

Н. А. Андреев¹, С. Н. Смирнов²

ГАРАНТИРОВАННЫЙ ДЕТЕРМИНИСТСКИЙ ПОДХОД К СУПЕРХЕДЖИРОВАНИЮ: ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ*

Введение

Настоящая работа непосредственно продолжает статью [1] примыкает к серии статей [2], [3], [4], [5], [6] и [7], в которой развивается гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию. Краткий обзор статей из этой серии приведен [1]. Обзор релевантной литературы представлен в [2] на русском языке и в [8] на английском языке. Учитывая достаточно подробное изложения логики подхода в статье [1], мы отсылаем читателя к этой статье за минимальным описанием сведений, необходимых для целей настоящей работы. Изложим кратко лишь основные идеи.

Считаем, что на рынке представлено n рисков активов, а безрисковый актив имеет постоянную (дисконтированную) цену, равную единице, поэтому, с учетом предположения о самофинансируемости³, достаточно рассматривать динамику лишь дисконтированных цен рисков активов. В предлагаемом подходе описание неопределенной динамики цен с дискретным временем и конечным горизонтом, $t = 0, \dots, N$, происходит посредством задания априорной информации о движении цен — приращения вектора дисконтированных цен⁴ лежат в априорно заданных (непустых) компактах $K_t(\cdot)$, зависящих от предыстории цен⁵. Торговые ограничения, касаются только рисков

¹М.н.с. лаборатории по финансовой инженерии и риск-менеджменту НИУ ВШЭ, e-mail: nandreev@hse.ru.

²Доцент факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: s.n.smirnov@gmail.com.

*Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2020 году.

³Отсутствие притока или оттока средств в портфеле, хеджирующем обусловленное обязательства по проданному опциону.

⁴Далее мы будем вместо «дисконтированные цены» всюду писать просто «цены».

⁵Точкой обозначаются переменные, описывающие эволюцию цен. Более точно, это предыстория цен $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \dots, x_{t-1}) \in (\mathbb{R}^n)^t$ для K_t и D_t , в то время как для функций v_t^* и g_t , введенных ниже, это история цен $\bar{x}_t = (x_0, \dots, x_t) \in (\mathbb{R}^n)^{t+1}$.

активов — допустимые стратегии хеджирования¹ представляют собой выпуклые множества $D_t(\cdot)$, содержащие точку² 0 , зависящие от предыстории цен.

Далее рассматривается американский опцион и задаются функции $g_t(\cdot)$, описывающие потенциальные выплаты по опциону (зависящие от истории цен), которые предполагаются ограниченными сверху на множестве возможных траекторий цен. Основным объектом изучения является величина $v_t^*(\cdot)$, зависящая от истории цен, — точная нижняя грань для стоимости хеджирующего портфеля в некоторый момент времени (вплоть до экспирации опциона) при известной предыстории, гарантирующая, при определенном выборе допустимой хеджирующей стратегии, исполнение текущих и будущих обязательств, возникающих в отношении возможных выплат по американскому опциону. Непосредственно из экономического смысла суперхеджирования для $v_t^*(\cdot)$ выводятся уравнения Беллмана–Айзека, посредством выбора на каждом временном шаге «наилучшей» допустимой стратегии хеджирования для «наихудшего» сценария приращения цен.

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot), \quad t = N, \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

где³

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \varphi_t(\cdot, h), \quad (2)$$

$$\varphi_t(\bar{x}_{t-1}, h) = \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy], \quad (3)$$

Тем самым возникает динамическая игра и соответствующая задача динамического программирования. Для корректности постановки задачи везде далее будем считать, что выполнены предположения, перечисленные в теореме 3.1 из [2], а также предположения, перечисленные в пункте 1) замечания 3.1 из [2]. При этом удобно (формально) считать, что $g_0 = -\infty$ (отсутствие обязательств по выплатам в начальный момент времени); $g_t \geq 0$ для $t = 1, \dots, N$ в случае американского опциона. Мнозначные отображения $x \mapsto K_t(x)$ и $x \mapsto D_t(x)$, а также функции $x \mapsto g_t(x)$, предполагаются заданными для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$, $t = 1, \dots, N$. Поэтому функции $x \mapsto v_t^*(x)$ задаются уравнениями (1) для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$. В уравнениях (1) функции v_t^* , а также соответствующие точные верхние и нижние грани, принимают значения в расширенном множестве вещественных чисел $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ — двухточечной компактификации⁴ \mathbb{R} .

¹Структура хеджирующего портфеля т.е. вектор с координатами, равными количеству рискованных активов.

²Это означает, что допустимо все средства вкладывать в безрисковый актив

³Здесь и далее $hy = \langle h, y \rangle$ обозначает скалярное произведение.

⁴Окрестности точек $-\infty$ и $+\infty$ имеют вид $[\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$ и $(b, +\infty]$, $b \in \mathbb{R}$

Безарбитражность¹ (в том или ином смысле) в детерминистской постановке определяется в [3] — на рассматриваемом временном интервале определяется как безарбитражность на каждом шаге времени, а безарбитражность на одном временном шаге определяется как безарбитражность для любой предыстории цен. Вводятся различные определения безарбитражности для детерминистской модели финансового рынка — условие NDAO отсутствия арбитражных возможностей, условие NDSA отсутствия гарантированного арбитража и условие NDSAUP отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью².

Фундаментальную важность играет принцип структурной устойчивости (грубости) модели. Для модели рынка в нашем контексте этот принцип, с экономической точки зрения, естественно применить к свойству безарбитражности (в том или ином смысле), что может быть формализовано следующим образом. Грубое (робастное) условие безарбитражности означает сохранение этого свойства для заданной предыстории цен при достаточно малых в смысле метрики Помпею–Хаусдорфа возмущениях компактов $K_t(\cdot)$, где лежат приращения цен, описывающих неопределенность движения цен³. Установлены различные геометрические критерии для справедливости грубых условий безарбитражности, из которых нам пригодится далее следующий результат. Два условия: грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP и условие невырожденности динамики цен, что означает полноразмерность компактов $K_t(\cdot)$, т. е.

$$\text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \neq \emptyset, t = 1, \dots, N, \quad (4)$$

равносильны одному условию:

$$\text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset, t = 1, \dots, N. \quad (5)$$

В [4] установлен ряд результатов, касающихся полунепрерывности и непрерывности; в [5], в предположении отсутствия торговых ограничений при соответствующих предположениях, непрерывность доказана конструктивно, с оценкой модуля непрерывности, а в [1] оценка модуля непрерывности получена в общем случае торговых ограничений, при соответствующих предположениях, включая RNDSAUP.

В данной работе мы будем проводить численный эксперимент для тех моделей, для которых выполняются следующие предположения.

соответственно.

¹Неологизм, означающий отсутствие арбитража в некотором смысле, который может быть формализован различными способами.

²В случае отсутствия торговых ограничений, условия NDSA и NDSAUP эквивалентны.

³Если задание компактов $K_t(\cdot)$, описывающих движение цен, естественно считать заданными приближенно, то торговые ограничения $D_t(\cdot)$ естественно считать заданными точно.

- 1) Числовые функции $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$ удовлетворяют условию Липшица.
- 2) Компактозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ удовлетворяют условию Липшица (в метрике Помпею–Хаусдорфа).
- 3) Многочисленные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу и замкнуты.
- 4) Выполнено грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP и динамика цен невырождена, т. е. выполняется (5).

В этом случае множество B_t возможных траекторий цен рискованных активов на временном интервале $[0, t]$, т.е. $B_t = \{\bar{x}_t : x_0 \in K_0, \Delta x_1 \in K_1(x_0), \dots, \Delta x_t \in K_t(\bar{x}_{t-1})\}$, $t = 0, 1, \dots, N$, компактно, выполнено свойство ограниченности сверху функций выплат, а функции v_t^* , решения уравнений Беллмана–Айзека, удовлетворяют условию Липшица. Оценки констант Липшица¹ потребуются в данной работе. С этой целью введем обозначения: для множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\|A\|_2 = \sup_{h \in A} \|h\|_2, \quad (6)$$

где $\|h\|_2$ — евклидова норма²;

$$C_t^* = \bigvee_{s=t}^N C_s, \quad (7)$$

где константы C_t задаются соотношением

$$C_t = \sup_{x \in B_t} g_t(x) < \infty; \quad (8)$$

$$A_t^* = \sup_{x \in B_{t-1}} \|\hat{D}_t^{C_t^*}(x)\|_2, \quad (9)$$

где множество $\hat{D}_t^b(\cdot)$ задается соотношением

$$\hat{D}_t^b(\cdot) = D_t(\cdot) \cap J_t^b(\cdot), \quad (10)$$

$$J_t^b(\cdot) = \{\sigma_{K_t(\cdot)}(-h) \leq b\}, \quad b \geq 0.$$

Константы Липшица $L_{v_t^*}$ для v_t^* могут быть определены из следующих рекуррентных соотношений для $t = N, \dots, 1$:

$$\begin{aligned} L_{v_N^*} &= L_{g_N}, \\ L_{v_{t-1}^*} &= L_{g_{t-1}} \vee [L_{v_t^*}(L_{K_t} + 1) + A_t^* L_{K_t}], \quad t = N, \dots, 1, \end{aligned} \quad (11)$$

причем v_t^* ограничены на множестве возможных траекторий:

$$\sup_{x \in B_t} v_t^*(x) \leq C_t^*. \quad (12)$$

Следующий принципиально важный шаг в формализации задачи, предложенный в [6] — переход к смешанному расширению чистых

¹Эти оценки получены в [1].

²Т.е. $\|h\|_2 = \sqrt{\langle h, h \rangle}$ для $h = (h^1, \dots, h^n) \in \mathbb{R}^n$.

стратегий «рынка». Под этим понимается класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ распределений, в который входят только меры с носителем, содержащимся в $K_t(\cdot)$, и все меры, сосредоточенные в одной точке $y \in K_t(\cdot)$. Гарантированный результат в динамической игре, при переходе от чистых стратегий «рынка» к смешанным (из смешанного расширения чистых стратегий «рынка») не изменится. Цель введения смешанных стратегий «рынка» состоит в получении результатов об игровом равновесии.

При сделанных выше предположениях 1)–4) относительно $K_t(\cdot)$, $D_t(\cdot)$ и $g_t(\cdot)$ имеет место равновесие¹ для смешанного расширения $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}(K_t(\cdot))$, где $\mathcal{P}(X)$ — класс всех вероятностных мер на метрическом пространстве X с борелевской σ -алгеброй. Значение игры конечно и достигается для некоторой седловой точки – оптимальной пары $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$, $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$, где $\mathcal{P}^n(X)$ — класс вероятностных мер на X , сосредоточенных не более чем в $n + 1$ точке из X . Задача ценообразования сводится к уравнениям Беллмана для $t = N, \dots, 1$:

$$v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot),$$

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \sup_{Q \in \mathcal{Q}_t(\cdot)} \left[\int w_t(\cdot, y) Q(dy) - \sigma_{D_t(\cdot)} \left(\int y Q(dy) \right) \right], \quad (13)$$

где $\mathcal{Q}_t(\cdot) = \{Q \in \mathcal{P}(K_t(\cdot)) : \int y Q(dy) \in \text{bar}(D_t(\cdot))\}$, а функции w_t задаются соотношением²

$$w_t(\bar{x}_{t-1}, y) = w_t(x_1, \dots, x_{t-1}, y) = v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y). \quad (14)$$

Тем самым, задача ценообразования обусловленных обязательств по опциону (нахождение функций $v_t^*(\cdot)$) отделена от задачи их хеджирования (нахождение стратегии хеджирования $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$).

