ и $f_2(s)$, $\mu_2(\tau)$, $u_2(x,t)$. Тогда, при заданных функциях $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$ с учётом условия (4), формула (19) для значений $t\in[0,l/a]$ при $x=l$ приобретает вид уравнения относительно функции $f(s)$:

$$h(t)=\frac{1}{2}\big(\varphi(l-at)+\varphi(l+at)\big)+\frac{1}{2a}\left[\int_{l-at}^{l+at}\psi(\xi)d\xi+\right.$$

$$\left.+\int_0^t g(\tau)\left(\int_{l-(t-\tau)a}^{l}f(\xi)d\xi+\int_l^{l+(t-\tau)a}\hat{f}(\xi)d\xi\right)d\tau\right],\qquad t\in[0,(l/a)]. \quad (22)$$

Изменяя порядок интегрирования в повторных интегралах и вычитая затем из уравнения (22) с функцией $f_1(s)$ на месте $f(s)$ это же уравнение (22) с функцией $f_2(s)$ на месте $f(s)$, получаем относительно разности функций $\Delta f(s) = f_1(s) - f_2(s)$, $s \in [0, l]$, уравнение

$$\frac{1}{2a}\int_{l-at}^{l}\left(\int_{0}^{t-(l-s)/a} g(\tau)d\tau\right)\Delta f(s)\,ds = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant (l/a). \qquad (23)$$

Дифференцируя уравнение (23) по аргументу t дважды, имеем

$$\Delta f(x) + \int_{x}^{l} K_1(x,s)\Delta f(s)\,ds = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad (24)$$

— линейное однородное уравнение Вольтерра II рода относительно функции $\Delta f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, в котором ядро $K_1(x,s)$ имеет вид

$$K_1(x,s) = \frac{1}{ag(0)}g'\left(\frac{s-x}{a}\right), \qquad 0 \leqslant x \leqslant s \leqslant l. \qquad (25)$$

В силу непрерывности ядра (25) уравнение (24) имеет [31] только нулевое решение. Итак, $\Delta f(s) \equiv 0$, и $f_1(s) = f_2(s) = f(s)$, $s \in [0, l]$.

При заданных функциях $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$, $\hat{f}(s)$ с учётом равенств $f(s) = f_1(s) = f_2(s)$ и условия (4), формула (20) при $x = l$ принимает для значений $t \in [(l/a), T]$ вид интегрального уравнения относительно функции $\mu(s)$:

$$\begin{aligned} h(t) = {}& \frac{\varphi(0)}{2}e^{\frac{l-at}{\beta}} + \frac{\varphi(l+at)}{2} + \frac{1}{2a}\Bigg[(at-l)\psi(0) - \frac{(l-at)^2}{2}\psi'(0) + \\ & + \int_0^{l+at}\psi(\xi)d\xi + f(0)\int_0^{t-(l/a)} g(\eta)\big((t-\eta)a - l\big)d\eta + \\ & + \int_0^l f(\xi)\int_0^{t-((l-\xi)/a)} g(\eta)d\eta d\xi + \int_l^{l+at}\hat{f}(\xi)\int_0^{t+((l-\xi)/a)} g(\eta)\,d\eta d\xi\Bigg] - \\ & - \int_{l-at}^{0} e^{\frac{(l-at-\theta)}{\beta}}\left(\frac{F_1(\theta)}{2} - \frac{1}{\beta}\mu\left(\frac{-\theta}{a}\right)\right)d\theta, \qquad (l/a) \leqslant t \leqslant T. \qquad (26) \end{aligned}$$

Вычитая из уравнения (26) с функцией $\mu_1(s)$ это же уравнение с функцией $\mu_2(s)$, имеем для разности $\Delta\mu(s) = \mu_1(s) - \mu_2(s)$, $s \in [0, T-(l/a)]$, однородное уравнение. После замен $\tau = t - (l/a)$ и $s = -\theta/a$ получаем

$$\int_0^{\tau} e^{\frac{-a}{\beta}(\tau - s)}\Delta\mu(s)ds = 0, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant T - (l/a). \qquad (27)$$

Дифференцируя равенство (27) по аргументу τ, получаем

$$\Delta\mu(\tau) - \frac{a}{\beta}\int_0^{\tau} e^{\frac{-a}{\beta}(\tau - s)}\Delta\mu(s)ds = 0, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant T - (l/a),$$

— уравнение Вольтерра II рода с единственным решением $\Delta\mu(\tau) \equiv 0$ [31], из чего можно заключить, что $\mu_1(\tau) = \mu_2(\tau) = \mu(\tau)$, $\tau \in [0, T-(l/a)]$.

