С. Н. Смирнов[1]

ГАРАНТИРОВАННЫЙ ДЕТЕРМИНИСТСКИЙ ПОДХОД К СУПЕРХЕДЖИРОВАНИЮ: СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И АППРОКСИМАЦИЯ*

Введение

Настоящая работа непосредственно продолжает статью [1], примыкая к серии статей [2], [3], [4], [5], [6] и [7], в которой развивается гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию. Наиболее близким из представленных в литературе является подход В.М. Кололокольцова, описанный в [8]. Краткий обзор статей из этой серии приведен в [1]. Обзор релевантной литературы представлен в [2]. Учитывая достаточно подробное изложение логики подхода в статье [1], мы отсылаем читателя к этой статье за минимальным описанием сведений, необходимых для целей настоящей работы. Изложим кратко лишь основные идеи.

Рассматривается рынок, на котором представлено n рисковых активов и безрисковый актив, имеющий постоянную (дисконтированную) цену, равную единице. Поэтому, с учетом предположения о самофинансируемости[2], достаточно рассматривать динамику лишь дисконтированных цен рисковых активов. В предлагаемом подходе описание неопределенной динамики цен с дискретным временем и конечным горизонтом, $t = 0,\dots,N$, происходит посредством задания априорной информации о движении цен — приращения вектора дисконтированных цен[3] лежат в априорно заданных (непустых) компактах $K_t(\cdot)$, зависящих от предыстории цен[4]. Торговые ограничения, касаются только рисковых активов — допустимые стратегии

---

[1]Доцент факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: `s.n.smirnov@gmail.com`.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-01-00613 а.

[2]Отсутствие притока или оттока средств в портфеле, хеджирующем обусловленное обязательства по проданному опциону.

[3]Далее мы будем вместо «дисконтированные цены» всюду писать просто «цены».

[4]Точкой обознаются переменные, описывающие эволюцию цен. Более точно, это предыстория цен $\bar{x}_{t-1} = (x_0,\dots,x_{t-1}) \in (\mathbb{R}^n)^t$ для K_t и D_t, в то время как для функций v_t^* и g_t, введенных ниже, это история цен $\bar{x}_t = (x_0,\dots,x_t) \in (\mathbb{R}^n)^{t+1}$.

хеджирования[1] представляют собой выпуклые множества $D_t(\cdot)$, содержащие точку[2] 0, зависящие от предыстории цен.

Далее рассматривается американский опцион и задаются функции $g_t(\cdot)$, описывающие потенциальные выплаты по опциону (зависящие от истории цен), которые предполагаются ограниченными сверху на множестве возможных траекторий цен. Основным объектом изучения является величина $v_t^*(\cdot)$, зависящая от истории цен, — точная нижняя грань для стоимости хеджирующего портфеля в некоторый момент времени (вплоть до экспирации опциона) при известной предыстории, гарантирующая, при определенном выборе допустимой хеджирующей стратегии, исполнение текущих и будущих обязательств, возникающих в отношении возможных выплат по американскому опциону. Непосредственно из экономического смысла суперхеджирования для $v_t^*(\cdot)$ выводятся уравнения Беллмана–Айзекса, посредством выбора на каждом временном шаге «наилучшей» допустимой стратегии хеджирования для «наихудшего» сценария приращения цен.

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot),\ t = N, \dots, \end{aligned} \tag{1}$$

где[3]

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} \left[w_t(\cdot, y) - hy \right], \tag{2}$$

а функции w_t задаются соотношением[4]

$$w_t(\bar{x}_{t-1}, y) = w_t(x_0, \dots, x_{t-1}, y) = v_t^*(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y). \tag{3}$$

Тем самым возникает динамическая игра и соответствующая задача динамического программирования. Для корректности постановки задачи везде далее будем считать, что выполнены предположения, перечисленные в теореме 3.1 из [2], а также предположения, перечисленные в пункте 1) замечания 3.1 из [2]. При этом удобно (формально) считать, что $g_0 = -\infty$ (отсутствие обязательств по выплатам в начальный момент времени); $g_t \geqslant 0$ для $t = 1, \dots, N$ в случае американского опциона. Многозначные отображения $x \mapsto K_t(x)$ и $x \mapsto D_t(x)$, а также функции $x \mapsto g_t(x)$, предполагаются заданными для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$, $t = 1, \dots, N$. Поэтому функции $x \mapsto v_t^*(x)$ задаются уравнениями (1) для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$. В уравнениях (1) функции v_t^*, а также соответствующие точные верхние и нижние грани, принимают значения в

[1]Структура хеджирующего портфеля, т.е. вектор с координатами, равными количеству рисковых активов.

[2]Это означает, что допустимо все средства вкладывать в безрисковый актив

[3]Здесь и далее $hy = \langle h, y \rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, а точкой обозначается переменная $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \dots, x_{t-1}) \in (\mathbb{R}^n)^t$, т.е. предыстория цен.

[4]Для удобства обозначений в последней переменной функций v_t^* сделана «аддитивная» замена переменных.

расширенном множестве вещественных чисел $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ – двухточечной компактификации[1] $\mathbb{R}$.

Разумеется, для того чтобы получать экономически содержательные результаты, необходимо дополнительное предположение о поведении рынка, а именно, о безарбитражности[2]. Безарбитражность в детерминистской постановке на рассматриваемом временном интервале определяется как безарбитражность на каждом шаге времени, а безарбитражность на одном временном шаге определяется как безарбитражность для любой предыстории цен. В [3] вводятся различные определения безарбитражности для детерминистской модели финансового рынка — условие NDAO отсутствия арбитражных возможностей, условие NDSA отсутствия гарантированного арбитража и условие NDSAUP отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью[3].

Фундаментальное значение играет принцип структурной устойчивости (грубости) модели. С экономической точки зрения, для модели рынка в нашем контексте этот принцип естественно применить к свойству безарбитражности (в том или ином смысле); в [3] предложена следующая формализацию. Грубое (робастное) условие безарбитражности означает сохранение этого свойства для заданной предыстории цен при достаточно малых в смысле метрики Помпею–Хаусдорфа возмущениях компактов $K_t(\cdot)$, где лежат приращения цен, описывающих неопределенность движения цен[4]. Для грубых условий NDAO, NDSA и NDSAUP используется аббревиатура RNDAO, RNDSA и RNDSAUP соответственно. В [3] и [9] установлены различные геометрические критерии для справедливости грубых условий безарбитражности,

В [4] установлен ряд результатов, касающихся полунепрерыности и непрерывности. По теореме 3.2 из работы [4] решения v_t^* уравнений (1) будут непрерывны, если для $t = 1, \dots, N$ выполняются следующие условия.

1) Числовые функции $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$ непрерывны[5].

2) Компактозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ непрерывны.

---

[1]Окрестности точек $-\infty$ и $+\infty$ имеют вид $[\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$ и $(b, +\infty]$, $b \in \mathbb{R}$ соответственно.

[2]Неологизм, означающий отсутствие арбитража в том или ином смысле, что может быть формализовано различными способами.

[3]В случае отсутствия торговых ограничений, условия NDSA и NDSAUP эквивалентны.

[4]Если задание компактов $K_t(\cdot)$, описывающих движение цен, естественно считать заданными приближенно, то торговые ограничения $D_t(\cdot)$ естественно считать заданными точно.

[5]Для компактнозначных отображений h-непрерывность равносильна непрерывности, см. Теорему 2.68 из [14]

3) Многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу и замкнуты.

4) Имеет место структурная устойчивость модели — выполнено грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP.

Отметим, что в этом случае множество B_t возможных траекторий цен рисковых активов на временном интервале $[0,t]$, определяемое для $t = 0,1,\ldots,N$ посредством

$$B_t = \{\bar{x}_t : x_0 \in K_0,\ \Delta x_1 \in K_1(x_0),\ \ldots,\ \Delta x_t \in K_t(\bar{x}_{t-1})\},$$

компактно.