В рамках гарантированного детерминистского подхода в [7] предлагается двухэтапный способ решения задачи ценообразования для суперхеджирования обусловленных обязательств по проданному американскому опциону. Задача нахождения точной верхней грани в уравнениях Беллмана (13) разбивается на два этапа для каждого $t = 1, \dots, N$, начиная с $t = N$.

Этап 1. Для каждого³ $z \in \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot))$ решаем задачу условной оптимизации по $Q \in \mathcal{P}_t(\bar{x}_{t-1})$ при дополнительном ограничении $\int y Q(dy) = z$, т.е. находим

$$u_{t, \bar{x}_{t-1}}(z) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\bar{x}_{t-1}), \int y Q(dy) = z} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy); \quad (15)$$

¹Это утверждение справедливо и без предположения о невырожденности динамики цен.

²Для удобства обозначений в последней переменной функций v_t^* сделана «аддитивная» замена переменных.

³Непустота множества $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot))$ равносильна условию безарбитражности NDSAUP (см. [3]), которое является следствием грубого условия безарбитражности RNDSAUP.

Эта задача сводится к построению вогнутой оболочки функции Беллмана $u \mapsto w_t(\cdot, u)$, однако вычисление этой вогнутой оболочки достаточно проводить не для всех точек из¹ $\text{conv}(K_t(\cdot))$, а только для тех, которые лежат в $\text{bar}(D_t(\cdot))$.

Этап 2. Решаем задачу максимизации по $z \in \text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1})) \cap \text{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1}))$ функции $z \mapsto u_{t, \bar{x}_{t-1}}(z) - \sigma_{D_t(\bar{x}_{t-1})}(z)$, т.е. находим

$$\rho'_t(\cdot) = \sup_{z \in \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot))} [u_{t, \cdot}(z) - \sigma_{D_t(\cdot)}(z)], \quad (16)$$

после чего полагаем

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \rho'_t(\cdot). \quad (17)$$

Что касается второго этапа, то для приложений характерно задание $D_t(\cdot)$ в аналитической форме, что обычно позволяет явно найти опорную функцию этого множества, т.е. $\sigma_{D_t(\cdot)}(z)$, принимающую конечные значения для $z \in \text{bar}(D_t(\cdot))$. Это выполняется, в том числе, для наших модельных примеров, на которых проводится численный эксперимент. Функция $z \mapsto u_{t, \cdot}(z) - \sigma_{D_t(\cdot)}(z)$ является вогнутой; максимизация (16) вогнутой функции на выпуклом ограниченном множестве $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot))$ является классической задачей.

В [1] получен результат о чувствительности решений уравнений Беллмана–Айзекса к малым возмущениям компактов, описывающих неопределенность движения цен. Это позволяет оценивать точность приближенного решения. Допустим, что из некоторых соображений известны погрешности $\delta_t(\cdot)$ в определении $K_t(\cdot)$ на шаге² $t = 0, \dots, N$. Или же, в зависимости от решаемой задачи, можно дать иную интерпретацию величинам $\delta_t(\cdot)$, считая их требуемыми погрешностями при численной аппроксимации $K_t(\cdot)$ «приближенным» компактнозначным отображением. Обозначим

$$\check{K}_t(\cdot) = [K_t(\cdot)]^{\delta_t(\cdot)}, \quad t = 1, \dots, N, \quad (18)$$

где использованы обозначения $[A]^\delta = A + \bar{B}_\delta(0)$, $\delta > 0$, а $\bar{B}_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq \delta\}$ — замкнутый шар радиуса δ с центром в нуле³. Будем называть новую динамику рынка, задаваемую (18), закруглением на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка. Обозначим

$$\check{A}_t^* = \sup_{x \in \check{B}_{t-1}} \|D_t^{\check{C}_t^*}(x)\|_2, \quad (19)$$

¹Проводить вычисление вогнутой оболочки функции Беллмана для всех точек из компакта $\text{conv}(K_t(\cdot))$ имеет смысл, если проводится численный анализ для заданной модели динамики рынка, но при различных торговых ограничениях, которые учитываются только на этапе 2.

²Логично, однако, считать, что $\delta_0 = 0$.

³Заметим, что если K — непустой компакт, то расстояние Помпею–Хаусдорфа $h_\rho(K, [K]^\delta) = \delta$.

где \check{B}_t — множество возможных траекторий для закругления на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка, т. е.

$$\check{B}_t = \{\bar{x}_t : x_0 \in \check{K}_0, \Delta x_1 \in \check{K}_1(x_0), \dots, \Delta x_t \in \check{K}_t(\bar{x}_t)\},$$

константы \check{C}_t^* определяются соотношениями

$$\check{C}_t^* = \bigvee_{s=t}^N \check{C}_s,$$

$$\check{C}_t = \sup_{x \in \check{B}_t} g_t(x),$$

а множество $\hat{D}_t^b(\cdot)$ задается соотношением (10). Будем далее предполагать, что функции $\delta_t(\cdot)$ равномерно ограничены на B_{t-1} (малыми) константами, т.е.

$$\delta_t^* = \sup\{\delta_t(x), x \in B_{t-1}\} < \infty, \quad t = 1, \dots, N. \quad (20)$$

Если для исходной системы выполнено грубое условие безаритражности RNDSAUP, компактозначное отображение $K_t(\cdot)$ и функции $g_t(\cdot)$ удовлетворяют условию Липшица, многозначные отображения $D_t(\cdot)$ замкнуты и полунепрерывны снизу, а расстояния Помпею–Хаусдорфа между компактами $K_t(x)$ исходной системы и компактами $\tilde{K}_t(x)$ возмущенной системы равномерно по предыстории цен $x \in B_{t-1}$ ограничены (малыми) константами δ_t^* , тогда для погрешностей ε_t в решении уравнений Беллмана–Айзекса, задаваемых формулой

$$\varepsilon_t = \sup_{x \in \check{B}_t} |v_t^*(x) - \tilde{v}_t^*(x)|, \quad (21)$$

справедливы рекуррентные неравенства

$$\begin{aligned} \varepsilon_N &= 0; \\ \varepsilon_{t-1} &= (L_{v_t^*} + \check{A}_t^*) \delta_t^* + \varepsilon_t, \quad t = N, \dots, 1, \end{aligned} \quad (22)$$

в которых параметры \check{A}_t^* задаются соотношением (19), а константы Липшица $L_{v_t^*}$ решений для исходной системы задаются рекуррентными уравнениями (11). Последовательность $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_N$, задаваемая формулами (22), является невозрастающей неотрицательной. Если величины $\delta_t(\cdot)$ интерпретируются как требуемые погрешности при численной аппроксимации $K_t(\cdot)$ «приближенным» компактозначным отображением, то данный результат позволяет выбрать эти требуемые погрешности аппроксимации таким образом, чтобы ε_0 , погрешность вычисления премии при продаже опциона, не превосходила заданной величины ε^* . Например, если требуемые погрешности аппроксимации выбираются постоянными, $\delta_t^* \equiv \delta^*$, $t = 1, \dots, N$, то $\varepsilon_t \leq \delta^* \sum_{s=t+1}^N (L_{v_s^*} + \check{A}_s^*)$, так что достаточно выбрать точность расчетов

$$\delta^* = \varepsilon^* \left(\sum_{s=1}^N (L_{v_s^*} + \check{A}_s^*) \right)^{-1}. \quad (23)$$

В [1] обсуждаются принципы выбора численных методов решения задачи, учитывающие специфику модели. Будем предполагать далее, что функции выплат по американскому опциону $g_t(\cdot)$, а также торговые ограничения, описываемые посредством $D_t(\cdot)$, известны точно, и сконцентрируем внимание на описывающих неопределенность движения цен компактнозначных отображениях $K_t(\cdot)$, задание которых естественно считать приближенным. Подчеркнем, что для того, чтобы решение задачи ценообразования для возмущенной системы, рассматриваемой с целью получения приближенного решения для исходной системы, не потеряло бы экономический смысл (обладало бы качественными свойствами, аналогичными поведению исходной системы), необходимо сохранение условий структурной устойчивости. При заданной погрешности следует убедиться в выполнении грубого условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP и для возмущенной системы. Везде далее будем предполагать, что неопределенная динамика цен является невырожденной¹, — компакты $K_t(\cdot)$ являются полноразмерными, т.е. выполняется условие (4).

Один из наиболее важных выводов, сделанных в [1], состоит в том, что для получения адекватного численного алгоритма достаточно выбрать субоптимальное покрытие для случая, когда в каждый момент времени точки из траекторий для приближенной системы лежат на решетке². Выберем решетку в простейшем, удобном для расчетов виде:

$$L_\theta = \{(k_1\theta, \dots, k_n\theta) : k_1 \in \mathbb{Z}, \dots, k_n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (24)$$

где $\theta > 0$ шаг решетки (сетки). Для задания приближенного множества $\tilde{K}_t(\cdot)$ выберем конечное множество точек решетки L_θ , попадающих в $\check{K}_t(\cdot)$, т.е.

$$\tilde{K}_t(\cdot) = L_\theta \cap \check{K}_t(\cdot), \quad (25)$$

где множества $\check{K}_t(\cdot)$ — закругление на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка (18). Достаточно малые шаги решетки обеспечат необходимую близость приближенной модели рынка к исходной, т.е. путем малого в смысле метрики Помпею–Хаусдорфа возмущения $\tilde{K}_t(\cdot)$ компактов $K_t(\cdot)$; используя (22), можно оценить погрешность, возникающую при замене исходной системы на приближенную. При этом следует выбирать шаги

¹Невырожденность динамики цен в исходной постановке задачи является вполне естественной. Однако вырожденная динамика цен может возникнуть, если перейти к (математически) эквивалентной задаче, где компакты $K_t(\cdot)$ заменены на носители наиболее неблагоприятных смешанных стратегий рынка (в случае, когда они достигаются), сосредоточенных не более чем в $n + 1$ точке, см. пример из [8]. Кроме того, вырожденность может возникнуть при (неудачной) численной аппроксимации динамики цен.

²Под решеткой в \mathbb{R}^n понимается дискретная аддитивная подгруппа \mathbb{R}^n максимального ранга, изоморфная \mathbb{Z}^n , т.е. представимая в виде $\{\sum_{i=1}^n z_i v_i : z_i \in \mathbb{Z}\}$, где вектора $v_i \in \mathbb{R}^n$ линейно независимы (базис решетки).

решетки (24) настолько малыми, чтобы в каждый момент времени t и для любой траектории предыстории цен (а таких траекторий, в итоге, будет конечное число) множество $\tilde{K}_t(\cdot)$ содержало бы не менее $n + 1$ аффинно независимых точек — в противном случае, невырожденность динамики цен потеряется.

Представляются полезными следующие рекомендации. Пусть для исходной модели выполняется условие RNDSAUP. Если величины $\delta_t(\cdot)$ допускают интерпретацию требуемых погрешностей при численной аппроксимации исходной динамики рынка $K_t(\cdot)$ приближенным компактнозначным отображением, то разумно потребовать чтобы величина δ_t^* была достаточно малой, чтобы сохранить структурную устойчивость. Если же $\delta_t(\cdot)$ интерпретируется как известная погрешность в определении $K_t(\cdot)$ на шаге $t = 0, \dots, N$, то имеет смысл перейти к новой динамике рынка, отвечающей (18) — к закруглению на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка, что окажет положительное влияние для сохранения структурной устойчивости.