Доказательство теоремы 2 завершается однозначным определением решения $u(x,t) = u_1(x,t) = u_2(x,t)$ прямой задачи в области $\Delta_{l,T}$ по формуле (10). Теорема 2 доказана.

Существование решения обратной задачи

Теорема 3. *Пусть заданы положительные значения* l, a, β, T, $l < aT$, *заданы функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$, *удовлетворяющие условиям теоремы 2, и условию* $h(t) \in C^2[0,T]$, *и задана функция* $\hat{f}(s)$ *непрерывная и ограниченная при* $s > l$. *Тогда существует решение обратной задачи* (1) – (4).

Доказательство. Дифференцируя дважды по аргументу t полученное при доказательстве теоремы 2 уравнение (22) с изменённым порядком дифференцирования в повторных интегралах, имеем

$$f(x) + \int_x^l K_1(x,s) f(s)\, ds = \chi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{28}$$

— линейное интегральное уравнение Вольтерра II рода относительно функции $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, где ядро $K_1(x,s)$ уравнения (28) определяется формулой (25), и $\forall x \in [0,l]$

$$\chi(x) = \frac{1}{g(0)}\Big[2h''\left(\frac{l-x}{a}\right) - a^2\big(\varphi''(x) + \varphi''(2l-x)\big) + a\psi'(x) -$$
$$- a\psi'(2l-x) - \frac{1}{a}\int_l^{2l-x} g'\left(\frac{2l-x-\xi}{a}\right)\hat{f}(\xi)d\xi\Big] - \hat{f}(2l-x). \tag{29}$$

Уравнение (28) имеет [31] единственное решение $f(x) \in C[0,l]$ в силу непрерывности ядра $K_1(x,s)$, $0 \leqslant x \leqslant s \leqslant l$, и функции $\chi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, что следует из наложенных на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$, $\hat{f}(s)$ в условиях доказываемой теоремы ограничений. Из уравнения (28) при $x = l$ непосредственно следует, что $f(l) = \lim\limits_{x \to l+0} \hat{f}(x)$. Таким образом, функция $f(x)$, как составная часть решения обратной задачи (1) – (4), определяется однозначно исходными данными обратной задачи (1) – (4).

Далее, выполняя в уравнении (26) замены $s = -\theta/a$ и $\tau = t - l/a$, а затем дифференцируя по τ на отрезке $[0, T-(l/a)]$ полученное после замен равенство, имеем относительно $\mu(\tau)$ функции линейное интегральное уравнение Вольтерра II рода

$$\mu(\tau) - \frac{a}{\beta}\int_0^\tau e^{-\frac{a}{\beta}(\tau - s)}\mu(s)ds = \sigma(\tau), \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant T - (l/a), \tag{30}$$

где правая часть уравнения (30) функция $\sigma(\tau)$ имеет $\forall \tau \in [0, T-(l/a)]$ вид

$$\sigma(\tau) = \frac{\varphi(0)}{2}e^{\frac{-a\tau}{\beta}} + \frac{\beta}{2a}\Big[2h'\left(\tau + \frac{l}{a}\right) - a\varphi'(a\tau + 2l) - \psi(0) + 2a\tau\psi'(0) -$$
$$- \psi(a\tau + 2l) + aF_1(-a\tau) - f(0)\int_0^\tau g(\theta)d\theta - \frac{1}{a}\int_0^l f(s)\, g\left(\frac{s}{a} + \tau\right)ds -$$
$$- \frac{1}{a}\int_l^{a\tau + 2l}\hat{f}(s)\, g\left(\tau + \frac{2l - s}{a}\right)ds\Big] - \frac{a}{2}\int_0^\tau e^{\frac{-a}{\beta}(\tau - s)}F_1(-as)ds. \tag{31}$$

Из условий теоремы 3 и в силу $f(x) \in C[0,l]$ имеем непрерывность правой части формулы (31) при $\tau \in [0, T-(l/a)]$. Тогда на этом же отрезке непрерывна и левая часть равенства (31) функция $\sigma(\tau)$. В силу этого, уравнение (30) имеет [31] единственное непрерывное решение $\mu(\tau)$, такое, что $\mu(0) = \sigma(0)$. С учётом формул (10), (12), (14), уравнения (30) и равенств

$$F_1(0) = \frac{\varphi(0)}{\beta} - \varphi'(0), \quad F_1'(0) = -\frac{\varphi'(0)}{\beta} + \varphi''(0) - \frac{2}{a\beta}\psi(0) + \frac{2}{a}\psi'(0),$$