В [5], в предположении отсутствия торговых ограничений, при соответствующих предположениях[1], непрерывность доказана конструктивно, с оценкой модуля непрерывности, а в [1] оценка модуля непрерывности получена в общем случае торговых ограничений, при предположениях 1) – 4); воспроизведем соответствующую формулировку, поскольку утверждение будет использоваться далее. С этой целью введем обозначения: для множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\|A\|_2 = \sup_{h\in A} \|h\|_2, \tag{4}$$

где $\|h\|_2$ — евклидова норма[2];

$$C_t^* = \bigvee_{s=t}^{N} C_s, \tag{5}$$

где константы C_t задаются соотношением

$$C_t = \sup_{x\ \in B_t} g_t(x) < \infty; \tag{6}$$

$$A_t^* = \sup_{x\in B_{t-1}} \|D_t(x) \cap E_t^{C_t^*}(x)\|_2, \tag{7}$$

где

$$E_t^a(\cdot) = \{\sigma_{K_t(\cdot)}(-h) \leqslant a\},\ a \geqslant 0. \tag{8}$$

Зададим норму для $\bar{x}_t \in (\mathbb{R}^n)^{t+1}$ посредством

$$\|\bar{x}_t\| = \sum_{s=0}^{t} \|x_s\|_1,$$

где

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |z^i| \text{ для } z = (z^1,\ldots,z^n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

[1] Отметим, что структурная устойчивость модели в данном случае принимает форму условия RNDAO (при отсутствии торговых ограничений равносильного условию RNDSAUP).

[2] Т.е. $\|h\|_2 = \sqrt{\langle h,h\rangle}$ для $h = (h^1,\ldots,h^n) \in \mathbb{R}^n$.

Если (X,ρ) и (Y,d) - метрические пространства, $E \subseteq X$, $E \neq \emptyset$, то для функции $f : X \mapsto Y$ и для $\delta \in [0,\infty)$ обозначим

$$\omega_f^E(\delta) = \sup_{x_1,x_2 \in E,\, \rho(x_1,x_2) \leqslant \delta} d\big(f(x_1), f(x_2)\big)$$

модуль непрерывности функции f на множестве E. Если $\sup\left\{\frac{\bar{\omega}_f^E(\delta)}{\delta} :\ \delta > 0\right\} = L_f < \infty$, то для функции f выполняется условие Липшица, а L_f — константа Липшица (для функции f).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия 1) – 4) , гарантирующие непрерывность решений уравнений Беллмана–Айзекса. Пусть, кроме того, множество $B_0 = K_0$ возможных начальных цен компактно. Тогда имеет место оценка модуля непрерывности $\omega_{v_s^*}$ функций v_s^*, $s = 1,\dots,N$:*

$$\begin{gathered}\omega_{v_{s-1}^*}^{B_{s-1}}(\delta) \leqslant \omega_{g_{s-1}}^{B_{s-1}}(\delta) \vee \left[\omega_{v_s^*}^{B_s}(\omega_{K_s}^{B_{s-1}}(\delta)) + A_s^* \omega_{K_s}^{B_{s-1}}(\delta) + \omega_{v_s^*}^{B_s}(\delta)\right],\\ \omega_{v_N^*}^{B_N} = \omega_{g_N}^{B_N},\end{gathered} \tag{9}$$

где величина A_t^*, задаваемая соотношением (7)*, конечна, а константы C_t^* задаются соотношениями* (5)*, причем v_t^* ограничены на множестве возможных траекторий:*

$$\sup_{x \in B_t} v_t^*(x) \leqslant C_t^*. \tag{10}$$

Если условия 1) и 2) усилить, потребовав чтобы $K_t(\cdot)$ и $g_t(\cdot)$ удовлетворяли условию Липшица, то функции v_t^*, решения уравнений Беллмана–Айзекса, удовлетворяют условию Липшица. Оценки констант Липшица[1] $L_{v_t^*}$ для v_t^* могут быть определены из следующих рекуррентных соотношений для $t = N,\dots,1$:

$$\begin{gathered}L_{v_N^*} = L_{g_N},\\ L_{v_{t-1}^*} = L_{g_{t-1}} \vee [L_{v_t^*}(L_{K_t} + 1) + A_t^* L_{K_t}],\ t = N,\dots,1.\end{gathered} \tag{11}$$

Следующий принципиально важный шаг в формализации задачи, предложенный в [6], — переход к смешанному расширению чистых стратегий «рынка». Под этим понимается класс $\mathscr{P}_t(\cdot)$ распределений, в который входят только меры с носителем, содержащимся в $K_t(\cdot)$, и все меры, сосредоточенные в одной точке $y \in K_t(\cdot)$. Гарантированный результат в динамической игре, при переходе от чистых стратегий «рынка» к смешанным (из смешанного расширения чистых стратегий «рынка») не изменится. Цель введения смешанных стратегий «рынка» состоит в получении результатов об игровом равновесии.

При сделанных выше предположениях 1)–4) относительно $K_t(\cdot)$, $D_t(\cdot)$ и $g_t(\cdot)$ имеет место равновесие для смешанного расширения $\mathscr{P}_t(\cdot) = \mathscr{P}(K_t(\cdot))$, где $\mathscr{P}(X)$ — класс всех вероятностных мер на метрическом пространстве X с борелевской σ-алгеброй. Значение игры

[1]Эти оценки непосредственно следуют из формул (9).

конечно и достигается для некоторой седловой точки – оптимальной пары $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$, $Q_t^*(\cdot) \in \mathscr{P}^n(K_t(\cdot))$, где $\mathscr{P}^n(X)$ — класс вероятностных мер на X, сосредоточенных не более чем в $n+1$ точке из X. Задача ценообразования сводится к уравнениям Беллмана

$$\begin{gathered} v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \sup_{Q \in \mathscr{Q}_t(\cdot)} \left[\int w_t(\cdot, y) Q(dy) - \sigma_{D_t(\cdot)}\left(\int y Q(dy) \right) \right], \end{gathered} \tag{12}$$

где $t = N, .., 1$ и

$$\mathscr{Q}_t(\cdot) = \{Q \in \mathscr{P}(K_t(\cdot)) : \int y Q(dy) \in \mathrm{bar}(D_t(\cdot))\},$$

а функции w_t задаются соотношением (3).

Тем самым, задача ценообразования обусловленных обязательств по опциону (нахождение функций $v_t^*(\cdot)$) отделена от задачи их хеджирования (нахождение стратегии хеджирования $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$).

Будем предполагать далее, что функции выплат по американскому опциону $g_t(\cdot)$, а также торговые ограничения, описываемые посредством $D_t(\cdot)$, известны точно, и сконцентрируем внимание на описывающих неопределенность движения цен компактнозначных отображениях $K_t(\cdot)$, задание которых естественно считать приближенным.

Одним из естественных способов приближенного решения задачи[1] для исходной модели рынка является построение возмущенной модели рынка, для которой компакты, описывающие неопределенность движения цен, устроены проще — например, представляют собой конечные множества, что как раз и используется для построения численного решения в [1]. Чтобы решение задачи для возмущенной модели рынка не потеряло бы экономический смысл (обладало бы качественными свойствами, аналогичными свойствам исходной системы), необходимо сохранение условий структурной устойчивости. Таким образом, при численном решении с заданной погрешностью, использующем возмущенную модель рынка, когда приращение цен лежит в компакте $\tilde{K}_t(\cdot)$, для возмущенной модели следует убедиться в сохранении безарбитражности — RNDSAUP, грубого условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью. С этой целью в [10] формализовано понятие порога структурной прочности модели, которое мы воспроизведем ниже.

Заметим, что в условиях безарбитражности фигурирует всегда выпуклая оболочка $\mathrm{conv}(K_t(\cdot))$ компактов $K_t(\cdot)$, а не сами эти компакты.

[1] Напомним, что речь идет о нахождения минимального уровня средств, необходимых для гарантированного покрытия обусловленного обязательства по проданному опциону, и надлежащей стратегии хеджирования (зависящих от предыстории цен).