В рамках двухэтапного способа для решения задачи ценообразования при суперхеджировании обусловленных обязательств по проданному американскому опциону, описанному выше, возникает необходимость выбора подходящих численных алгоритмов построения вогнутой оболочки функции на первом этапе, а также максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве на втором этапе. Везде далее будем предполагать, что выполнены описанные выше условия, требуемые для справедливости оценок (22). Для решения задачи (15), возникающей на первом из двух этапов, необходимо численно построить вогнутую оболочку функции Беллмана. Под вогнутой оболочкой числовой функции f , заданной на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, мы понимаем¹ функцию $\hat{f}(z)$, $z \in \text{conv}(X)$ является наименьшей вогнутой функцией среди вогнутых на $\text{conv}(X)$ функций, мажорирующих функцию f на множестве X . На относительной внутренности множества $\text{conv}(X)$ функция f^* непрерывна и совпадает с поточечной точной нижней гранью аффинных функций, ее мажорирующих.

В [1] предлагается свести построение вогнутой оболочки неотрицательной функции², заданной на конечном множестве $X = \{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ (что соответствует выбранному выше способу построения приближенного решения задачи (15)) к эквивалентной задаче — к построению выпуклой оболочки множества $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, состоящего из $2k$ точек:

$$A = \{(x_1, f(x_1)), \dots, (x_k, f(x_k)), (0, f(x_1)), \dots, (0, f(x_k))\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, \quad (26)$$

¹Альтернативно, вогнутую оболочку функции f можно определить как функцию, чей подграфик является выпуклой оболочкой подграфика f (в частности, область ее определения — выпуклая оболочка области определения f).

²Для американского опциона решения уравнений (1) неотрицательны.

что представляет собой выпуклый многогранник \hat{A} . Условимся называть последнюю координату высотой. У многогранника \hat{A} имеется нижняя грань, находящаяся в гиперплоскости в \mathbb{R}^{n+1} нулевой высоты. Проекция этой грани на \mathbb{R}^n , посредством удаления последней координаты (высоты), даст выпуклый многогранник \hat{X} — выпуклую оболочку множества X , а проекция крайних точек множества A , имеющих нулевую высоту, даст крайние точки множества X . Построение выпуклой оболочки конечного множества является хорошо разработанным разделом вычислительной геометрии¹.

В настоящей публикации подробно обсуждаются алгоритмы решения задачи. Представлены результаты численного эксперимента на специально подобранных модельных примерах.

Алгоритмы решения задачи ценообразования

Для нашей задачи представляют интерес следующая проблема выпуклой оболочки: получить описание многогранника, образованного выпуклой оболочкой конечного множества. В первую очередь, это описание посредством построения множества всех его вершин, или, что равносильно, крайних точек этого множества. Это означает, что требуется найти все точки заданного конечного множества $S \subseteq \mathbb{R}^k$, которые не являются избыточными², в том смысле, что они не могут быть представлены в виде выпуклой комбинации остальных точек.

Что касается поиска вершин, то проверка того, является ли заданная точка из множества S избыточной, сводится к решению задачи линейного программирования с k переменными с $m - 1$ ограничениями, где m — число точек в S . Наивный метод последовательного тестирования точек приводит к не самому эффективному алгоритму с точки зрения вычислительной сложности. Описание более эффективных алгоритмов можно найти, например, в книге [9], в главах 26 и 49. Задача сравнения различных численных методов выходит за рамки данной статьи, поэтому мы ограничимся ссылкой на работу [10]. Мы всего лишь задаемся целью подобрать пригодный на практике алгоритм, позволяющий решать типичные задачи суперхеджирования с торговыми ограничениями.

Одномерные задачи (с одним рисковым активом) могут, например, решаться при помощи дважды примененного преобразования Фенхеля³,

¹В особенности это относится к двумерному и трехмерному пространству.

²Интерпретация экономического характера, в терминах гарантированного подхода к суперхеджированию, заключается в том, что отбрасывание этих точек не приведет к потере возможных сценариев для наиболее неблагоприятных смешанных стратегий рынка, сосредоточенных не более чем в $n + 1$ точке.

³В нашем случае преобразование Фенхеля понимается как операция сопряжения для вогнутых функций, которое обычно определяется посредством формулы $f^*(y) = \inf\{\langle y, x \rangle - f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$.

см. раздел 3.2.1 в обзоре [11], а также прикладную работу [12]. Однако нам интереснее случай опционов Rainbow (т.е. с несколькими рисковыми активами).

Нам представляется важной устойчивостью численного решения по отношению к малым возмущениям исходных данных. В этом плане выглядит привлекательным алгоритм вычисления вершин выпуклой оболочки конечного множества точек S в случае многомерного пространства, предложенный в недавней работе [13] и названный авторами All Vertex Triangle Algorithm (AVTA). Алгоритм AVTA может вычислять аппроксимацию S , в частности, если входные данные являются возмущением¹ S . Нами была независимо выполнена программная реализация AVTA, однако алгоритм продемонстрировал более медленную работу на тестовых примерах, чем популярный алгоритм² Quickhull [14].

Во вторую очередь, нам потребуется описание всех граней размерности на единицу меньшей, чем размерность многогранника; договоримся такие грани называть гипергранями³. Это необходимо для решения оптимизационной задачи (16) на втором этапе предложенного нами метода. Во-первых, проекция гиперграней посредством удаления последней координаты (высоты), даст разбиение⁴ выпуклого многогранника \hat{X} на многогранники, на которых полученная выпуклая оболочка функции Беллмана для приближенной модели является аффинной⁵. Во-вторых, максимальный наклон n -мерных граней выпуклого многогранника \hat{A} , прилежащих к $n - 1$ -мерным граням выпуклого многогранника \hat{X} , представляет собой константу Липшица выпуклой оболочки функции Беллмана для приближенной модели, что полезно для оценки точности решения приближенного решения задачи (16). При этом нас интересует не только описание всех n -мерных граней выпуклого многогранника \hat{A} (посредством соответствующих линейных неравенств), но и двойное описание, включая отношение инцидентности между вершинами и гипергранями (посредством матрицы

¹Отметим, что множество возмущенных вершин S' (близкое к S в метрике Помпею-Хаусдорфа) может сильно отличаться от множества вершин выпуклой оболочки S' .

²Этот алгоритм реализован авторами в виде программного комплекса qhull, доступного на специальной веб-странице <http://www.qhull.org>, где также приводится подробная документация. Алгоритм Quickhull хорошо себя зарекомендовал для решения задач малой размерности, что характерно для проблемы суперхеджирования.

³Иногда в литературе их называют фасетами, от англ. facet.

⁴Пересечение любых двух многогранника этого разбиения либо равно общей их грани, либо пустое. Если все многогранники этого разбиения являются симплексами, то разбиение образует триангуляцию.

⁵Отметим, что для проекции грани, выпуклого многогранника \hat{A} , не являющейся симплексом, наиболее неблагоприятная смешанная стратегия рынка, сосредоточенная не более чем в $n + 1$, с заданным барицентром, лежащем в проекции этой грани может быть определена неединственным образом.

инцидентности). К таким алгоритмам относится, например, примально-дуальный, предложенный в [15], позволяющий по описанию вершин строить описание гиперграней и наоборот. В работе [16] приведены результаты, сравнения работы параллельных и последовательных кодов в задаче перечисления вершин / граней для широкого диапазона выпуклых многогранников, от простых до вырожденных, на основе метода двойного описания. Результаты тестирования показывают, что вычислительная сложность решения задачи сильно различается в зависимости от алгоритма и входных данных. Отметим, что на наш взгляд представляет интерес недавно появившийся алгоритм [17], привлекательный своей интуитивной простотой. Для малых размерностей можно пользоваться одним из алгоритмов входящим в программный комплекс qhull.

Для численного решения задачи ценообразования рекомендуется следовать следующей последовательности действий, предваряющих начало расчета значений функции Беллмана на выбранной решетке.

1°. Найдем множество возможных траекторий: $B_0 = K_0$, а для $t = 1, \dots, N$ рекуррентно построим

$$B_t = \{x_0, \dots, x_{t-1}, x_t\} : \bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}, x_t \in K_t(\bar{x}_{t-1})\}$$

2°. Оценим константы C_t — максимальные значения функций выплат g_t на множестве возможных траекторий B_t , а затем константы C_t^* по формуле (7).

3°. Оценим величины A_t^* по формуле (9), где фигурирует задаваемое (10) компактное¹ множество $\hat{D}_t^b(\cdot) = D_t(\cdot) \cap J_t^b(\cdot)$; где $J_t^b(\cdot) = \{\sigma_{K_t(\cdot)}(-h) \leq b\}$, $b \geq 0$.

4°. Оценим константы Липшица решения уравнений Беллмана–Айзекса $L_{v_t^*}$ по формуле (11).

5°. Построим множество возможных траекторий: \check{B}_t для загрубленной модели динамики рынка (18), $t = 1, \dots, N$.

6°. Оценим константы \check{A}_t^* используя формулу (19).

7°. Выберем желаемую точность ε^* вычисления премии при продаже опциона и выберем по формуле (23) требуемую погрешность δ^* при численной аппроксимации $K_t(\cdot)$ “приближенным” компактнозначным отображением.

8°. Выберем решетку L_θ в «прямоугольном» виде, с постоянным шагом $\theta = \frac{\delta^*}{\sqrt{2}}$ по каждой координате:

$$L_\theta = \{(k_1\theta, \dots, k_n\theta) : k_1 \in \mathbb{Z}, \dots, k_n \in \mathbb{Z}\}. \quad (27)$$

9°. Для задания приближенного множества $\check{K}_t(\cdot)$ выберем конечное множество точек решетки L_θ , попадающих в $\check{K}_t(\cdot)$, т.е.

$$\check{K}_t(\cdot) = L_\theta \cap \check{K}_t(\cdot), \quad (28)$$

¹По предложению 3.1 из [4] множество $\hat{D}_t^b(\cdot)$ компактно для всех b тогда и только тогда, когда выполняется условие RNDSAUP.

где множества $\check{K}_t(\cdot)$ — расширенные компакты заглубленной системы (18).

10°. Строим конечное множество возможных траекторий \check{B}_t для приближенной модели динамики рынка, описываемой при помощи (28) и (27), $t = 1, \dots, N$.

Решение задачи хеджирования

Нахождение хеджирующей стратегии было отделено от задачи ценообразования, как только мы перешли от решений уравнений Беллмана–Айзекса к уравнениям (13). Если задача ценообразования решена, аналитически или численно, то для нахождения соответствующей хеджирующей стратегии можно, например, решать задачу минимизации, включая нахождение минимизатора в (2), где минимизируемая функция $h \mapsto \varphi_t(\cdot, h)$ задается посредством (3). Более подробное обсуждение задачи хеджирования можно найти в [7], в разделах 5 и 6.

Для обеспечения устойчивости расчета хеджирующей стратегии и ее единственности, можно применить к полученной вогнутой оболочке функции Беллмана сглаживающие преобразования. Причина заключается не только в регуляризации численного метода, но и в наличии модельного риска. Любая модель лишь приблизительно описывает реальность — что-то описывает хорошо, что-то не очень, а что-то вообще не учитывает. В нашей модели не учитываются транзакционные издержки, которые в действительности могут иметь существенное значение. Это в особенности относится к случаю когда происходит перестройка портфеля, связанная с артефактами модели или численного метода.