следующих из представления для функции $F_1(x)$, получаем

$$\mu(0) = \sigma(0) = \frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{\beta}{2a}\left[2h'\left(\frac{l}{a}\right) - a\varphi'(2l) - \psi(0) - \psi(2l) + \right.$$

$$\left. + aF_1(0) - \frac{1}{a}\int_0^l f(s)\, g\left(\frac{s}{a}\right) ds - \frac{1}{a}\int_l^{2l} \hat{f}\,(s)\, g\left(\frac{2l-s}{a}\right) ds\right] = \varphi(0) - \beta\varphi'(0),$$

$$\mu'(0) = \frac{a}{\beta}\mu(0) + \sigma'(0) = \frac{a}{2\beta}\varphi(0) - a\varphi'(0) + \frac{\beta}{2a}\left[2h''\left(\frac{l}{a}\right) - a^2\varphi''(0) + \right.$$

$$+ a\psi'(0) - \big(f(0) + \hat{f}(2l)\big)g(0) - \frac{1}{a}\int_0^l f(s)\, g'\left(\frac{s}{a}\right) ds -$$

$$\left. - \frac{1}{a}\int_l^{2l} \hat{f}\,(s)\, g'\left(\frac{2l-s}{a}\right) ds\right] - \frac{a\beta}{2}F_1'(0) - \frac{a}{2}F_1(0) = \psi(0) - \beta\psi'(0)$$

— выполнение равенств $\mu(0) = \varphi(0) - \beta\varphi'(0)$, $\mu'(0) = \psi(0) - \beta\psi'(0)$ из ограничений (6), входящих в условия теоремы 1 и определения 1.

В итоге, решения уравнений (28) и (30) функции $f(x)$ и $\mu(t)$ удовлетворяют условиям следствия 1, по которому существует и единственное решение $u(x,t) \in C^2\big(\Lambda_{l,T}\big)$ прямой задачи (1) – (3). Теорема 3 доказана.

Оценка устойчивости решений обратной задачи

Теоремы 1, 2, 3, уравнения (28), (30) и формула (10) позволяют получить оценки устойчивости решений обратной задачи (1) – (4), для выведения которых можно воспользоваться леммой Гронуолла-Беллмана [21].

При заданных положительных значениях $a, \beta, T, l < aT$ для двух решений обратной задачи (1) – (4) троек функций $f_1(\xi), \mu_1(\tau), u_1(x,t)$ *и* $f_2(\xi)$, $\mu_2(\tau)$, $u_2(x,t)$, каждое из которых соответствует исходным функциям $\varphi_j(x)$, $\psi_j(x)$, $g_j(t)$, $h_j(t)$, $\hat{f}_j(s)$, $j = 1, 2$, удовлетворяющим условиям из теоремы 3, и таким, что существуют значения φ_0, φ_I, φ_{II}, ψ_0, ψ_I, g_{00}, g_0, g_I, h_0, h_I, h_{II}, f_0, f_{00}, μ_0, при которых выполняются ограничения

$$0 < g_{00} < \left|g_j(0)\right|, \quad \left|\varphi_j(x)\right| \leqslant \varphi_0, \quad \left|\varphi_j'(x)\right| \leqslant \varphi_I, \quad \left|\varphi_j''(x)\right| \leqslant \varphi_{II},$$

$$\left|\psi_j(x)\right| \leqslant \psi_0, \quad \left|\psi_j'(x)\right| \leqslant \psi_I, \quad \left|h_j(t)\right| \leqslant h_0, \quad \left|h_j'(t)\right| \leqslant h_I, \quad \left|h_j''(t)\right| \leqslant h_{II},$$

$$\left|g_j(t)\right| \leqslant g_0, \quad \left|g_j'(t)\right| \leqslant g_I, \quad \left|\hat{f}_j(s)\right| \leqslant \hat{f}_{00}, \quad \left|f_j(\xi)\right| \leqslant f_0, \quad \left|\mu_j(\tau)\right| \leqslant \mu_0,$$