Поэтому, с точки зрения анализа свойств безарбитражности, для описания близости компактов $K_t(\cdot)$, описывающих динамику рынка, разумно использовать полуметрику[1] на классе непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$:

$$p_\rho(A_1,A_2) = h_\rho(\mathrm{conv}(A_1),\mathrm{conv}(A_2)), \tag{13}$$

где h_ρ — метрика Помпею–Хаусдорфа, отвечающая евклидовой метрике ρ на $\mathbb{R}^n$. При этом для непустых компактов A_1 и A_2 справедливо неравенство (см., например, предложение 5.2, формула (5.12) в [11]):

$$h_\rho(\mathrm{conv}(A_1),\mathrm{conv}(A_2)) \leqslant h_\rho(A_1,A_2). \tag{14}$$

Не ограничивая общности можно считать, что выпуклые множества $D_t(\cdot)$ являются замкнутыми (что мы и будем предполагать везде далее), поскольку критерии безарбитражности могут быть сформулированы в терминах опорной функции множества $D_t(\cdot)$.

Будем предполагать, что торговые ограничения $D_t(\cdot)$ для исходной и возмущенной модели одни и те же, так что они отличаются лишь описывающими неопределенность движения цен компактами, соответственно $K_t(\cdot)$ и $\tilde{K}_t(\cdot)$.

Определение 1. Если для исходной модели выполняется грубое условие безарбитражности RNDSAUP, то будем называть порогом структурной устойчивости модели в момент t (при известной предыстории цен) величину $\mathfrak{p}_t(K_t(\cdot)) > 0$, которая принимает значение $+\infty$, если условие безарбитражности RNDSAUP выполняется при любых возмущениях $\tilde{K}_t(\cdot)$ модели, а в противном случае определяется посредством двух условий:

1. для любой возмущенной модели, такой что $p_\rho(K_t(\cdot),\tilde{K}_t(\cdot)) < \mathfrak{p}_t(K_t(\cdot))$, выполняется условие RNDSAUP;
2. найдется такая возмущенная модель, для которой $p_\rho(K_t(\cdot),\tilde{K}_t(\cdot)) > \mathfrak{p}_t(K_t(\cdot))$ и условие RNDSAUP не выполняется.

Из леммы 1 и теоремы 3 в [10] вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть для исходной модели выполняется RNDSAUP, грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью. Тогда*

1. Порог структурной устойчивости равен[2]

$$\mathfrak{p}_t(K_t(\cdot)) = \min_{l\in S_1(0)} \sigma_{\mathrm{conv}(K_t(\cdot))-\mathrm{bar}(D_t(\cdot))}(l) > 0, \tag{15}$$

[1] Можно модифицировать и определения грубости для того или иного свойства безарбитражности, используя полуметрику p_ρ из (13) вместо метрики h_ρ. Неравенство (14) свидетельствует о том, что модифицированные таким образом определения будут основаны на более слабой (но релевантной для этой цели) формализации близости компактов. Отметим, что на классе выпуклых компактов данная полуметрика становится метрикой, совпадающей с метрикой Помпею–Хаусдорфа.

[2] Здесь использовано обозначение $A - B = A + (-B)$.

а также имеет место равенство[1]

$$\mathfrak{p}_t(K_t(\cdot)) = \inf_{l \in S_1(0) \cap (-\operatorname{rec}(D_t(\cdot)))} \sigma_{K_t(\cdot)}(l), \tag{16}$$

где $\operatorname{rec}(A)$ *— рецессивный конус выпуклого множества* A*, а* $S_r(x)$ *обозначает сферу радиуса* r *центром в точке* x*.*

2. *В случае, если множества* $D_t(\cdot)$ *компактные*[2]*, порог структурный устойчивости принимает бесконечное значение,* $\mathfrak{p}_t(K_t(\cdot)) = +\infty$*. В случае, если множества* $D_t(\cdot)$ *неограниченные, точная верхняя грань в формуле* (16) *достигается и имеет место неравенство*

$$|\,\mathfrak{p}_t(K_t(\cdot)) - \mathfrak{p}_t(\tilde{K}_t(\cdot))\,| \leqslant p_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot)). \tag{17}$$

Аппроксимация динамики цен

Наша цель состоит в получении оценок чувствительности решений уравнений (1) Беллмана-Айзекса по отношению к равномерно малым возмущениям компактов $K_t(\cdot)$, описывающих динамику цен исходной модели. При этом мы не накладываем никаких условий, касающихся гладкости или даже измеримости для компактозначных отображений $\tilde{K}_t(\cdot)$, описывающих динамику цен возмущенной модели. В этой связи рассмотрим два класса моделей.

1. *Модели с неограниченными коническими торговыми ограничениями*:

   для $t = 1, \ldots, N$ и любой предыстории цен x множество $D_t(x)$, описывающее торговые ограничения, является выпуклым конусом, не сводящимся к одноточечному множеству.

2. *Модели с ограниченными торговыми ограничениями*:

   для $t = 1, \ldots, N$ и любой предыстории цен x множества $D_t(x)$, описывающие торговые ограничения, являются ограниченными.

Отметим, что нам неизвестны содержательные примеры моделей, имеющих какую-либо практическую интерпретацию, для которой торговые ограничения $D_t(\cdot)$ могли бы быть неограниченными для одних предысторий цен и ограниченными для других предысторий цен.

Условие структурной устойчивости для моделей с ограниченными торговыми ограничениями выполняется автоматически. Для моделей с неограниченными торговыми ограничениями следует убедиться в выполнении RNDSAUP, грубого условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью.

---

[1]Здесь принимается конвенция $\inf \emptyset = +\infty$

[2]Конкретные модели, для которых компактность торговых ограничений выполняется, приведены в [2], пример 2.1, п. 4.

В соответствии с леммой 3.1 из [4], в которой предполагается, что выполнено условие RNDSAUP и множества $D_t(\cdot)$ замкнуты, для любого $a \geqslant C_t^*$, где C_t^* задается формулой (5), имеет место равенство

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h\in D_t(\cdot)} \sup_{y\in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot,y) - hy] = \inf_{h\in D_t(\cdot)\cap E_t^a(\cdot)} \sup_{y\in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot,y) - hy]; \qquad (18)$$

множество $E_t^a(\cdot)$ задается формулой (8), при этом множества $D_t(\cdot)\cap E_t^a(\cdot)$ компактны. Для возмущенной модели будем использовать аналогичные обозначения:

$$\tilde{E}_t^a(x) = \{h \in \mathbb{R}^n : \ \sigma_{\tilde{K}_t(x)}(h) \leqslant a\}. \qquad (19)$$

Утверждение 1. *Пусть выполнено условие RNDSAUP, для некоторый предыстории цен $x \in B_{t-1}$, где $t = 1,\dots,N$, множество $D_t(x)$ является замкнутым выпуклым конусом, не сводящимся к одноточечному множеству $\{0\}$. Тогда для $a > 0$ имеет место неравенство*[1]

$$\|D_t(x)\cap E_t^a(x)\|_2 \leqslant \frac{a}{\mathfrak{p}_t(K_t(x))}\,. \qquad (20)$$

Доказательство. По условию конус $D_t(x)$ является неограниченным, т.е. содержит хотя бы один луч. Заметим, что для $a > 0$ множество

$$\frac{1}{a}E_t^a(x) = \{h : \sigma_{K_t(x)}(-h) \leqslant 1\} = \{h : \sigma_{-K_t^*(x)}(h) \leqslant 1\}$$

является полярным (по Минковскому) для $-K_t^*(\cdot)$, см. формулу (70) и теорему 12.2 из [12]. По теореме 6.6 из [12], пункт a), точка 0 является внутренней точкой полярного к $-K_t^*(x)$ множества, поскольку оно ограничено (в силу компактности, по теореме 2.6 из [12]). Поэтому $0 \in \operatorname{int}(E_t^a(x))$, а значит выпуклое множество $D_t(x) \cap E^a(x)$ содержит точки, отличные от точки 0. Следовательно, при достаточно малом $\theta > 0$

$$\left[\theta^{-1}\bigl(D_t(x)\cap E_t^a(x)\bigr)\right]\cap S_1(0) \neq \emptyset. \qquad (21)$$