Так, например, применение популярной на практике разностной схемы метода Кранка–Никольсона численного решения задачи ценообразование опционов в рамках модели Блэка–Шоулса (также не учитывающей транзакционные издержки) может вызвать паразитные колебания, приводящие к (необоснованной) перестройке хеджирующего портфеля, а на практике — к потерям на транзакционных издержках. В работе [18] на примере паспортного опциона показано, как эта проблема может быть снята посредством применения монотонных разностных схем.

В нашем случае негладкость функции Беллмана может возникать по существу постановки задачи, если она обусловлена конкретным видом модели динамики рынка, торговых ограничений и функций выплат по опциону. Однако в значительно большей мере негладкость будет связана со способом аппроксимации исходной динамики рынка $K_t(\cdot)$ приближенным компактнозначным отображением, значения которого — конечные множества точек решетки L_θ . В последнем случае рекомендация по резкой смене хеджирующей стратегии в точках негладкости функции Беллмана будет связана с артефактом численного решения задачи.

Учитывая приведенные выше соображения, представляется разумным, с точки зрения здравого инженерного смысла, незначительно увеличивая требования к резервам, добиться гладкости приближенной функции Беллмана. Для этой цели мы можем использовать преобразование Моро¹ [19], или более общее преобразование, предложенное Бертсекасом [20]. Имея в виду, что в нашем случае эти преобразования производятся с вогнутыми, а не выпуклыми функциями, преобразование Моро $\mathfrak{M}_\mu f$ функции f определяется как супремальная конволюция² функций f и g , где $g(x) = -\mu\|x\|_2^2$, $\mu > 0$, а преобразование Бертсекаса $\mathfrak{B}_{\mu,\lambda} f$ функции f — как супремальная конволюция функций f и \tilde{g} , где $\tilde{g}(x) = -\mu\|x\|_2^2 - \langle \lambda, x \rangle$, $\mu > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Поскольку $g(0) = \tilde{g}(0) = 0$, то $\mathfrak{M}_\mu f \geq f$ и $\mathfrak{B}_{\mu,\lambda} f \geq f$. Легко видеть, что эти два преобразования связаны: с одной стороны, $\mathfrak{M}_\mu f = \mathfrak{B}_{\mu,0} f$, а с другой стороны $\mathfrak{B}_{\mu,\lambda} f(x) = -\langle \lambda, x \rangle + \mathfrak{M}_\mu [f(\cdot) + \langle \lambda, \cdot \rangle]$.

С другой стороны, для определения хеджирующей стратегии достаточно знать барицентр оптимальной стратегии рынка $\int y Q_{t,\cdot}^*(dy)$, вычисление которого может проводиться в ходе описанной выше двухэтапной процедуры, см. (15) и (16). Рассмотрим седловую $h_t^*(\cdot), Q_{t,\cdot}^*$ точку в динамической игре «хеджера» и «рынка» на шаге t в для функционала $F_{t,\cdot}(h, Q) = \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy)$:

$$F_{t,\cdot}(h_t^*(\cdot), Q_{t,\cdot}^*) = \min_{h \in D_t(\cdot)} F_{t,\cdot}(h, Q_{t,\cdot}^*) = \max_{Q \in \mathcal{P}(K_t(\cdot))} F_{t,\cdot}(h_t^*(\cdot), Q) \quad (29)$$

Нахождение минимизаторов (по переменной h) в (29) равносильно нахождению максимизаторов $S_t(\cdot)$ для линейной функции $h \mapsto h \int y Q_{t,\cdot}^*(dy)$ на замкнутом выпуклом множестве³ $D_t(\cdot)$, а значение максимума такой функции есть значение опорной функция $\sigma_{D_t(\cdot)}$ в точке $\int y Q_{t,\cdot}^*(dy)$. Множества $D_t(\cdot)$. В соответствии со следствием 23.5.3 из [24] $S_t(\cdot) = \partial \sigma_{D_t(\cdot)}(\int y Q_{t,\cdot}^*(dy))$, где символ ∂ обозначает субдифференциал. Из теорем 13.2 и 23.5 в [24] следует, что $h \in S_t(\cdot)$ также равносильно тому, что $\int y Q_{t,\cdot}^*(dy)$ является нормальным вектором⁴ к $D_t(\cdot)$ в точке h . В случае, когда $D_t(\cdot)$ — замкнутый выпуклый конус, по следствию 23.5.4 из

¹Преобразование Моро называют также огибающей Моро или же регуляризацией Моро–Иосиды; при этом, иногда вместо $\mu\|x\|_2^2$ используют положительно определенную квадратичную форму $\langle Bx, x \rangle$.

²Супремальная конволюция собственных вогнутых функций f_1 и f_2 определяется посредством формулы $f_1 \square f_2(x) = \sup\{f_1(x_1) + f_2(x_2) : x_1 + x_2 = x\}$. Более общим образом, супремальная конволюция функций f_1 и f_2 определяется в терминах сложения подграфиков: $f_1 \square f_2(x) = \sup\{y : (x, y) \in (\text{hipo } f_1 + \text{hipo } f_2)\}$. Супремальная конволюция \square связана с инфимальной конволюцией \square собственных выпуклых функций соотношением $f_1 \square f_2 = -(-f_1) \square (-f_2)$.

³Множество $D_t(\cdot)$ непусто, поскольку $0 \in D_t(\cdot)$.

⁴Иными словами, $\int y Q_{t,\cdot}^*(dy)$ лежит в нормальном конусе к $D_t(\cdot)$ в точке h .

[24] $h \in S_t(\cdot)$ в том и только в том случае, если

$$h \in D_t(\cdot), \quad \int y Q_{t,\cdot}^*(dy) \in D_t^\circ(\cdot), \quad h \int y Q_{t,\cdot}^*(dy) = 0, \quad (30)$$

где для выпуклого конуса C обозначение C° означает полярный конус. При этом барьерный конус для выпуклого конуса C совпадает с полярным, т.е. $\text{bar}(C) = C^\circ$.

Особо отметим, что в случае выполнения грубого условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP, в случае когда множество $D_t(\cdot)$ неограниченно, его можно заменить на компактное множество торговых ограничений, см. Лемму 1 из [1].

Описание модели, выбранной для тестовых примеров

Опишем тестовые примеры, для которых будет проводиться численный эксперимент. Для этой цели мы задаем:

1. Модель динамики рынка.
2. Торговые ограничения.
3. Вид опциона и функции выплат.

Будем использовать мультипликативное представление модели динамики цен, эквивалентное аддитивному, см. [2]. Для описания (исходной) модели в мультипликативной форме будем использовать обозначения

$$\begin{cases} x_t^i = m_t^i x_{t-1}^i, & i = 1, \dots, n, \\ m_t = (m_t^1, \dots, m_t^n) \in E_t(\cdot), \end{cases} \quad (31)$$

где компактное множество $E_t(\cdot)$ задается как множество мультипликаторов $m = (m^1, \dots, m^n)$, таких что точка $y = (y^1, \dots, y^n)$ с координатами $y^i = (m^i - 1)x_{t-1}^i$, $i = 1, \dots, n$ принадлежит $K_t(\cdot)$. Цены рискованных активов в каждый момент времени $t = 0, \dots, n$ должны быть положительными, т.е. $x_t = (x_t^1, \dots, x_t^n) \in (0, \infty)^n$, что равносильно положительности цен в начальный момент и условию $E_t(\cdot) \subseteq (0, \infty)^n$. При этом начальные цены предполагаются известными и фиксированными.

Мы будем рассматривать тестовые примеры, в которых¹ динамика цен (торговые ограничения) относятся² к марковскому типу и являются³

¹Терминология введена в [2] и использует определенную аналогию между неопределенными и случайными величинами.

²Это означает, что множества $K_t(\cdot)$ (соответственно $D_t(\cdot)$) зависят только от значения цен только в предыдущий момент времени.

³Это означает, что множества $K_t(\cdot)$ (соответственно $D_t(\cdot)$) не зависят от времени t .

однородными по времени¹. Эти свойства имеют место, если мы выберем $E_t(\cdot) \equiv E$ — непустое компактное выпуклое подмножество \mathbb{R}^n ; в этом случае будем говорить, что динамика цен описывается обобщенной моделью Колокольцова². В этой связи, полезно будет привести некоторые свойства этой модели.

В соответствии с предложением 2 из [5], многозначное отображение

$$\mathbb{R}^n \ni x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto K(x) =$$

$$\{y = (y^1, \dots, y^n) : y^i = (m^i - 1)x^i, i = 1, \dots, n, m = (m^1, \dots, m^n) \in E\},$$

принимаяющее компактные выпуклые значения, удовлетворяет условию Липшица относительно метрики Помпею-Хаусдорфа:

$$h_p(K(x), K(x')) \leq \|E - e\|_2 \|x - x'\|_2,$$

где использованы обозначения $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, $\|A\|_2 = \sup_{a \in A} \|a\|_2$.

Для модели рынка, когда динамика цен описывается обобщенной моделью Колокольцова, имеют место свойства наследственности выпуклости и монотонности решений уравнений Беллмана–Айзека v_t^* , $t = N, \dots, 1$ для специального вида торговых ограничений (включая отсутствие торговых ограничений и запрет коротких позиций). Рассмотрим статические торговые ограничения прямоугольного вида, когда

$$D_t(\cdot) \equiv D = \prod_{i=1}^n [d_1^i, d_2^i], \quad (32)$$

$$d_1^i \in [-\infty, +\infty), d_2^i \in (-\infty, +\infty], d_1^i < d_2^i, i = 1, \dots, n.$$

Для таких торговых ограничений барьерный конус $\text{bar}(D)$ можно задать следующим образом. Множество индексов $J = \{1, \dots, n\}$ разобьем на четыре части³, некоторые из которых могут быть пустыми:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4, \quad (33)$$

где

$$J_1 = \{i \in J : -\infty < d_1^i < d_2^i < +\infty\},$$

$$J_2 = \{i \in J : -\infty = d_1^i < d_2^i < +\infty\},$$

$$J_3 = \{i \in J : -\infty < d_1^i < d_2^i = +\infty\},$$

$$J_4 = \{i \in J : -\infty = d_1^i < d_2^i = +\infty\}.$$

¹Терминология оправдана также с той точки зрения, что наиболее неблагоприятные смешанные стратегии рынка в этом случае могут быть найдены в классе однородных марковских процессов (с дискретным временем), если функции выплат зависят только от текущей цены.

²В модели Колокольцова множество E является параллелепипедом и предполагается отсутствие торговых ограничений, см. главу 13 в [21].

³Здесь мы используем принятые в теории вероятностей обозначения - объединение попарно непересекающихся множеств.

Конус $\text{bar}(D)$ представим виде

$$\text{bar}(D) = \prod_{i=1}^n B^i,$$

где $B^i = \mathbb{R}$, если $i \in J_1$; $B^i = [0, +\infty)$, если $i \in J_2$; $B^i = (-\infty, 0]$, если $i \in J_3$ и $B^i = \{0\}$, если $i \in J_4$. Выполнение условия NDSAUP равносильно геометрическому условию $K_t(x_0, \dots, x_{t-1}) \cap \text{bar}(D) \neq \emptyset$; в данном случае, это условие имеет вид $(m^i - 1)x_{t-1}^i \in B^i$, $i = 1, \dots, n$ для некоторого $m \in \check{C}$. В силу положительности цен и специального вида множеств B^i это означает, что $m^i \in 1 + B^i$, $i = 1, \dots, n$; это можно также записать в виде $m \in e + \text{bar}(D)$. Такое m определяется следующими условиями на координаты: если $i \in J_1$, то m^i произвольно; если $i \in J_2$, то $m^i \geq 1$; если $i \in J_3$, то $m^i \leq 1$, а если $i \in J_4$, то $m^i = 1$.