$\forall x \in [0, +\infty)$ $\forall t \in [0, T]$ $\forall s \in (l, +\infty)$ $\forall \xi \in [0, l]$ $\forall \tau \in \big[0, \hat{T}\big]$, для $j = 1,2$, справедлива оценка

$$\|f_1(s) - f_2(s)\|_{C[0,l]} \leqslant \exp\left\{\frac{1}{a g_{00}} g_I l\right\} \frac{1}{g_{00}} \left[\frac{a g_0 + g_I l}{a} \left\|\hat{f}_1(s) - \hat{f}_2(s)\right\|_{C(l,2l]} + \right.$$

$$+ 2\|h_1''(t) - h_2''(t)\|_{C[0,l/a]} + a^2\|\varphi_1''(x) - \varphi_2''(x)\|_{C[0,2l]} + \big(f_0 + \hat{f}_{00}\big) \times$$
$$\times \left(|g_1(0) - g_2(0)| + \frac{l}{a}\|g_1'(t) - g_2'(t)\|_{C[0,l/a]}\right) + a\|\psi_1'(x) - \psi_2'(x)\|_{C[0,2l]}\Big].$$

С учётом представленной оценки для нормы $\|f_1(s) - f_2(s)\|_{C[0,l]}$, аналогично выглядит и оценка для нормы $\|\mu_1(\tau) - \mu_2(\tau)\|_{C[0,\hat{T}]}$, получаемая вслед за предыдущей из уравнения (30). При этом постоянные множители в правой части оценки для $\|\mu_1(\tau) - \mu_2(\tau)\|_{C[0,\hat{T}]}$ определяются через числа $l, T, a, \beta, \varphi_0, \varphi_I, \varphi_{II}, \psi_0, \psi_I, g_{00}, g_0, g_I, h_0, h_I, h_{II}, f_0, \hat{f}_{00}, \mu_0$, но имеют более сложную структуру по сравнению с множителями уже полученной оценки, в связи с чем представлены агрегированными значениями в виде:

$$\|\mu_1(\tau) - \mu_2(\tau)\|_{C[0,\hat{T}]} \leqslant \exp\left\{\frac{a}{\beta}T\right\}\Big[c_1\|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\|_{C^2[0,l+aT]} +$$
$$+ c_2\|\psi_1(x) - \psi_2(x)\|_{C^1[0,l+aT]} + c_3\|g_1(t) - g_2(t)\|_{C^1[0,T]} +$$
$$+ c_4\left\|\hat{f}_1(s) - \hat{f}_2(s)\right\|_{C(l,l+aT]} + c_5\|h_1'(t) - h_2'(t)\|_{C^1[0,T]}\Big],$$

где постоянные множители c_j, $j = 1,2,\dots,5$, зависят от значений l, T, a, β, φ_0, φ_I, φ_{II}, ψ_0, ψ_I, g_{00}, g_0, g_I, h_0, h_I, h_{II}, f_0, $\hat{f}_{00}$, μ_0.

После получения двух оценок для норм разностей коэффициентов $f(x)$ и $\mu(t)$ аналогичное неравенство для значений $|u_1(x,t) - u_2(x,t)|$ следует из устойчивости получаемого по формуле (10) решения $u(x,t)$ прямой задачи (1) – (3) на множестве $\Lambda_{l,T}$. Оценки для значений $|u_1(x,t) - u_2(x,t)|$ имеют различный вид на разных подмножествах множества $\Lambda_{l,T}$:

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant c_6\|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\|_{C^2[0,l+aT]} +$$
$$+ c_7\|\psi_1(x) - \psi_2(x)\|_{C^1[0,l+aT]} + c_8\|g_1(t) - g_2(t)\|_{C^1[0,T]} +$$
$$+ c_9\left\|\hat{f}_1(s) - \hat{f}_2(s)\right\|_{C(l,l+aT]} + c_{10}\|h_1'(t) - h_2'(t)\|_{C^1[0,T]} \qquad \forall (x,t) \in \Delta_/,$$

где постоянные значения c_j, $j = 6,7,\dots,10$, зависят от величин $l, T, a, \beta, \varphi_0$, φ_I, φ_{II}, ψ_0, ψ_I, g_{00}, g_0, g_I, h_0, h_I, h_{II}, f_0, f_{00}, μ_0 и область $\Delta_/$ имеет вид $\Delta_/ = \Lambda_{l,T} \backslash D_{[l,+\infty),T} = \{(x,t)\colon \max\{0, l-(T-t)a\} \leqslant x \leqslant l+at, 0 \leqslant t \leqslant T\}$;

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}|\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)| +$$
$$+ \frac{1}{2}|\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)| + t\|\psi_1(x) - \psi_2(x)\|_{C[x-at,x+at]} +$$
$$+ \frac{1}{4}\hat{f}_{00}t^2\|g_1(t) - g_2(t)\|_{C^1[0,T]} + \frac{1}{4}g_0t^2\left\|\hat{f}_1(s) - \hat{f}_2(s)\right\|_{C[x-at,x+at]}$$