Фиксируем $\theta > 0$, удовлетворяющие условию (21), и рассмотрим множество

$$F_t^a(x,\theta) = \{h \in D_t(x)\cap E_t^a(x) : \ \|h\| = \theta\}. \qquad (22)$$

Заметим, что $h \in F_t^a(x,\theta)$ равносильно $h = \theta l$, где $l \in \left[\theta^{-1}\bigl(D_t(x)\cap E_t^a(x)\bigr)\right]\cap S_1(0)$, так что $F_t^a(x,\theta) \neq \emptyset$. Для любого вектора $h \in D_t(x)\cap E_t^a(x)$ имеем $\sigma_{K_t(x)}(-h) \leqslant a$, поэтому справедливы неравенства

$$\begin{aligned} a \geqslant \sup_{h\in F_t^a(x,\theta)} \sigma_{K_t(x)}(-h) = \sup_{l\in\left[\theta^{-1}\left(D_t(x)\cap E_t^a(x)\right)\right]\cap S_1(0)} \sigma_{K_t(x)}(-\theta l) \geqslant \\ \theta \inf_{l\in\left[\theta^{-1}\left(D_t(x)\cap E_t^a(x)\right)\right]\cap S_1(0)} \sigma_{K_t(x)}(-l) \geqslant \\ \theta \inf_{l\in\left[\theta^{-1}\left(D_t(x)\right)\right]\cap S_1(0)} \sigma_{K_t(x)}(-l) = \\ \theta \inf_{l\in -\operatorname{rec}(D_t(x))\cap S_1(0)} \sigma_{K_t(x)}(l) = \theta\mathfrak{p}_t(K_t(x)). \end{aligned} \qquad (23)$$

[1]Напомним, что мы используем обозначение $\|A\|_2 = \sup\{\|z\|_2 : z \in A\}$, где $\|h\|_2$ — евклидова норма.

Здесь мы использовали формулу (16) из теоремы 2, а также то, что замкнутый выпуклый конус совпадает со своим рецессивным конусом (см., например, теоремы 8.2 и 8.3 из [13]). Кроме того, благодаря условию структурной устойчивости RNDSAUP, по теореме 2 имеем $\mathfrak{p}_t(K_t(x)) > 0$. Таким образом, мы получили $\theta \leqslant \frac{a}{\mathfrak{p}_t(K_t(x))}$, откуда и следует требуемое неравенство.

При численной аппроксимации $K_t(\cdot)$ «приближенным» компактнозначным отображением $\tilde{K}_t(\cdot)$ в момент времени $t = 1,\ldots,N$ будем обозначать через $\delta_t(\cdot)$ требование на шаге t (при заданной предыстории цен) к величине ошибки вычислений[1]:

$$h_\rho(K_t(\cdot),\tilde{K}_t(\cdot)) \leqslant \delta_t(\cdot). \tag{24}$$

Отметим, что описание динамики цен «возмущенной» модели при помощи «приближенных» компактнозначных отображений $\tilde{K}_t(\cdot), t = 1,\ldots,N$ порождает новое множество возможных траекторий

$$\tilde{B}_t = \{\bar{x}_t : x_0 \in \tilde{K}_0, \Delta x_1 \in \tilde{K}_1(x_0),\ldots,\Delta x_t \in \tilde{K}_t(\bar{x}_{t-1})\},$$

Обозначим $\check{K}_t(\cdot) = K_t^{\delta(\cdot)}(\cdot)$, где используются обозначения $[A]^\delta = A + \bar{B}_\delta(0)$, $\delta \geqslant 0$, а $\bar{B}_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\|_2 \leqslant \delta\}$ — замкнутый шар радиуса δ с центром в нуле. Мы называем новую динамику рынка, задаваемую $\check{K}_t(\cdot) = K_t^{\delta(\cdot)}(\cdot)$, загрублением на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка. Далее мы будем использовать включение $\tilde{K}_t(\cdot) \subseteq \check{K}_t(\cdot)$; при этом[2] $h_\rho(K_t(\cdot),\check{K}_t(\cdot)) = e_\rho(\check{K}_t(\cdot),K_t(\cdot)) = \delta_t(\cdot)$. Поэтому множество возможных траекторий возмущенной модели $\tilde{B}_t$ содержится в множестве траекторий $\check{B}_t$, задаваемом посредством соотношений

$$\begin{gathered} \check{B}_0 = \check{K}_0 = [K_0]^{\delta_0} = K_0; \\ \check{B}_t = \{\, (\bar{x}_{t-1},x_t) : \ \bar{x}_{t-1} \in \check{B}_{t-1},\ x_t \in x_{t-1} + \check{K}_t(\bar{x}_{t-1})\,\},\ t = 1,\ldots,N \end{gathered} \tag{25}$$

Напомним, что постановка задачи изначально предполагает задание многозначных отображений $x \mapsto K_t(x)$ и $x \mapsto D_t(x)$, а также функции $x \mapsto g_t(x)$ для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$. Это же касается и динамики приближенной модели, т.е. $x \mapsto \tilde{K}_t(x)$ определено для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$. Для приближенного решения задачи нам будет достаточно, однако, рассматривать на шаге t лишь аргументы $x \in \check{B}_t$.

Лемма 1. *Пусть компактозначные отображения $x \mapsto K_t(x)$ полунепрерывны сверху на B_{t-1} и функции $\delta_t(\cdot)$ полунепрерывны сверху,*

[1] Логично считать, что в начальный момент ошибка вычислений отсутствует, т.е. $\delta_0 = 0$.

[2] Отклонение Помпею $e_\rho(A,B) = \sup\limits_{a\in A}\rho(a,B)$; в нормированном пространстве (в нашем случае в $\mathbb{R}^n$) для евклидовой метрики $\rho(x,y) = \|x-y\|_2$ отклонение Помпею равно $e_\rho(A,B) = \mathrm{int}\{r \geqslant 0 : A \subseteq B + B_r(0)\}$; расстояние Помпею-Хаусдорфа определяется как $h_\rho(A,B) = e_\rho(A,B) \bigvee e_\rho(B,A)$.

$t = 1, \ldots, N$. *Тогда многозначные отображения* $x \mapsto \check{K}_t(x) = K_t^{\delta(x)}(x)$ *полунепрерывны сверху на* $\check{B}_{t-1}$*, а множества* $\check{B}_t, t = 0, \ldots, N$ *компактны.*

Доказательство. Заметим, что множества $\check{K}_t(\cdot) = K_t^{\delta(\cdot)}(\cdot)$ компактны. Докажем утверждение по индукции. Для начального момента времени $s = 0$ множество $\check{B}_0$ компактно. Предположим, что для $s = t \geqslant 0$ множество $\check{B}_t$ компактно и рассмотрим для $s = t + 1$, опираясь на критерий полунепрерывности сверху компактозначных отображений — предложение 2.19 из главы 1 в [14], последовательность[1] пар (x_n, y_n), таких что $y_n \in K_{t+1}^{\delta(x_n)}(x_n)$ и $x_n \to x$. Выберем $y'_n \in K_{t+1}(x_n)$, такое что $\|y'_n - y_n\|_2 \leqslant \delta(x_n)$ и выберем подпоследовательность $y'_{n_k} \to y' \in K_{t+1}(x)$, которая существует по критерию из предложения 2.19 из главы 1 в [14]. Тогда $\limsup \|y' - y_{n_k}\|_2 \leqslant \limsup \delta(x_{n_k}) \leqslant \delta(x)$. Поэтому можно выделить сходящуюся подпоследовательность $y_{n_{k_m}} \to y$, причем $\|y' - y\|_2 \leqslant \delta(x)$, т.е. $y \in K_t^{\delta(x)}(x)$. Тем самым, отображение $\check{K}_t(\cdot)$ полунепрерывно сверху. Поэтому, отображение $x \mapsto F(x) = x + \check{K}_t(x)$ также полунепрерывно сверху. Учитывая, что множество $\check{B}_t$ компактно по индуктивному предположению, образ[2] $F(\check{B}_t) = \bigcup\limits_{x \in \check{B}_t} F(x)$ компакта $\check{B}_t$ для компактнозначного полунепрерывного отображения F является компактным (см., например, следствие 2.20 из главы 1 в [14]). В соответствие с формулой (25) множество B_{t+1} является графиком полунепрерывного сверху компактозначного отображения F; по предложению 2.22 из главы 1 в [14] это многозначное отображение замкнуто. Поскольку замкнутое множество B_{t+1} содержится в компакте $B_t \times F(B_t)$, то множество $\check{B}_{t+1}$ компактно.