Утверждение 1. Пусть торговые ограничения описываются при помощи (32), динамика цен задается обобщенной моделью Колокольцова и выполняется условие безарбитражности NDSAUP.

1) Если функции потенциальных выплат $g_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$, являются выпуклыми¹, то функции Беллмана-Айзекса v_t^* , $t = 0, \dots, N$, определяемые посредством (1), также являются выпуклыми.

2) Если для $t = 1, \dots, N$ выпуклость функций выплат имеет место только по последней переменной, т.е. для любого \bar{x}_{t-1} функция $x_t \mapsto g_t(\bar{x}_{t-1}, x_t)$ является выпуклой, и функция $g_t(\cdot)$ полунепрерывна сверху, то функции $x_t \mapsto v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_t)$ также будут выпуклыми (и полунепрерывными сверху).

3) Если для $t = 1, \dots, N$ и для некоторого $j \in \{1, \dots, n\}$ функции выплат являются монотонными по j -ой компоненте последней переменной, т.е. для любых значений \bar{x}_{t-1} и x_t^i при $i \neq j$ функция $x_t^j \mapsto g_t(\bar{x}_{t-1}, x_t)$ является неубывающей (невозрастающей), $t = 1, \dots, N$, и функция $g_t(\cdot)$ полунепрерывна сверху, то функции $x_t^j \mapsto v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_t)$, $t = 1, \dots, N$, также будут неубывающими (невозрастающими) и полунепрерывными сверху².

Доказательство. Для доказательства мы можем воспользоваться теоремой 2.5 из 4 и пунктом 1) предложения 3.3 из [6] поскольку многозначное отображение $K_t(\cdot)$ непрерывно (даже липшицево) и многозначное отображение $D_t(\cdot) \equiv D$ непрерывно. Поэтому имеет место равновесие, причем формула (13) принимает вид

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \max_{P \in \mathcal{R}} \left[\int v_t^*((\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) P(dm) \right] \quad (34)$$

¹Подразумевается, что функции $g_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$ заданы на всем пространстве $((0, +\infty)^n)^{t+1}$, а потому выпуклость их влечет непрерывность.

²Соответственно, эти функции будут непрерывными справа (слева).

где для вектора $m = (m^1, \dots, m^n)$ матрица $\Lambda(m)$ — диагональная с элементами на диагонали равными m^1, \dots, m^n и

$$\mathcal{R} = \{P \in \mathcal{P}(E) : \int mP(dm) \in e + \text{bar}(D)\}. \quad (35)$$

Докажем пункты 1) и 2) утверждения по индукции. Для $s = N$ выпуклость (выпуклость по последней переменной) функции v_s^* очевидна, поскольку $v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot)$. Пусть v_s^* является выпуклой для $s = N, \dots, t > 0$. Тогда v_{t-1}^* также является выпуклой (выпуклой по последней переменной), что непосредственно вытекает из соотношений (34), поскольку $x \mapsto \Lambda(m)x$ — линейный оператор, а интегрирование и взятие максимума сохраняет выпуклость функций. Что касается пункта 3), то сохранение монотонности связано с тем, что j -я компонента вектора $\Lambda(m)x_{t-1}$ равна $m^j x_{t-1}^j$, а $m^j > 0$. Таким образом, утверждение о монотонности получается рассуждением по индукции из соотношений (34), поскольку интегрирование и взятие максимума сохраняет монотонность функций.

Наиболее интересным случаем торговых ограничений вида (32), с точки зрения соответствия практике, является запрет коротких позиций по рисковому активу с индексами из множества $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, где $k \geq 1$. Это соответствует тому, что в разбиении (33) $J_1 = J_2 = \emptyset$, а для $i \in J_3 = I$ выполняется равенство $d_1^i = 0$. В этом случае барьерный конус $\text{bar}(D)$ для выпуклого конуса D имеет вид

$$\text{bar}(D) = D^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : y_j \leq 0 \text{ если } j \in I \text{ и } y_j = 0 \text{ если } j \notin I\}.$$

Пусть $P_{t,\cdot}^* \in \mathcal{R}$ — распределение, на котором достигается максимум в уравнении (34). Если для некоторого $i \in I$ имеет место неравенство $\int m^i P_{t,\cdot}^*(dm) < 1$, то из (30) вытекает, что i -ая компонента вектора $h_t^*(\cdot)$ равна нулю; обозначим множество таких индексов через $I_{t,\cdot}^* \subseteq I$. Фактически это означает, что исходная задача — уравнения Беллмана–Айзека сводятся к задаче меньшей размерности, равной количеству точек в $I \setminus I_{t,\cdot}^*$.

Утверждение 2. Пусть для модели Колольцова динамики рыночных цен (когда множество E является прямоугольником) торговые ограничения состоят в запрете коротких позиций по рисковому активу с индексами из непустого множества $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, выполнены условия Утверждения 1 и его пункта 3 с неубывающими функциями выплат по каждой j -ой компоненте последней переменной для $j \in I$. Кроме того, пусть¹ $e \in \text{int}(E)$. Тогда для $t \in \{1, \dots, N\}$ максимум в уравнениях (34) достигается для некоторой меры $P_{t,\cdot}^*$, такой что $\int m P_{t,\cdot}^*(dm) = e$, и решение задачи ценообразования в этом случае совпадает с решением задачи без торговых ограничений.

¹Отметим, что в случае отсутствия торговых ограничений такая модель (для которой $e \in \text{int}(E)$) удовлетворяет грубому условию отсутствие арбитражных возможностей RNDAO.

Доказательство. По предположению, множество E — прямоугольный параллелепипед, $E = \prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]$, где $0 < \alpha_i < \beta_i$, $i = 1, \dots, n$, такой что $e \in \text{int}(E)$, что равносильно $\alpha_i < 1 < \beta_i$, $i = 1, \dots, n$. В случае предполагаемых торговых ограничений оптимальному условному распределению приращений цен мультипликаторов $Q_{t,\cdot}^*$ соответствует условное распределение вектора-мультипликатора $P_{t,\cdot}^*$ на E (с борелевской σ -алгеброй). Кроме того, найдется оптимальное распределение $Q_{t,\cdot}^*$, сосредоточенное не более чем в $n + 1$ точке; это же относится и к распределению $P_{t,\cdot}^*$ вектора-мультипликатора. В случае данных торговых ограничений, для того, чтобы распределение $P \in \mathcal{P}(E)$ принадлежало бы классу мер \mathcal{R} , задаваемому (35), необходимо и достаточно чтобы¹ $\int m^i P(dm) \leq 1$, если $i \in I$ и $\int m^i P(dm) = 1$ если $i \notin I$. Рассмотрим оптимальное распределение $P_{t,\cdot}^* \in \mathcal{R}$ с носителем $E_{t,\cdot}^* \subseteq E$ содержащим конечное число точек². Обозначим $\gamma_{t,\cdot}^i = \int m^i P_{t,\cdot}^*(dm)$ и допустим, что для некоторого $i \in I$ имеет место неравенство $\gamma_{t,\cdot}^i < 1$. Обозначим $\Phi_i : E \rightarrow E$ отображение, «максимизирующее» i -ую компоненту, т.е. i -ая компонента вектора $\Phi_i(m)$ равна β_i , а остальные компоненты Φ_i оставляет неизменными. Если случайный вектор M имеет распределение $P_{t,\cdot}^*$, то мы обозначим через $\Phi_i \circ P_{t,\cdot}^*$ распределение случайного вектора $\Phi_i(M)$. Положим

$$q_{t,\cdot}^i = \frac{\beta_i - 1}{\beta_i - \gamma_{t,\cdot}^i} \in (0, 1)$$

Тогда смесь распределений

$$\hat{P}_{t,\cdot}^i = q_{t,\cdot}^i P_{t,\cdot}^* + (1 - q_{t,\cdot}^i) \Phi_i \circ P_{t,\cdot}^* \in \mathcal{P}(E)$$

и $\int m^i \hat{P}_{t,\cdot}^i(dm) = 1$. Поскольку среднее значение остальных компонент осталось неизменным, то $\hat{P}_{t,\cdot}^i \in \mathcal{R}$. В силу предположения о монотонности, используя Утверждение 1 получаем неравенство

$$\int v_t^*((\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) P_{t,\cdot}^*(dm) \leq \int v_t^*((\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) \hat{P}_{t,\cdot}^i(dm),$$

так что максимум в уравнениях (34) достигается для меры $\hat{P}_{t,\cdot}^i \in \mathcal{R}$, такой что $\int m^i \hat{P}_{t,\cdot}^i(dm) = 1$. Повторяя эту процедуру в случае, если еще остались индексы $i \in I$, для которых имеет место неравенство $\gamma_{t,\cdot}^i < 1$, в конечном итоге, получим распределение $\hat{P}_{t,\cdot}^*$, сосредоточенное в конечном числе точек, на котором достигается максимум в уравнениях (34) и для которого

¹Здесь максимум в (34) берется по классу вероятностных мер, для которых процесс цен будет супермартингалом для каждого рисковогго актива с индексом $j \in I$ и мартингалом для $j \notin I$. Это соответствует нашей интерпретации наиболее неблагоприятного поведения рынка — в данном случае, в отношении занятия длинных позиций по ряду рисковогго активов.

²На самом деле, как отмечалось выше, найдется оптимальное распределение, сосредоточенное не более чем в $n + 1$ точке.

$\int m \hat{P}_{t,\cdot}^*(dm) = e$. Поскольку $\mathcal{R}' = \{P \in \mathcal{P}(E) : \int m P(dm) = e\} \subseteq \mathcal{R}$, то распределение $\hat{P}_{t,\cdot}^*$ максимизирует интеграл в (34) и на классе мер \mathcal{R}' . Тем самым, решение задачи ценообразования с заданными торговыми ограничениями в данном случае совпадает с решением задачи без торговых ограничений.

Конкретно, множество E выберем в двух вариантах.