$\forall (x,t) \in D_{[l,+\infty),T}$, где $D_{[l,+\infty),T} = \{(x,t)\colon\ l+at \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

Заключение

Для приближённого решения обратной задачи (1) – (4) при исходных функциях $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $\hat{f}(s)$ и, например, заданной вместо функции $h(t)$ при $\delta > 0$ функции $h_\delta(t)$, такой, что $\|h_\delta(t) - h(t)\|_{C[0,T]} \leqslant \delta$, при выполнении для исходных функций условий на них из теоремы 2 и ограничений (5), (21), могут быть использованы регуляризирующие алгоритмы [20, 21]. Также может быть применён итерационный метод приближенного решения обратной задачи (1) – (4), основанный на использовании уравнений (28), (30) для формирования приближающих искомые функции $f(x)$, $\mu(t)$ последовательностей $\{\tilde{f}^{(m)}(x)\}$ и $\{\tilde{\mu}^{(k)}(t)\}$ в виде

$$\tilde{f}^{(m+1)}(x) = \chi(x) - \int_x^l K_1(x,s)\tilde{f}^{(m)}(s)\,ds, \quad \tilde{f}^{(1)}(x) = \chi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

на первом этапе решения, и затем, на втором этапе, в виде

$$\tilde{\mu}^{(k+1)}(t) = \sigma(t) - \frac{a}{\beta}\int_0^t e^{-a(t-\xi)/\beta}\,\tilde{\mu}^{(k)}(\xi)d\xi, \;\; \tilde{\mu}^{(1)}(t) = \sigma(t), \;\; 0 \leqslant t \leqslant \hat{T},$$

где функции $K_1(x,s)$, $\chi(x)$, $\sigma(t)$ определяются формулами (23), (29), (31). Рекуррентные последовательности $\{\tilde{f}^{(m)}(x)\}$ и $\{\tilde{\mu}^{(k)}(t)\}$ сходятся [21] при выполнении условий на исходные функции. Для использования рекуррентных формул регуляризировать придётся лишь процедуры численного дифференцирования приближённо заданной функции $h_\delta(t) \in C[0,T]$, первые две производные которой требуются для вычисления по формулам (29) и (31). Затем значения приближённых пределов $\tilde{f}(x) \approx \lim\limits_{m\to+\infty} \tilde{f}^{(m)}(x)$ и $\tilde{\mu}(t) \approx \lim\limits_{k\to+\infty} \tilde{\mu}^{(k)}(t)$ дают возможность рассчитать вспомогательную функцию $z(x)$, и использовать её значения для продолжения начальных условий прямой задачи на полуинтервал $[l - aT, 0)$. После этого по формуле (10) остаётся получить значения функции $\tilde{u}(x,t)$, $(x,t) \in \Lambda_{l,T}$. В результате функции $\tilde{f}(x)$, $\tilde{\mu}(t)$, $\tilde{u}(x,t)$ составят приближённое решение обратной задачи (1) – (4), которое в силу представленных выше оценок устойчивости окажется близким к решению обратной задачи (1) – (4), соответствующему исходным функциям $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$, $\hat{f}(s)$.

При использовании описанного итерационного алгоритма некорректность обратной задачи связана лишь с необходимостью двукратного численного дифференцирования приближённо заданной функции $h_\delta(t)$.

Литература

1. *А.Н. Тихонов, А.А. Самарский*. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1951, 735 с.
2. *T.B. Yanovskaya, I.J. Asbel*. The determination of velocities in the upper mantle from the observations on p-waves // Geophys. J. Royal Astronom. Soc., 1964, v.8, №3, p.313-318.