Обозначим

$$\check{\mathfrak{p}}_t^* = \inf_{x \in \check{B}_{t-1}} \mathfrak{p}_t(K_t(x)) \tag{26}$$

и

$$\check{\delta}_t^* = \sup_{x \in \check{B}_{t-1}} \delta_t(x), \tag{27}$$

где $\delta_t(x)$ — требования к погрешности вычислений, см. формулу (24).

Теорема 3. *Пусть для исходной модели функции* $g_t(\cdot)$ *и компактнозначные отображения* $K_t(\cdot)$ *непрерывны, а многозначные отображения* $D_t(\cdot)$ *замкнуты и полунепрерывны снизу*[3]*. Кроме того,*

[1] В данном случае нет необходимости использовать направленности, поскольку речь идет о метрических пространствах.

[2] Здесь образ понимается в смысле многозначного отображения.

[3] Эти условия на $g_t(\cdot)$ и $K_t(\cdot)$ и $D_t(\cdot)$ вместе с условием RNDSAUP (которое следует как из предположения 1), так и из предположения 2), сформулированных ниже) гарантируют непрерывность решений уравнений Беллмана–Айзекса, по теореме 3.2 из [4] .

функции $\delta_t(\cdot)$ полунепрерывны сверху, $t = 1,\ldots,N$ и выполняется одно из двух предположений:

1) исходная модель имеет неограниченные конические торговые ограничения, а на погрешности вычислений наложены ограничения[1]

$$\inf_{x\in\check{B}_{t-1}} \left[\mathfrak{p}_t(K_t(x)) - \delta_t(x)\right] = \gamma_t > 0 \quad t = 1,\ldots,N; \tag{28}$$

2) исходная модель имеет ограниченные торговые ограничения[2]*.*

Тогда погрешность приближенного решения уравнений Беллмана-Айзекса допускает оценку[3]

$$\sup_{x\in\check{B}_t} |v_t^*(x) - \tilde{v}_t^*(x)| \leqslant \sum_{s=t+1}^{N} \left[\omega_{v_s^*}^{\check{B}_s}(\check{\delta}_s^*) + R_s^*\check{\delta}_s^*\right], \quad t = 0,\ldots,N, \tag{29}$$

причем $\check{\delta}_t^* < \infty$, $\quad t = 1,\ldots,N$;

- *для предположения 1) (в случае модели с неограниченными коническими торговыми ограничениями)*

$$R_t^* = \frac{\check{C}_t^*}{\gamma_t}, \tag{30}$$

где

$$\check{C}_t^* = \bigvee_{s=t}^{N} \check{C}_s,$$
$$\check{C}_t = \sup_{x\in\check{B}_t} g_t(x);$$

- *для предположения 2) (в случае модели с ограниченными торговыми ограничениями)*

$$R_t^* = \max_{x\in\check{B}_{t-1}} \|D_t(x)\|_2, \tag{31}$$

а модули непрерывности $\omega_{v_t^*}^{\check{B}_t}(\cdot)$ в (29) *могут быть рекуррентно оценены, используя формулы* (9).

Доказательство. В соответствии с леммой 1 множества $\check{B}_t$ компактны, а значит полунепрерывная сверху функция $\delta_t(x)$ достигает на $\check{B}_t$ максимального значения $\delta_t^* < \infty$.

Аргументы решений уравнений Беллмана–Айзекса $v_t^*(\cdot)$ и $\tilde{v}_t^*(\cdot)$ для исходной и возмущенной модели соответственно, будем рассматривать из

[1]Из неравенств (28) вытекает $\check{\mathfrak{p}}_t^* \geqslant \gamma_t > 0$. В свою очередь, из неравенства $\check{\mathfrak{p}}_t^* > 0$ вытекает условие RNDSAUP; достаточные условия для выполнения неравенства $\check{\mathfrak{p}}_t^* > 0$ сформулированы в теореме 4 из [10]. Кроме того, для справедливости неравенства (28) достаточно, чтобы $\check{\delta}_t^* < \check{\mathfrak{p}}_t^*$.

[2]Напомним, что в этом случае условие RNDSAUP автоматически выполняется.

[3]Принимаем конвенцию, что сумма по пустому множеству индексов равна нулю.

множества $\check{B}_{t-1}$, задаваемого посредством (25), поскольку $B_t \subseteq \check{B}_t$ и $\tilde{B}_t \subseteq \check{B}_t$, $t = 0, \ldots, N$. Обозначим

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \tag{32}$$

и

$$\tilde{\rho}_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy], \tag{33}$$

где $\tilde{w}_t(\bar{x}_{t-1}, y) = \tilde{v}_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y)$.

Уравнения Беллмана-Айзекса для исходной и возмущенной моделей соответственно можно записать в виде:

$$\begin{gathered} v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \bigvee \rho_t(\cdot),\ t = N, \ldots, 1, \end{gathered} \tag{34}$$

(для исходной модели) и

$$\begin{gathered} \tilde{v}_N^*(\cdot) = g_N(\cdot), \\ \tilde{v}_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \bigvee \tilde{\rho}_t(\cdot),\ t = N, \ldots, 1, \end{gathered} \tag{35}$$

(для возмущенной модели). Поэтому

$$|v_N^*(\cdot) - \tilde{v}_N^*(\cdot)| = 0,$$

а из неравенств (34) и (35) вытекает

$$\begin{gathered} |v_{t-1}^*(\cdot) - \tilde{v}_{t-1}^*(\cdot)| \leqslant |g_{t-1}(\cdot) \bigvee \rho_t(\cdot) - g_{t-1}(\cdot) \bigvee \tilde{\rho}_t(\cdot)| \leqslant \\ |\rho_t(\cdot) - \tilde{\rho}_t(\cdot)|, \quad t = N, \ldots, 1. \end{gathered} \tag{36}$$

Допустим, что для $t = 1, \ldots, N$ удалось найти компактные множества $D_t^*(\cdot) \subseteq D_t(\cdot)$, такие что

$$\sup_{x \in \check{B}_t} \|D_t^*(x)\|_2 = R_t^* < \infty, \tag{37}$$

а для любого $x \in \check{B}_{t-1}$ одновременно выполняются включения

$$D_t(x) \cap E_t^{C_t^*}(x) \subseteq D_t^* \tag{38}$$

и

$$D_t(x) \cap \tilde{E}_t^{\tilde{C}_t^*}(x) \subseteq D_t^*, \tag{39}$$

где

$$\begin{gathered} \tilde{C}_t^* = \bigvee_{s=t}^{N} \tilde{C}_s, \\ \tilde{C}_t = \sup_{x \in \tilde{B}_t} g_t(x). \end{gathered}$$

Тогда

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t^*} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \tag{40}$$

и

$$\tilde{\rho}_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t^*} \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy]. \tag{41}$$

С учетом (36) имеем неравенство

$$|v_{t-1}^*(\cdot) - \tilde{v}_{t-1}^*(\cdot)| \leqslant \sup_{h\in D_t^*(\cdot)} \left| \sup_{y\in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot,y) - hy] - \sup_{y\in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot,y) - hy] \right|. \quad (42)$$