1. Прямоугольный параллелепипед $E = \prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]$, где $0 < \alpha_i < \beta_i$, $i = 1, \dots, n$ (модель Колокольцова). Обозначая вершины этого прямоугольника v_i , $i = 1, \dots, 2^n$, опорная функция прямоугольника E может быть представлена в виде

$$\sigma_E(h) = \bigvee_{i=1}^{2^n} \langle v_i, h \rangle$$

В соответствии с замечанием 4 из [5] константа Липшица

$$\|E - e\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (|\alpha_i - 1| \vee |\beta_i - 1|)^2}$$

2. Эллипсоид $E = \{m = (m^1, \dots, m^n) : \langle \Gamma^{-1}(m - \mu), m - \mu \rangle \leq 1\}$, где Γ — симметрическая положительно определенная (тем самым, невырожденная) матрица¹, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$. Его опорная функция

$$\sigma_E(h) = \langle \mu, h \rangle + \sqrt{\langle \Gamma h, h \rangle}$$

Параметры эллипсоида E выбираются таким образом, чтобы $E \subseteq (0, \infty)^n$, что равносильно системе неравенств

$$\langle \mu, e_i \rangle > \sqrt{\langle \Gamma e_i, e_i \rangle}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (36)$$

где e_i — вектор, все координаты которого нулевые, кроме i -ой координаты, равной единице. Задача нахождения константы Липшица $\|E - e\|_2$ сводится, посредством замены переменных, к условной максимизации

$$\|E - e\|_2 = \max_{x \in E - e} \|x\|_2 = \max_{\|z\|_2 \leq 1} \|\mu - e + \Gamma^{1/2} z\|_2$$

Максимизация квадратичной формы $\|\mu - e + \Gamma^{1/2} z\|_2^2$ при квадратичном ограничении $\|z\|_2^2 \leq 1$ в общем случае представляет собой достаточно сложную задачу, имеющую численное решение — частный случай уравнения (10) из [22]. Однако для практических целей достаточно грубой оценки

$$\|E - e\|_2 \leq \|\mu - e\|_2 + \|\Gamma^{1/2}\|_2, \quad (37)$$

¹Нам будет удобно интерпретировать Γ как некоторую ковариационную матрицу, а Γ^{-1} , ее обратную, — как соответствующую матрицу точности.

где $\|\Gamma^{1/2}\|_2 = \max_{\|z\|_2=1} \|\Gamma^{1/2}z\|_2 = \lambda_{max}^{1/2}$, а $\lambda_{max} > 0$ — максимальное собственное число для Γ .

Множество точек, в которых нужно рассчитывать значение функции Беллмана v_t^* в момент времени t явно задать не удастся, но можно его аппроксимировать снизу и сверху. Обозначим

$$\Psi(x) = (\ln x_1, \dots, \ln x_n), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in (0, \infty)^n.$$

Тогда

$$\Psi(x_t) = \Psi(x_0) + \sum_{s=1}^t \Psi(m_s), \quad (38)$$

откуда¹

$$\Psi(x_t) - \Psi(x_0) \in \Psi(E) + \dots + \Psi(E) \text{ (} t \text{ раз)} \supseteq t\Psi(E). \quad (39)$$

С другой стороны, используя свойства сумм Минковского, получаем включение

$$\begin{aligned} & \Psi(E) + \dots + \Psi(E) \text{ (} t \text{ раз)} \subseteq \text{conv}(\Psi(E) + \dots + \Psi(E) \text{ (} t \text{ раз)}) \\ & = \text{conv}(\Psi(E)) + \dots + \text{conv}(\Psi(E)) \text{ (} t \text{ раз)} = t \text{conv}(\Psi(E)) = \text{conv}(t\Psi(E)). \end{aligned} \quad (40)$$

На самом деле, расстояние Помпею–Хаусдорфа

$$h_\rho(\text{conv}(\Psi(E) + \dots + \Psi(E) \text{ (} t \text{ раз)}), \Psi(E) + \dots + \Psi(E) \text{ (} t \text{ раз)})$$

не растёт при $t \geq n$ и не превосходит² $\sqrt{1 \vee (n-1)} \tau(\Psi(E))$, где $\tau(A)$ — чебышевский радиус, т.е. радиус наименьшего шара³ содержащего множество A , см. [23]. К сожалению, количество точек расчета функции Беллмана момент времени t будет расти экспоненциально с увеличением t , что видно из включений (39) и (40), что приводит к значительной вычислительной сложности.

Для сопоставимости, с экономической точки зрения, результатов эксперимента⁴ при разных вариантах выбора E , свяжем определяющие E параметры: выберем эллипсоид с центром $\mu_i = \frac{\beta_i + \alpha_i}{2}$ и полуосями

¹Отметим, что для выпуклого множества E множество $\Psi(E)$ может оказаться невыпуклым.

²Эта оценка из [23] уточняет для случая одинаковых слагаемых в сумме Минковского и для размерности пространства $n \geq 2$ оценку из теоремы Шепли–Фолкмана, см. приложение 2 в [25]. В действительности, оценка может быть улучшена — вместо «внешнего» радиуса можно взять «внутренний», как было предложено Старром.

³Такой шар для ограниченного множества существует и он единственный. Кроме того, радиус описанного шара может быть оценён сверху через диаметр множества $\mathfrak{d}(E) = \sup\{\|x_2 - x_1\| : x_1, x_2 \in E\}$, при помощи неравенства Юнга $\tau(E) \leq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} \mathfrak{d}(E)$, см., например, [26], теорема 7.5.

⁴Для обеспечения сопоставимости с точки зрения вычислительной трудоемкости, можно потребовать равенство объемов, т.е. $\det(\Gamma^{-1}) = \prod_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i)$, что обеспечит

$\sigma_i = \frac{\beta_i - \alpha_i}{2}$, что соответствует некоторой формализации «тренда» и «волатильности» рынка. Тогда случай, когда E — эллипсоид, в отличие от параллелепипеда, дополнительно учитывает в сценариях поведения рынка априорную информацию о «корреляциях» цен.

При построении приближенной модели рынка удобно считать, что начальные цены лежат на выбранной для расчетов решетке L_θ .

Что касается торговых ограничений, выберем для тестирования два варианта.

1. Статические торговые ограничения, заключающиеся в запрете коротких позиций, т.е. $D_t(\cdot) \equiv [0, \infty)^n$. В данном случае опорная функция выпуклого конуса $D_t(\cdot)$ равна

$$\sigma_{D_t(\cdot)}(z) = \begin{cases} 0 & z \in (-\infty, 0]^n, \\ +\infty & z \notin (-\infty, 0]^n. \end{cases}$$

При конических торговых ограничениях барьерный конус $\text{bar}(D_t(\cdot)) \equiv (-\infty, 0]^n$ совпадает с полярным конусом $D_t^\circ(\cdot) = \{y : \sigma_{D_t(\cdot)}(y) \leq 0\}$, поэтому грубое условие отсутствие гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP в данном случае совпадает с грубым условием отсутствия гарантированного арбитража¹ RNDSA. Для модели динамики рынка, когда E — прямоугольник, это равносильно неравенствам² $\alpha_i < 1, i = 1, \dots, n$. Для модели динамики рынка, когда E — эллипс, проверка условия RNDSAUP, используя геометрический критерий (5), сводится к задаче квадратичного программирования: проверить, что

$$\inf_{x \in (0, 1]^n} \langle \Gamma^{-1}(x - \mu), x - \mu \rangle < 1. \quad (41)$$

2. Отсутствие торговых ограничений, т.е. $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$.

Наконец, мы выберем два варианта опциона европейского типа.

1. Опцион, называемый «Put on Max», функция выплат по которому

$$\max(\chi - \max(x_N^1, \dots, x_N^n), 0), \quad \chi > 0 \quad (42)$$

не является выпуклой.

примерно равное число точек решетки, попадающих в $\check{K}_t(\cdot)$ в двух вариантах выбора множества E . Можно соединить экономичную и вычислительную сторону дела, модифицируя формализацию «тренда» и «волатильности» рынка — полагая $\mu_i = \varkappa \frac{\beta_i + \alpha_i}{2}$ и $\sigma_i = \varkappa \frac{\beta_i - \alpha_i}{2}$, где параметр пропорциональности $\varkappa > 0$ выбирается из условия равенства объемов.

¹В этом нетрудно убедиться, используя геометрический критерий условия NDSA, сформулированный в предложении 3.1 из [3], а именно $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^\circ(\cdot) \neq \emptyset$

²Если, в дополнение к неравенствам $\alpha_i < 1, i = 1, \dots, n$ выполняются также неравенства $\beta_i > 1, i = 1, \dots, n$, то это равносильно грубому условию отсутствия арбитражных возможностей RNDAO.

2. Опцион, называемый «Call on Max», функция выплат по которому

$$\max(\max(x_N^1, \dots, x_N^n) - \chi, 0), \quad \chi > 0 \quad (43)$$

является выпуклой.

Обе функции выплат, (42) и (43), удовлетворяют условию Липшица

Будем численно исследовать случай двух рисковых активов, т.е. когда $n = 2$, что удобно для графической иллюстрации результатов.

При этом, для выбора модели динамики рынка посредством постоянного множества значений мультипликаторов в варианте эллипсоида, выберем для матрицы Γ удобную параметризацию¹:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \sigma_1^2, \quad \Gamma_{22} = \sigma_2^2, \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \rho \sigma_1 \sigma_2, \\ \sigma_1 &> 0, \quad \sigma_2 > 0, \quad \rho \in (-1, 1); \end{aligned}$$

При такой параметризации обратная матрица² Γ^{-1} имеет вид:

$$\Gamma_{11}^{-1} = (1 - \rho^2)^{-1} \sigma_1^{-2}, \quad \Gamma_{22}^{-1} = (1 - \rho^2)^{-1} \sigma_2^{-2}, \quad \Gamma_{12}^{-1} = \Gamma_{21}^{-1} = -\rho(1 - \rho^2)^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1},$$

В терминах этой параметризации: условие (36) принимает вид

$$\mu_1 > \sigma_1, \quad \mu_2 > \sigma_2,$$

а правая часть неравенства (37) принимает вид

$$[(\mu_1 - 1)^2 + (\mu_2 - 1)^2]^{1/2} + \left\{ \left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} \right) + \left[\left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} \right)^2 - (1 - \rho^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}.$$

В случае выбора торговых ограничений в форме запрета коротких позиций, условие безарбитражности RNDSAUP (в данном случае совпадающее с RNDSA), равносильное выполнению (41), можно выписать в явном виде, как ограничения на параметры эллипсоида. Обозначим³

$$\eta_1 = \langle \Gamma^{-1} e_1, e_1 \rangle^{-1} \langle \Gamma^{-1} (e - \mu), e_1 \rangle = (1 - \mu_1) - (1 - \mu_2) \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad (44)$$

$$\eta_2 = \langle \Gamma^{-1} e_2, e_2 \rangle^{-1} \langle \Gamma^{-1} (e - \mu), e_2 \rangle = -(1 - \mu_1) \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + (1 - \mu_2);$$

тогда RNDSAUP равносильно условиям следующего вида:

1) либо имеет место неравенство⁴ $\mu_1 \vee \mu_2 \leq 1$,

¹Тем самым, матрицу Γ можно интерпретировать как ковариационную матрицу некоторого двумерного случайного вектора, где $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$ — среднеквадратические отклонения соответствующих компонент вектора, а $\rho \in (-1, 1)$ — коэффициент корреляции.

²В математической статистике такую матрицу называют матрицей точности.

³Функция $x \rightarrow \langle \Gamma^{-1} (x - \mu), x - \mu \rangle$, суженная на прямую $\{x = e - \eta e_1 : \eta \in \mathbb{R}\}$, имеет минимум в точке $e - \eta_1 e_1$, а суженная на прямую $\{x = e - \eta e_2 : \eta \in \mathbb{R}\}$ имеет минимум в точке $e - \eta_2 e_2$.

⁴В этом случае $\mu \in (-\infty, 1]^2$.