3. *A.V. Baev, V.B. Glasko*. The solution of the inverse kinematic problem of seismology by means of a regularizing algorithm // Comput. Math. Math. Phys., 1976, v.16, №4, p.96-106.
4. *P.S. Schultz, J.F. Claerbout*. Velocity estimation and downward continuation by wavefront synthesis // Geophysics, 1978, v.43, p.691-714.
5. *M.I. Belishev*. Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC-method) // Inverse Problems, 1997, v.13, №5. p.R1-R45.
6. *O. Yilmaz*. Seismic data analysis. 1. – Tulsa: SEG, 2001, 2024 p.
7. *V.A. Il'in, V.V. Tikhomirov*. The wave equation with a boundary control at both endpoints and the complete vibration damping problem // Differential Equations, 1999, v.35, №5, p.697-708.
8. *V.A. Il'in, E.I. Moiseev*. Optimization of boundary controls of string vibrations // Russian Mathematical Surveys, 2005, v.60, №6, p. 1093-1119.
9. *A.A. Kholomeeva*. Optimal boundary control of string vibrations with a model nonlocal boundary condition of one of two types // Doklady Mathematics, 2011, v.83, №2, p.171-174.
10. *N.Yu. Kapustin, A.A. Kholomeeva*. Spectral solution of a boundary value problem for equation of mixed type // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2019, v.40, №7, p.981-983.
11. *B. Gopinath, M. Sondi*. Determination of the shape of the human vocal tract from acoustical measurements //Bell Syst. Tech. J., 1970, v.49, p.1195-1214.
12. *J.R. Cannon, P. Du Chateau*. An inverse problem for an unknown source term in a wave equation // SIAM J. Appl. Math., 1983, v.43, №3, p.553-564.
13. *A.V. Baev*. On the solution of an inverse problem for the wave equation with the help of a regularizing algorithm // Comput. Math. Math. Phys., 1985, v.25, №1, p.93-97.
14. *C. Cavaterra*. An inverse problem for semilinear wave equation // Boll. Un. Mat. Ital. (B), 1988, v.2, №3, p.695-711.
15. *M. Graselli*. Local existence and uniqueness for a quasilinear hyperbolic inverse problem // Appl. Anal., 1989, v.32, №1, p.15-30.
16. *A.M. Denisov*. Existence and uniqueness of solution to the problem of determining source term in a semilinear wave equation // J. Inv. Ill-Posed Problems, 2006, v.14, №4, p.342-350.
17. *A.M. Denisov*. Iterative method for solving an inverse coefficient problem for a hyperbolic equation // Differential Equations, 2017, v.53, №7, p.916-922.
18. *S.G. Golovina, E.V. Zakharov*. A numerical way of solving the inverse problem for the wave equation in a medium with local inhomogeneity // Moscow Univ. Comp. Math. Cybernetics, 2017, v.41, №4, p.173-178.

19. *A.M. Denisov*. Existence of a solution of the inverse coefficient problem for a quasilinear hyperbolic equation // Comput. Math. Math. Phys., 2019, v.59, №4, p.550-558.

20. *А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола*. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1983, 200 с.

21. *А.М. Денисов.* Введение в теорию обратных задач. – М.: Изд. Моск. ун-та, 1994, 208 с.

22. *S.G. Golovina, A.G. Razborov.* Reconstruction of the discontinuity line of a piecewise-constant coefficient in the two-dimensional internal initial-boundary value problem for the homogeneous heat equation // Comput. Math. and Modeling, 2014, v. 25, №1, p.49-56.

23. *I.V. Tikhonov, Y.S. Eidelman.* Uniqueness criterion in an inverse problem for an abstract differential equation with nonstationary inhomogeneous term // Mathematical Notes, 2005, v. 77, №1-2, p.246-262.

24. *S.R. Tuikina, S.I. Solov'eva.* Numerical method of determining the excitation source for the Fitzhugh–Nagumo mathematical model // Comput. Math. and Modeling, 2017, v.28, №3, p.301-309.

25. *A.V. Baev*. Numerical solution of the inverse scattering problem for the acoustic equation in an absorptive layered medium // Comput. Math. and Modeling, 2018, v.29, №1, p.83-95.

26. *A.I. Prilepko, V.L. Kamynin, A.B. Kostin.* Inverse source problem for parabolic equation with the condition of integral observation in time // J. Inverse Ill-Posed Problems, 2018, v.26, №4, p.523-539.

27. *A.M. Denisov, A.A. Efimov.* The inverse problem for an integro-differential equation and its solution method // Comput. Math. and Modeling, 2019, v.30, №4, p.403-412.

28. *S. Gavrilov.* A numerical method for determining the inhomogeneity boundary in the electrical impedance tomography problem in the case of piecewise-constant conductivity // Math. Models Comput. Simul., 2021, v.13, №4, p.579-585.

29. *А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов*. Лекции по математической физике. – М.: Изд. Моск. ун-та, 1993, 352 с.

30. *А.М. Денисов, А.В. Разгулин.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: МАКС Пресс, МГУ, 2009, 232 с.

31. *W.V. Lovitt.* Linear integral equations. – New York: McGraw-Hill Book Company, 1924, 253 p.