Далее,

$$\begin{aligned} &\Big| \sup_{y\in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot,y) - hy] - \sup_{y\in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot,y) - hy] \Big| \leqslant \\ &\Big| \sup_{y\in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot,y) - hy] - \sup_{y\in \tilde{K}_t(\cdot)} [w_t(\cdot,y) - hy] \Big| \\ +&\Big| \sup_{y\in \tilde{K}_t(\cdot)} [w_t(\cdot,y) - hy] - \sup_{y\in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot,y) - hy] \Big|. \end{aligned} \quad (43)$$

Первое из слагаемых в правой части неравенства (43) оценивается при помощи леммы 3 из [5], используя оценки модуля непрерывности функции $y \mapsto w_t(\cdot,y) + hy$, а также учитывая, что для $h \in D^*(\cdot)$ по сделанному предположению (37) имеет место неравенство $\|h\|_2 \leqslant R_t^*$:

$$\begin{aligned} &\Big| \sup_{y\in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot,y) - hy] - \sup_{y\in \tilde{K}_t(\cdot)} [w_t(\cdot,y) - hy] \Big| \leqslant \\ &\omega_{w_t}^{\check{B}_t}(h_\rho(K_t(\cdot),\tilde{K}_t(\cdot))) + \|h\|_2 h_\rho(K_t(\cdot),\tilde{K}_t(\cdot))) \leqslant \omega_{w_t}^{\check{B}_t}(\check{\delta}_t^*) + R_t^*\check{\delta}_t^*. \end{aligned} \quad (44)$$

В неравенстве (44) использована равномерная на компактном[1] множестве $\check{B}_t$ функций v_t^* (или, что равносильно, функций w_t), которая имеет место благодаря теореме 1.

Второе слагаемое в правой части неравенства (43) не превосходит

$$\sup_{y\in \tilde{K}_t(\cdot)} |w_t(\cdot,y) - \tilde{w}_t(\cdot,y)| \leqslant \sup_{y\in \check{K}_t(\cdot)} |w_t(\cdot,y) - \tilde{w}_t(\cdot,y)|. \quad (45)$$

Из (42) – (45) следует

$$\begin{aligned} &\sup_{\bar{x}_{t-1}\in \check{B}_{t-1}} |v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) - \tilde{v}_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1})| \leqslant \\ &\omega_{w_t}^{\check{B}_t}(\check{\delta}_t^*) + R_t^*\check{\delta}_t^* + \sup_{\bar{x}_{t-1}\in \check{B}_{t-1}} \sup_{y\in \check{K}_{t-1}} |v_t^*(\bar{x}_{t-1},x_{t-1}+y) - \tilde{v}_t^*(\bar{x}_{t-1},x_{t-1}+y)| = \\ &= \omega_{w_t}^{\check{B}_t}(\check{\delta}_t^*) + R_t^*\check{\delta}_t^* + \sup_{\bar{x}_t\in \check{B}_t} |v_t^*(\bar{x}_t) - \tilde{v}_t^*(\bar{x}_t)|. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\varepsilon_t = \sup_{x\in \check{B}_t} |v_t^*(x) - \tilde{v}_t^*(x)|, \quad (46)$$

получаем рекуррентные неравенства:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_N = 0; \\ &\varepsilon_{t-1} \leqslant \left[\omega_{w_t}^{\check{B}_t}(\check{\delta}_t^*) + R_t^*\check{\delta}_t^*\right] + \varepsilon_t,\ t = N,\dots,1, \end{aligned} \quad (47)$$

откуда

$$\varepsilon_t \leqslant \sum_{s=t+1}^{N} \left[\omega_{w_s}^{\check{B}_s}(\check{\delta}_s^*) + R_s^*\check{\delta}_s^*\right]. \quad (48)$$

[1]В силу леммы 1.

Для случая исходной модели с ограниченными торговыми ограничениями, многозначные отображения $D_t(\cdot)$ принимают выпуклые значения, поэтому применима[1] теорема 2.102 из главы 1 в [14], так что многозначные отображения $D_t(\cdot)$ является непрерывными. Кроме того, в силу замкнутости многозначные отображения $D_t(\cdot)$ принимают замкнутые значения, а значит компактные.

По лемме 1 множество $\check{B}_t$ компактно, а образ компактного множества $D_t(\check{B}_t)$ является компактным[2]. Поэтому

$$\sup_{x\in\check{B}_t} \|D_t(x)\|_2 = R_t^* < \infty. \tag{49}$$

Выбирая в качестве множества $D_t^*(\cdot) = D_t(\cdot)$, получаем, что наряду с (37) выполняется включения (38) и (39).

Для случая исходной модели с неограниченными коническими торговыми ограничениями, используя неравенство (17), имеем для $x \in \check{B}_{t-1}$

$$\mathfrak{p}_t(\tilde{K}_t(\cdot)) \geqslant \mathfrak{p}_t(K_t(\cdot)) - \delta(\cdot) \geqslant \gamma_t \tag{50}$$

Используя Предложение 1 с выбором[3] $a = \check{C}_t^* \geqslant \tilde{C}_t^*$, для $x \in \check{B}_{t-1}$ получаем неравенство

$$\|D_t(x) \cap \tilde{E}_t^{\check{C}_t^*}(x)\|_2 \leqslant \frac{\check{C}_t^*}{\mathfrak{p}_t(\tilde{K}_t(x))} \leqslant \frac{\check{C}_t^*}{\gamma_t}. \tag{51}$$

В то же время, используя Предложение 1 с выбором $a = \check{C}_t^* \geqslant C_t^*$, для $x \in \check{B}_{t-1}$ получаем неравенство

$$\|D_t(x) \cap E_t^{\check{C}_t^*}(x)\|_2 \leqslant \frac{\check{C}_t^*}{\mathfrak{p}_t(K_t(x))} \leqslant \frac{\check{C}_t^*}{\check{\mathfrak{p}}_t^*} \leqslant \frac{\check{C}_t^*}{\gamma_t}. \tag{52}$$

Достаточно теперь выбрать $R_t^* = \frac{\check{C}_t^*}{\gamma_t}$ и положить $D_t^*(\cdot) = D_t(\cdot) \cap B_{R_t^*}(0)$ — тогда наряду с (37) выполняется включения (38) и (39).

Таким образом, мы доказали требуемый результат.

Замечание 1. *1) Из теоремы 3 можно сделать вывод, что правая часть неравенства* (29) *стремится к нулю при* $\check{\delta}_t^* \to 0$, $t = 0, \dots, N$, *т.е. решение уравнений Беллмана–Айзекса для возмущенный модели равномерно приближается к соответствующему решению исходный модели.*

2) Если в теореме 3 усилить требования к «гладкости» функций $g_t(\cdot)$ *и многозначных отображений* $K_t(\cdot)$ *— потребовать, чтобы они*

[1] Речь идет об утверждении, в соответствии с которым многозначное отображение с аргументом из метрического пространства и принимающее значения в виде линейно связных компактных подмножеств конечномерного евклидова пространства, полунепрерывное снизу и замкнутое, является непрерывным.

[2] Для этого достаточно полунепрерывности сверху отображения $D_t(\cdot)$, см. следствие 2.20 главы 1 из [14].

[3] Не ограничивая общности можно считать что константы $\check{C}_t^*$ являются положительными, так что $a > 0$.

удовлетворяли условию Липшица с константами L_{g_t} *и* L_{K_t} *соответственно, тогда функции Беллмана* v_t^* *для исходной модели также удовлетворяют условиям Липшица с константами* $L_{v_t^*}$*, которые могут быть определены из рекуррентных соотношений, аналогичных* (11).