2) либо имеет место неравенство $\mu_1 \vee \mu_2 > 1$ и дополнительно, в зависимости от значений η_1 и η_2 , выполняются условия

a) если $\eta_1 \leq 0$ и $\eta_2 \leq 0$, то¹

$$\langle \Gamma^{-1}(e - \mu), e - \mu \rangle = \frac{(1 - \mu_1)^2 \sigma_2^2 + 2(1 - \mu_1)(1 - \mu_2) \rho \sigma_1 \sigma_2 + (1 - \mu_2)^2 \sigma_1^2}{(1 - \rho^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2} < 1; \quad (45)$$

b) если $\eta_1 \leq 0$ и $0 < \eta_2 \leq 1$, то²

$$\langle \Gamma^{-1}(e - \mu), e - \mu \rangle - (1 - \rho^2)^{-1} \sigma_2^{-2} \eta_2^2 < 1, \quad (46)$$

где $\langle \Gamma^{-1}(e - \mu), e - \mu \rangle$ выражено через параметры эллипса в формуле (45), а η_2 фигурирует в формуле (44);

c) если $\eta_1 \leq 0$ и $\eta_2 > 1$, то³ этот случай может быть получен из предыдущего, полагая в формуле (46) $\eta_2 = 1$:

$$\langle \Gamma^{-1}(e_1 - \mu), e_1 - \mu \rangle = \langle \Gamma^{-1}(e - \mu), e - \mu \rangle - (1 - \rho^2)^{-1} \sigma_2^{-2} < 1;$$

d) если $0 < \eta_1 \leq 1$ и $\eta_2 \leq 0$, то⁴

$$\langle \Gamma^{-1}(e - \mu), e - \mu \rangle - (1 - \rho^2)^{-1} \sigma_1^{-2} \eta_1^2 < 1; \quad (47)$$

e) если $\eta_1 > 1$ и $\eta_2 \leq 0$, то⁵ этот случай может быть получен из предыдущего, полагая в формуле (47) $\eta_1 = 1$:

$$\langle \Gamma^{-1}(e_2 - \mu), e_2 - \mu \rangle = \langle \Gamma^{-1}(e - \mu), e - \mu \rangle - (1 - \rho^2)^{-1} \sigma_1^{-2} < 1.$$

f) если $\eta_1 > 0$ и $\eta_2 > 0$, то из (44) следует $\rho < 0$, а также альтернатива:

f_1) либо $\mu_1 > 1$ и $\mu_2 < 1$ и тогда⁶ должно выполняться (46).

f_2) либо $\mu_2 > 1$ и $\mu_1 < 1$ и тогда⁷ должно выполняться (47).

Представляет интерес рассмотреть несколько случаев выбора параметра ρ : в первом случае положительным, во втором — отрицательным, а в третьем — нулевым, что по смыслу отражает соответствующую «корреляцию» рисков активов.

¹В этом случае в (41) достигается минимум в точке $x = e$ и e — внутренняя точка эллипса E .

²В этом случае в (41) достигается минимум в точке $x = e - \eta_2 e_2 = e_1 + (1 - \eta_2) e_2$ и эта точка — внутренняя точка эллипса E .

³В этом случае проверяется выполнение (41) в точке $x = e - e_2 = e_1$, т.е. требуется, чтобы эта точка была внутренней точкой эллипса E .

⁴В этом случае в (41) достигается минимум в точке $x = e - \eta_1 e_1 = e_2 + (1 - \eta_1) e_1$ и эта точка — внутренняя точка эллипса E .

⁵В этом случае проверяется выполнение (41) в точке $x = e - e_1 = e_2$, т.е. требуется, чтобы эта точка была внутренней точкой эллипса E .

⁶В этом случае в (41) достигается минимум в точке $x = e - \eta_2 e_2 = e_1 + (1 - \eta_2) e_2$, причем $\eta_2 < 1 - \mu_2 < 1$ и эта точка — внутренняя точка эллипса E .

⁷В этом случае в (41) достигается минимум в точке $x = e - \eta_1 e_1 = (1 - \eta_1) e_1 + e_2$, причем $\eta_1 < 1 - \mu_1 < 1$ и эта точка — внутренняя точка эллипса E .

Программная реализация и результаты численного эксперимента

Реализация численного эксперимента проводилась на языке Python 3.7 с использованием библиотеки numpy 1.15.4 для векторизации операций, для построения выпуклой оболочки множества использовался воспроизведенный в библиотеке scipy 1.1.0 алгоритм qhull.

Для сокращения числа вычислений функции цены при решении уравнения Беллмана-Айзека, предварительно рассчитывались точки сетки L_θ , в которых потребуется вычислять функцию, на основе формулы (38). При осуществлении операций над множествами точек сетки существенное ускорение было достигнуто при предварительном проецировании целочисленных координат точек на множество целых чисел с помощью биективного отображения, после чего операции по объединению и пересечению проводились уже с одномерными целочисленными множествами. Ниже приведены иллюстрации работы программы, параметры в примерах выбраны таким образом, что носители $K_t(\cdot)$ являются полноразмерными, выполнено условие RNDSAUP и $0 \in K_t(\cdot)$.

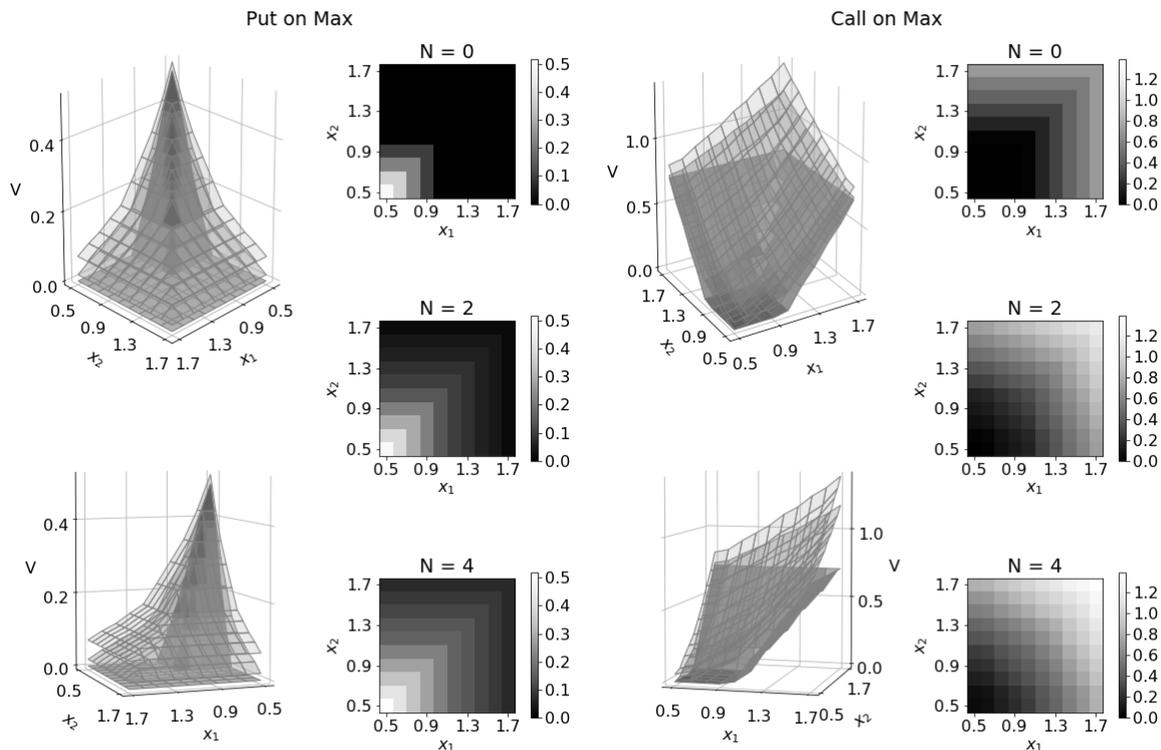


Рис. 1. Стоимость опциона «Put on Max» (слева) и «Call on Max» (справа) для горизонтов $N = 0, 2$ и 4 в зависимости от начальных цен активов; для каждого опциона приведены графики в двух изометрических проекциях и соответствующие карты высот

На Рис. 1 приведено значение стоимости опционов «Put on Max» и «Call on Max» с ценой исполнения $\chi = 1$ для разных горизонтов N в зависимости от начальных цен активов (для $N = 0$ график является функцией выплат и приведен для сравнения). Предполагалось отсутствие торговых ограничений; в качестве приближенного стационарного множества мультипликаторов $E_t(\cdot)$ рассматривался квадрат $[0.75, 1.25] \times [0.75, 1.25]$, т.е. предполагалась независимая динамика цен с равной волатильностью; шаг прямоугольной решетки θ равен 0.03, начальные значения цены рассматривались в интервале $[0.5, 1.7] \times [0.5, 1.7]$. Как видно из графиков, с увеличением временного горизонта стоимость опционов (величина резервов) увеличивается, что соответствует экономическому смыслу, — увеличивается неопределенность поведения «рынка», поэтому требуется увеличение резервов для гарантированного покрытия обязательств по опциону.

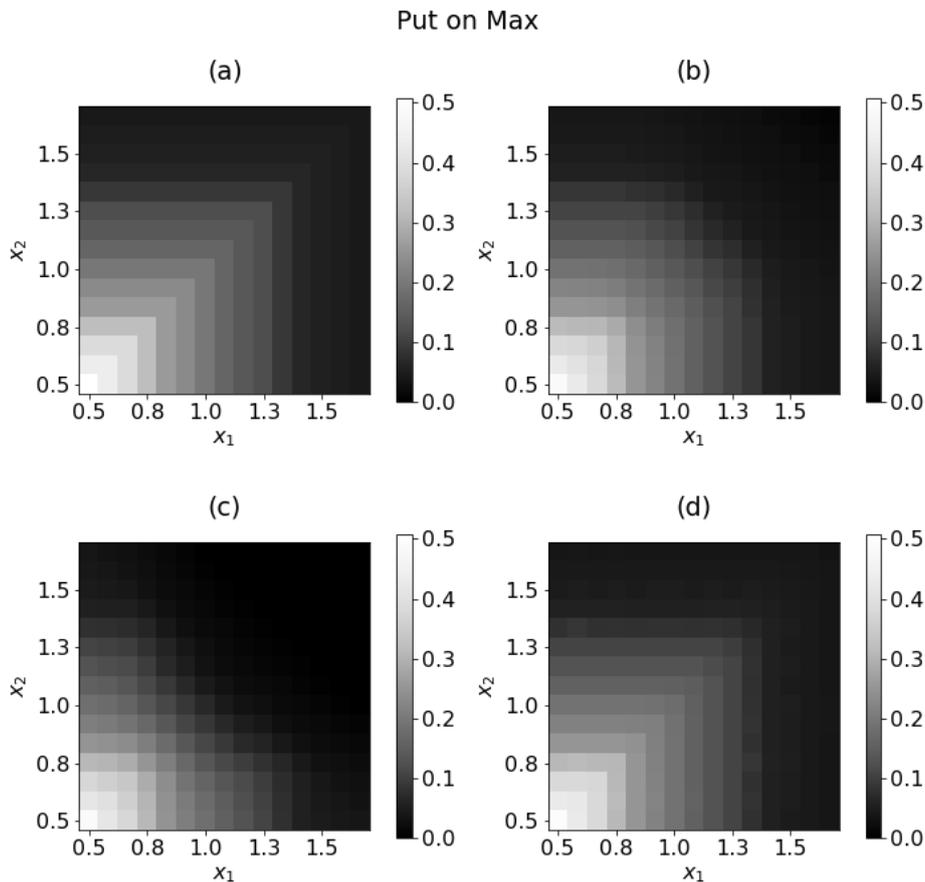


Рис. 2. Стоимость опциона «Put on Max» для различных множеств мультипликаторов цен E : (a) прямоугольное множество; (b) эллипсоидальное множество с $\rho = 0$; (c) эллипсоидальное множество с $\rho = -0.8$; (d) эллипсоидальное множество с $\rho = 0.8$