3) В случае конических торговых ограничений барьерный конус $\mathrm{bar}(D_t(\cdot))$ *совпадает с конусом*

$$D^\circ(\cdot) = \{y \in \mathbb{R}^n : hy \leqslant 0 \text{ для всех } h \in D_t(\cdot)\}.$$

Из геометрических критериев NDSAUP, т.е. $\mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap \mathrm{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$ *и NDSA, т.е.* $\mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap D^\circ(\cdot) \neq \emptyset$ *— см. соответственно теорему 4.1 и пункт 3) предложения 3.1 из [3]), вытекает, что NDSAUP и NDSA в данном случае совпадают, а значит совпадают также RNDSAUP и RNDSA.*

4) В предположении отсутствия торговых ограничений имеет место случай модели с неограниченными коническими торговыми ограничениями. При этом порог структурной устойчивости $\mathfrak{p}_t(K_t(\cdot))$ *совпадает с максимальным радиусом шара с центром в точке* 0*, содержащегося в множестве* $\mathrm{conv}(K_t(\cdot))$*, или, что равносильно, с расстоянием от точки* 0 *до границы множества* $\mathrm{conv}(K_t(\cdot))$*, положительность которого эквивалентна условию RNDAO.*

Для случая исходной модели с неограниченными коническими торговыми ограничениями, если функции $g_t(\cdot)$ и многозначные отображения $K_t(\cdot)$ удовлетворяют условию Липшица с константами L_{g_t} и L_{K_t} соответственно, можно получить оценку для R_t^*, используя информацию о поведении динамики цен исходной модели на B_t (а не на $\check{B}_t$). С этой целью при численной аппроксимации $K_t(\cdot)$ «приближенным» компактнозначным отображением $\tilde{K}_t(\cdot)$ в момент времени t, установим требование к величине ошибки вычислений (см. (28)) на шаге t при заданной предыстории цен $x \in \check{B}_t \setminus B_t$ следующим образом[1]: $\delta_t(x) \equiv \delta_t^*$, где

$$\delta_t^* = \sup_{x \in B_{t-1}} \delta_t(x); \tag{53}$$

при этом $\check{\delta}_t^* = \delta_t^*$. Для $x \in \check{B}_t \setminus B_t$ найдется точка $x' \in B_t$, такая что $\rho(x,x') \leqslant \delta_t(x') \leqslant \delta_t^*$; используя неравенство (17) получаем

$$\begin{gathered} \mathfrak{p}_t(K_t(x)) \geqslant \mathfrak{p}_t(K_t(x')) - h_\rho(K_t(x)), K_t(x')) \geqslant \\ \mathfrak{p}_t^* - L_{K_t}\rho(x,x') \geqslant \mathfrak{p}_t^* - L_{K_t}\delta_t^*, \end{gathered} \tag{54}$$

где

$$\mathfrak{p}_t^* = \inf_{x \in B_{t-1}} \mathfrak{p}_t(K_t(x)); \tag{55}$$

отсюда

$$\mathfrak{p}_t(K_t(x)) - \delta_t(x) \geqslant \mathfrak{p}_t^* - (1 + L_{K_t})\delta_t^*.$$

[1]Заметим, что если функция $\delta_t(\cdot)$ полунепрерывна сверху на B_t, то при таком продолжении этой функции на $\check{B}_t$ полунепрерывность сверху сохраняется.

При этом для $x \in B_t$

$$\mathfrak{p}_t(K_t(x)) - \delta_t(x) \geqslant \mathfrak{p}_t^* - \delta_t^* \geqslant \mathfrak{p}_t^* - (1 + L_{K_t})\delta_t^*.$$

Таким образом, достаточно выбрать

$$\delta_t^* < \frac{\mathfrak{p}_t^*}{1 + L_{K_t}}. \tag{56}$$

Кроме того,

$$\check{C}_t \leqslant C_t + L_{g_t}\delta_t^*,$$

а значит

$$\check{C}_t^* = \bigvee_{s=t}^{N} \check{C}_s \leqslant \bigvee_{s=t}^{N} [C_s + L_{g_s}\delta_s^*], \tag{57}$$

так что при условии (56)

$$R_t^* \leqslant \frac{\bigvee_{s=t}^{N} [C_s + L_{g_s}\delta_s^*]}{\mathfrak{p}_t^* - (1 + L_{K_t})\delta_t^*}. \tag{58}$$

Далее, для оценки модуля непрерывности функций Беллмана v_t^*, удовлетворяющих условиям Липшица с константами $L_{v_t^*}$ воспользуемся рекуррентными соотношениями, аналогичными (11) :

$$\begin{gathered} L_{v_N^*} = L_{g_N}, \\ L_{v_{t-1}^*} = L_{g_{t-1}} \vee [L_{v_t^*}(L_{K_t} + 1) + \check{A}_t^* L_{K_t}],\ t = N, \dots, 1, \end{gathered} \tag{59}$$

где величины $\check{A}_t^*, t = N, \dots, 1$ оцениваются так же, как и R_t^*, при помощи (52) и (57):

$$\check{A}_t^* = \sup_{x \in \check{B}_{t-1}} \|D_t(x) \cap E_t^{\check{C}_t^*}(x)\|_2 \leqslant \frac{\bigvee_{s=t}^{N} [C_s + L_{g_s}\delta_s^*]}{\gamma} \leqslant \frac{\bigvee_{s=t}^{N} [C_s + L_{g_s}\delta_s^*]}{\mathfrak{p}_t^* - (1 + L_{K_t})\delta_t^*}. \tag{60}$$

Тем самым

$$\sup_{x \in \check{B}_t} |v_t^*(x) - \tilde{v}_t^*(x)| \leqslant \sum_{s=t+1}^{N} \delta_s^* \left[L_{v_s^*} + R_s^*\right]. \tag{61}$$

В качестве примера, когда можно явно посчитать порог структурной устойчивости, рассмотрим обобщенную[1] модель Колокольцова с торговыми ограничениями запрета коротких позиций, т.е. с неограниченными коническими ограничениями вида

$$D_t(\cdot) \equiv D = [0, \infty)^n,\ t = 1, \dots, N. \tag{62}$$

В этом случае детерминистская динамика цен $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n) \in (0, \infty)^n$ задается в мультипликативной форме:

$$X_t^i = M_t^i X_{t-1}^i,\ M_t = (M_t^1, \dots, M_t^n) \in C^\star,\ t = 1, \dots, N, \tag{63}$$

[1]В главах 13 и 14 из [8], написанных Колокольцовым, предполагалось отсутствие торговых ограничений.

где $C^\star$ — выпуклый компакт, $C^\star \subseteq (0,\infty)^n$. Для модели, описываемой при помощи соотношений (63),

$$K_t(x_0,\dots,x_{t-1}) = \{(\Lambda(m)-I)x_{t-1} : m \in C^\star\}, \tag{64}$$

где вектор $m = (m^1,\dots,m^n)$, матрица $\Lambda(m)$ — диагональная с элементами на диагонали, равными $m^1,\dots,m^n$, а I — единичная матрица[1]. Будем использовать обозначения $C' = C^\star - e$, где

$$C^\star = \prod_{i=1}^{n} [\alpha_i,\beta_i];\ 0<\alpha_i<\beta_i,\ i=1,\dots,n; \quad e=(1,\dots,1).$$

Поскольку множество D является конусом, то его барьерный конус $\mathrm{bar}(D)$ совпадает с полярным конусом D°, в данном случае совпадающим с конусом $-D$. Поэтому условие NDSAUP для данной модели, используя соответствующий геометрический критерий, можно записать в виде $C' \cap (-\infty,0]^n \neq \infty$, что равносильно $\alpha_i \leqslant 1$, $i=1,\dots,n$.. Ясно при этом, что если хотя бы одно значение α_j равно единице, то условие RNDSAUP не выполняется, поскольку сколь угодно малый сдвиг множества $K_t(\cdot)$ на вектор εe_i, где $\varepsilon > 0$, а e_i — вектор, у которого i-ая компонента равна единице, а остальные — нулю, уже имеет пустое пересечение с $\mathrm{bar}(D) = -D$. Таким образом, для выполнения условия RNDSAUP в данном случае необходимы неравенства

$$\alpha_i < 1,\ i=1,\dots,n. \tag{65}$$

Фиксируем момент времени $t=1,\dots,N$. Имеем выражение для опорной функции:

$$\sigma_{K_t(x)}(z) = \sup_{y\in K(x)} \sum_{i=1}^{n} z^i y^i = \sup_{L\in C'} \sum_{i=1}^{n} z^i L^i x^i = \sigma_{C'}((z^1x^1,\dots,z^nx^n)) = \sigma_{C'}(\Lambda(z)x),$$

где $\Lambda(z)$ – диагональная матрица:

$$\Lambda(z)_{ij} = \begin{cases} z^i, & \text{если } i=j; \\ 0, & \text{если } i\neq j. \end{cases}$$

Заметим, что $\Lambda(z)x = \Lambda(x)z$, так как i-я компонента этого вектора равна z_ix_i. Для статического торгового ограничения, задаваемого формулой (62), D - замкнутый выпуклый конус, так что $\mathrm{rec}(D) = D$.