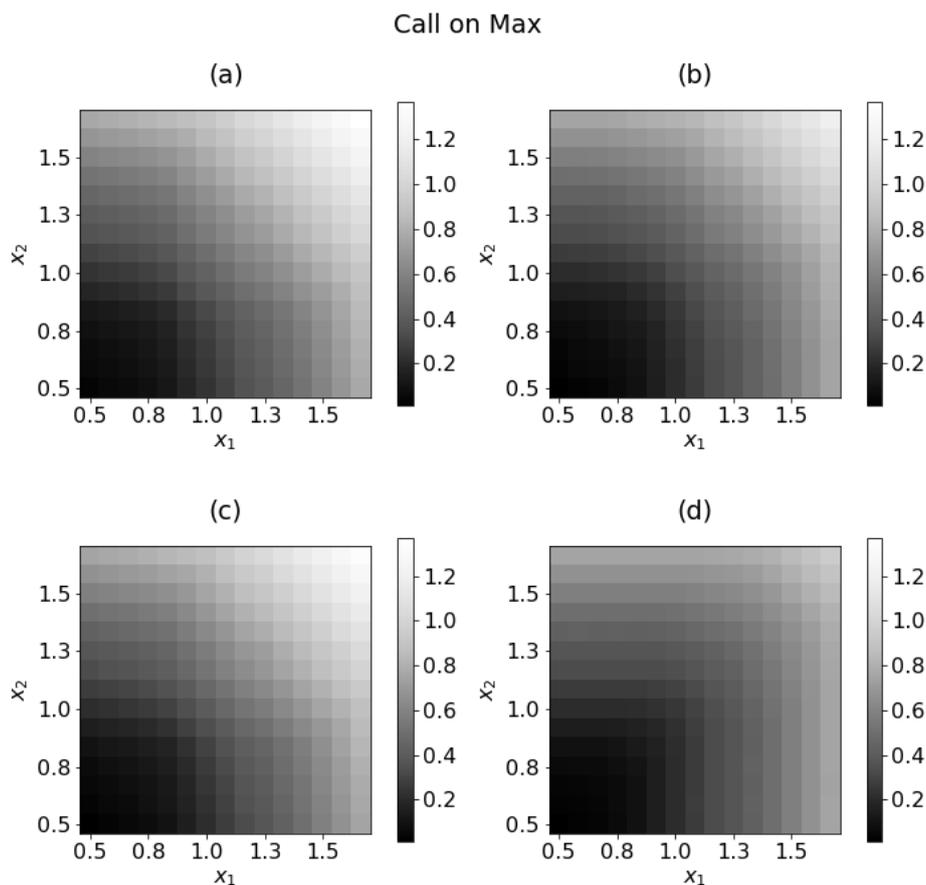


Рис. 3. Стоимость опциона «Call on Max» для различных множеств мультипликаторов цен E : (a) прямоугольное множество; (b) эллипсоидальное множество с $\rho = 0$; (c) эллипсоидальное множество с $\rho = -0.8$; (d) эллипсоидальное множество с $\rho = 0.8$

На Рис. 2 и 3 приведены карты высот для стоимости опционов «Put on Max» и «Call on Max» соответственно для горизонта $N = 3$ и разных вариантов стационарного множества мультипликаторов цен E : прямоугольного, как на Рис. 1, и эллипсоидального с центром $\mu = (1, 1)$ и матрицей Γ с $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.25$ при различных значениях коэффициента корреляции ρ . Шаг решетки и начальные значения брались как на Рис. 1, предполагалось отсутствие торговых ограничений. Интересно сравнить стоимость опционов при прямоугольном E со стоимостью при эллипсоидальном E в зависимости от «корреляции» цен. Из графиков видно, что для «Put on Max» стоимости наиболее близки при положительной «корреляции», в то же время для «Call on Max» графики больше всего схожи при отрицательной «корреляции». Этому факту можно дать следующее объяснение. Параллелепипед E содержит наиболее неблагоприятные сценарии рынка, при которых цены активов

могут принимать минимально и максимально возможное значение независимо друг от друга. Для продавца опциона «Put on Max» наиболее неблагоприятным сценарием, согласно (42), является одновременное падение цен, что более вероятно при положительной «корреляции». Для продавца «Call on Max» наиболее неблагоприятными сценариями, согласно (43), являются те, при которых растет цена хотя бы одного из активов. Такое поведение более можно ожидать при отрицательной «корреляции», когда падение одной из цен способствует росту другой.

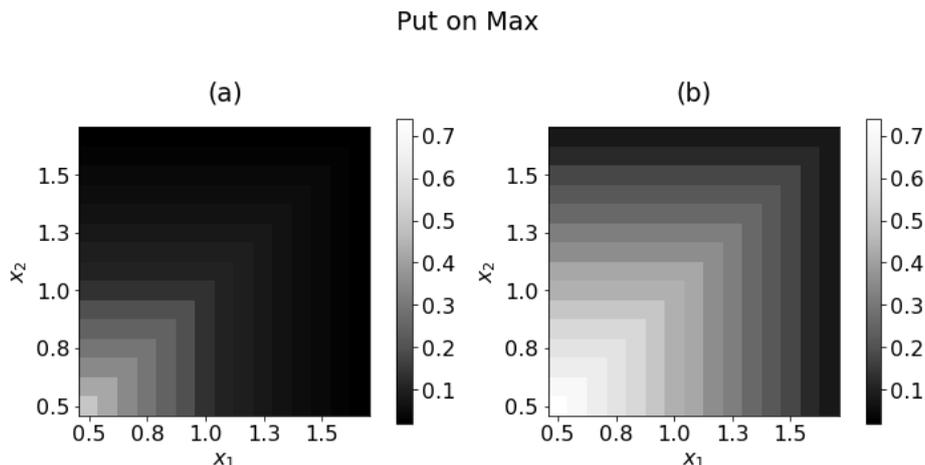


Рис. 4. Стоимость опциона «Put on Max» (a) при отсутствии торговых ограничений и (b) при запрете коротких позиций

На Рис. 4 приведены карты высот для стоимости опциона «Put on Max» для горизонта $N = 2$ при отсутствии торговых ограничений и при запрете коротких позиций по обоим активам. Множество мультипликаторов и цена исполнения χ по опционам брались такими же, как на Рис. 1. Шаг решетки θ равен 0.02. Из графиков видно, что при наличии торговых ограничений стоимость опциона равномерно повышается, поскольку возможности инвестора для хеджирования ограничены. Для опциона «Call on Max» сравнение не приводится, поскольку стоимости в данном случае совпадают, что обусловлено видом функции выплат (см. Утверждение 2).

Литература

1. *Smirnov, S. N.* A Guaranteed Deterministic Approach to Superhedging: Sensitivity of Solutions of Bellman–Isaacs Equations and Numerical Methods // *Computational Mathematics and Modeling*, Vol. 31, No. 3, pp. 384-401.

2. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: модель рынка, торговые ограничения, безарбитражность и уравнения Беллмана-Айзекса // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2018. Т. 10. № 4. С. 59–99.
3. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства «безарбитражности» рынка // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2019. Т. 11. № 2. С. 68–95.
4. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана-Айзекса // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2019. Т. 11. № 4. С. 87–115.
5. *Smirnov S. N.* A Guaranteed Deterministic Approach to Superhedging: Lipschitz Properties of Solutions of the Bellman-Isaacs Equations // In: “Frontiers of Dynamics Games. Game Theory and Management, St. Petersburg”. — Birkhäuser, Cham, 2019. — P. 267–288.
6. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: смешанные стратегии и игровое равновесие // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2020. Т. 12. № 1. С. 60–90.
7. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: наиболее неблагоприятные сценарии поведения рынка и проблема моментов // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2020. Т. 12. № 3. С. 50–88.
8. *Smirnov S. N.* A Guaranteed Deterministic Approach to Superhedging: Case of the Convex Payoff Functions on Option // Mathematics. 2019. Vol. 7, no. 1246. P. 1—19.
9. Handbook of Discrete and Computational Geometry, Third Edition. Edited by Jacob E. Goodman, Joseph O’Rourke, and Csaba D. Toth. — Boca Raton: CRC Press LLC, 2017. — 1928 p.
10. *Gamby A.N., Katajainen J.* Convex-Hull Algorithms: Implementation, Testing and Experimentation // Algorithms 2018, Vol. 11, 195.
11. *Lucet Y.* What shape is your conjugate? A survey of computational convex analysis and its applications //SIAM review. 2010. Vol. 52. № 3. Pp. 505–542.
12. *Contento L.* The Discrete Legendre-Fenchel Transform and its application to phase separation in electrolytes. University of Udine. 2012. URL: <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00806085>

13. *Awasthi P., Kalantari B., Zhang Y.* Robust Vertex Enumeration for Convex Hulls in High Dimensions. Proceedings of the Twenty-First International Conference on Artificial Intelligence and Statistics. 2018. PMLR Vol. 84 Pp. 1387–1396.
14. *Barber C.B., Dobkin D.P., H. Huhdanpaa H.* The quickhull algorithm for convex hulls // ACM Trans. Math. Software. 1996. Vol. 22. Pp. 469–483.
15. *Bremner D., Fukuda K., Marzetta A.* Primal-dual methods for vertex and facet enumeration // Discrete Comput. Geom. 1998. Vol. 20. Pp. 333–357.
16. *Avis D., Jordan C.* Comparative computational results for some vertex and facet enumeration codes // 2018. <http://arxiv.org/abs/1510.02545v3>
17. *Yang Y.* A Facet Enumeration Algorithm for Convex Polytopes // 2019. <http://arxiv.org/abs/1909.11843v1>
18. *Favorsky A., Mikhailova P., Smirnov S.* Monotone Numerical Methods for the Option Pricing and Hedging Models Тезисы докладов 3-й Московской международной конференции по исследованию операций (ORM2001)(Москва, 4-6 апр. 2001 г.) = The 3rd Moscow international conference on operations research (ORM2001)(Moscow, Apr. 4-6, 2001) : Abstracts. М. : Вычисл. центр РАН, 2001
19. *Moreau J-J.* Proximité et dualité dans un espace hilbertien // Bull. Soc. Math. France. 1965. , Vol. 93. Pp. 273–299.
20. *Bertsekas D.P.* Approximation Procedures Based on the Method of Multipliers // J. Optimization Theory and Applications. 1977. Vol. 23. Pp. 487-510.
21. *Bernhard P., Engwerda J.C., Roorda B., Schumacher J., Kolokoltsov V., Saint-Pierre P., and Aubin J.-P.* The Interval Market Model in Mathematical Finance: Game-Theoretic Methods. — New York: Springer, 2013. — 348 p.
22. *Gander W., Golub G. H., Van Mott U.* A constrained eigenvalue problem // LinearAlgebra Appl. 1989. Vol. 114-115. Pp. 815–839.
23. *Ушаков В. Н., Ершов А. А.* Об оценке Хаусдорфова расстояния между множеством и его выпуклый оболочкой в евклидовых пространствах малый размерности // Труды института математики и механики УрО РАН. 2018. Том 24. № 1. С. 223–235.
24. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. Перевод с англ. — М.: Мир., 1973. — 469 с.
25. *Starr R.M.* Quasi-Equilibria in Markets with Non-Convex Preferences // Econometrica. 1969. Vol. 37. № 1. Pp. 25–38.
26. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. Перевод с нем. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 336 с.