Будем считать, что начальный вектор цен известен: $X_0 = x_0$ (и компоненты его положительны). Используя формулу (16), полученную в теореме 2 для вектора возможных значений цен в момент времени $t-1$ имеем $x \in \prod_{i=1}^{n} [x_0^i\alpha_i^{t-1}, x_0^i\beta_i^{t-1}]$ и

$$\mathfrak{p}_t(K_t(x)) = \min_{l\in S_1(0)\cap(-\infty,0]^n} \sigma_{K_t(x)}(l) = \min_{l\in S_1(0)\cap(-\infty,0]^n} \sigma_{C'}(\Lambda(x)l). \tag{66}$$

[1]Многозначное отображение, принимающее компактные выпуклые значения $x=(x^1,,\dots,x^n) \mapsto K(x)$, задаваемое посредством (64), удовлетворяет условию Липшица относительно метрики Помпею–Хаусдорфа, а явное выражение для константы Липшица найдено в предложении 2 и замечании 4 из [5].

Опорная функция $\sigma_{C'}$ параллелепипеда C' в точке $u = (u_1, \ldots, u_n)$ равна

$$\sigma_{C'}(u) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i' u_i) \vee (\beta_i' u_i)$$

где $\alpha_i' = \alpha_i - 1$ и $\beta_i' = \beta_i - 1$. Поэтому для вектора $u \in (-\infty, 0]^n$

$$\sigma_{C'}(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' u_i. \tag{67}$$

При этом $\alpha_i' < 0$ в соответствии с (65). Учитывая положительность компонент вектора x, из (66) и (67) получаем

$$\mathfrak{p}_t(K_t(x)) = \min_{l \in S_1(0) \cap (-\infty, 0]^n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' x_i l_i. \tag{68}$$

Сделаем замену переменных

$$l_i = -\sqrt{q_i}, \quad (q_1, \ldots, q_n) \in S_{n-1},$$

где S_{n-1} обозначает $(n-1)$-мерный симплекс, т.е.

$$S_{n-1} = \{q = (q_1, \ldots, q_n) : q_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, n; \sum_{i=1}^{n} q_i = 1\}.$$

Тогда задача минимизации (68) может быть переписана в виде

$$\mathfrak{p}_t(K_t(x)) = \min_{q \in S_{n-1}} \sum_{i=1}^{n} (-\alpha_i') x_i \sqrt{q_i}. \tag{69}$$

Вогнутая функция (69) достигает минимума в крайних точках симплекса S_{n-1}, т.е. при $q = e_i, i = i, \ldots, n$. Таким образом, для данного примера порог структурной устойчивости равен

$$\mathfrak{p}_t(K_t(x)) = \bigwedge_{i=1}^{n} (1 - \alpha_i) x_i, \tag{70}$$

и

$$\inf_{x \in B_{t-1}} \mathfrak{p}_t(K_t(x)) = \bigwedge_{i=1}^{n} (1 - \alpha_i) x_0^i \alpha_i^{t-1}. \tag{71}$$

Замечание 2. *Приведенный пример носит в значительной степени иллюстративный характер, поскольку ответ интуитивно понятен. Однако если в примере заменить прямоугольный параллелепипед $\check{C}$ на эллипсоид, то ответ уже отнюдь не очевиден: для этого придется решать (вообще говоря, численно) задачу нелинейного программирования.*

Рассмотрим эллипсоид

$$C^\star = \{m = (m^1, \ldots, m^n) : \langle \Gamma^{-1}(m - \mu), m - \mu \rangle \leqslant 1\}, \tag{72}$$

где Γ — симметрическая положительно определенная (тем самым, невырожденная) матрица[1] *, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$. Его опорная функция*

$$\sigma_{C^\star}(h) = \langle \mu, h \rangle + \sqrt{\langle \Gamma h, h \rangle}.$$

[1]Нам будет удобно интерпретировать Γ как некоторую ковариационную матрицу, а Γ^{-1}, ее обратную, — как соответствующую матрицу точности.

Параметры эллипсоида E выбираются таким образом, чтобы $E \subseteq (0,\infty)^n$, что равносильно системе неравенств

$$\langle \mu, e_i \rangle > \sqrt{\langle \Gamma e_i, e_i \rangle},\ i = 1,\dots,n, \tag{73}$$

где e_i — вектор, все координаты которого нулевые, кроме i-ой координаты, равной единице. Поскольку

$$\sigma_{K_t(x)}(z) = \sigma_{C'}(z) = \langle \Lambda(x)(\mu - e), z \rangle + \sqrt{\langle \Lambda(x)\Gamma\Lambda(x)z, z \rangle},$$

то $K_t(x)$ также представляет собой эллипсоид и порог структурной устойчивости в этом случае имеет вид [1]

$$\mathfrak{p}_t(K_t(x)) = \min_{l \in S_1(0) \cap (-\infty,0]^n} \left[\langle \Lambda(x)(\mu - e), l \rangle + \sqrt{\langle \Lambda(x)\Gamma\Lambda(x)l, l \rangle} \right]. \tag{74}$$

Литература

1. *Smirnov, S. N.* A Guaranteed Deterministic Approach to Superhedging: Sensitivity of Solutions of Bellman–Isaacs Equations and Numerical Methods // Computational Mathematics and Modeling, Vol. 31, No. 3, pp. 384-401.

2. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: модель рынка, торговые ограничения и уравнения Беллмана-Айзекса // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2018. Т. 10. №4. С. 59–99.

3. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства «безарбитражности» рынка // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2019. Т. 11. №2. С. 68–95.

4. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана-Айзекса // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2019. Т. 11. №4. С. 87–115.

5. *Smirnov S. N.* A Guarantied Deterministic Approach to Superhedging: Lipschitz Properties of Solutions of the Bellman-Isaacs Equations // In: “Frontiers of Dynamics Games. Game Theory and Management, St. Petersburg”. — Birkhäuser, Cham, 2019. — P. 267–288.

6. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: смешанные стратегии и игровое равновесие // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2020. Т. 12. №1. С. 60–90.

[1] Заменой переменных нахождение порога структурной устойчивости в этом случае может быть сведено к задаче (условной) минимизации положительно определенной квадратичной формы при смешанных квадратичных и линейных ограничениях.

7. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: наиболее неблагоприятные сценарии поведения рынка и проблема моментов // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2020. Т. 12. № 3. С. 50–88.

8. *Bernhard P., Engwerda J.C., Roorda B., Schumacher J., Kolokoltsov V., Saint-Pierre P., and Aubin J.-P.* The Interval Market Model in Mathematical Finance: Game-Theoretic Methods. — New York: Springer, 2013. — 348 p.

9. *Смирнов С. Н.* Геометрический критерий грубого условия отсутствия гарантированного арбитража // Вестник Московского универиситета. Серия 15. Вычислительная Математика и Кибернетика. 2020. № 3. С. 43–48.

10. *Смирнов С. Н.* Порог структурной устойчивости для грубого условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью // Вестник Московского универиситета. Серия 15. Вычислительная Математика и Кибернетика. 2021. № 1. С. 38–49.

11. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 2015. — 524 с.

12. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. Перевод с нем. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 336 с.

13. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. Перевод с англ. — М.: Мир., 1973. — 469 с.

14. *Hu S., Papageorgiou N.* Handbook of Multivalued Analysis: Theory, vol. I. Mathematics and Its Applications. Vol. 419. — Berlin: Springer, 1997. — 968 p.