

А. М. Денисов¹, С. И. Соловьева²

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА И ИСТОЧНИКА В УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ *

1. Введение

В многочисленных и разнообразных обратных задачах для уравнений математической физики важное значение имеет класс обратных задач для уравнений параболического типа. Эти задачи возникают в теплофизике, геофизике, физической химии, гидрогеологии и многих других научных и технологических областях. Изучению обратных задач для уравнений параболического типа посвящено большое число публикаций, смотри, например, [1-11] и имеющуюся там библиографию. Одним из направлений этих исследований являются обратные задачи, в которых неизвестными являются две или более функций. Различные аспекты анализа обратных задач такого типа рассматривались в работах [12-20].

Численные методы решения обратных задач имеют большое значение как для развития общей теории численных методов, так и для решения разнообразных прикладных проблем. Широко используемым классом подобных методов являются итерационные методы, которым посвящены работы [20-27] и ряд других.

В этой статье рассматриваются две обратные задачи для уравнения теплопроводности с неизвестным коэффициентом теплопроводности и неизвестной функцией, входящей в источник. Неизвестные функции зависят от времени и их требуется определить по дополнительной информации о решении начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности. Различие в обратных задачах определяется характером дополнительной информации, используемой для их решения. Одна из этих обратных задач была изучена в работе [20], в которой был предложен и обоснован итерационный метод ее численного решения. В этой статье разработан и обоснован итерационный метод другой

¹Профессор факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: den@cs.msu.ru .

²Доцент факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: sol@cs.msu.ru .

*Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

обратной задачи и приведены результаты применения итерационных методов для численного решения одной и другой обратной задачи.

2. Обратная задача 1 и метод ее решения

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = k(t)u_{xx} + g(t)f(x), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (3)$$

Будем предполагать, что функции $k(t)$ и $g(t)$ непрерывны на отрезке $[0, T]$, $k(t)$ положительна на этом отрезке, а функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям:

$$f \in C^6[0, \pi], \quad f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(\pi) = 0, \quad k = 0, 1, 2; \quad (4)$$

$$\varphi \in C^6[0, \pi], \quad \varphi^{(2k)}(0) = \varphi^{(2k)}(\pi) = 0, \quad k = 0, 1, 2. \quad (5)$$

При сделанных предположениях решение задачи (1)-(3) существует, единственно и определяется формулой

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \exp \left(-n^2 \int_0^t k(\theta) d\theta \right) \sin nx + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \int_0^t \exp \left(-n^2 \int_{\tau}^t k(\theta) d\theta \right) g(\tau) d\tau \sin nx, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(s) \sin ns ds, \quad f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(s) \sin ns ds.$$

Сформулируем обратную задачу 1. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ заданы, а функции $k(t)$ и $g(t)$ неизвестны. Требуется определить $k(t)$ и $g(t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)-(3):

$$u_x(0, t) = p(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7)$$

$$u(x_0, t) = q(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

где $p(t)$ и $q(t)$ - известные функции, а x_0 - заданное число $x_0 \in (0, \pi)$.

Далее будем предполагать, что функции $p(t)$ и $q(t)$ удовлетворяют следующим условиям

$$p, h \in C^1[0, T], \quad p(0) = \varphi'(0), \quad q(0) = \varphi(x_0). \quad (9)$$

Дадим определение решения обратной задачи 1. Далее, чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1)-(3) от функций $k(t)$ и $g(t)$, будем обозначать его через $u(x, t; k, g)$. Пусть $t_0 \in (0, T]$.

Определение. Функции $k(t)$ и $g(t)$ называются решением обратной задачи 1 для $t \in [0, t_0]$, если: $k, g \in C[0, t_0]$, $k(t) > 0$ для $t \in [0, t_0]$, $u(x, t; k, g)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3), (7), (8) для $t \in [0, t_0]$.

Пусть функции $k(t)$ и $g(t)$ являются решением обратной задачи 1 для $t \in [0, t_0]$. Выведем систему нелинейных операторных уравнений для этих функций.

Введем операторы, действующие на функции $k(t)$ и $g(t)$

$$A_1[k](t) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \varphi_n \exp \left(-n^2 \int_0^t k(\theta) d\theta \right), \quad (10)$$

$$\tilde{A}_2[k](t) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \varphi_n \sin(nx_0) \exp \left(-n^2 \int_0^t k(\theta) d\theta \right), \quad (11)$$

$$B_1[k; g](t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 f_n \int_0^t \exp \left(-n^2 \int_{\tau}^t k(\theta) d\theta \right) g(\tau) d\tau, \quad (12)$$

$$\tilde{B}_2[k; g](t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 f_n \sin(nx_0) \int_0^t \exp \left(-n^2 \int_{\tau}^t k(\theta) d\theta \right) g(\tau) d\tau. \quad (13)$$

Дифференцируя формулу (6) по x и по t , полагая $x = 0$, используя условие (7) и формулы (10), (12), получаем для $t \in [0, t_0]$ уравнение

$$k(t)A_1[k](t) + g(t)f'(0) - k(t)B_1[k; g](t) = p'(t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (14)$$

Дифференцируя формулу (6) по t , полагая $x = x_0$, используя условие (8) и формулы (11), (13), получаем для $t \in [0, t_0]$ уравнение

$$k(t)\tilde{A}_2[k](t) + g(t)f(x_0) - k(t)\tilde{B}_2[k; g](t) = q'(t), \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (15)$$

Введем операторы

$$\begin{aligned} \tilde{C}[k; g](t) &= [p'(t)f(x_0) - q'(t)f'(0)] \times \\ &\times [(A_1[k](t) - B_1[k; g](t))f(x_0) - (\tilde{A}_2[k](t) - \tilde{B}_2[k; g](t))f'(0)]^{-1}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}[k; g](t) &= \\ &= [p'(t)(\tilde{A}_2[k](t) - \tilde{B}_2[k; g](t)) - q'(t)(A_1[k](t) - B_1[k; g](t))] \times \\ &\times [(\tilde{A}_2[k](t) - \tilde{B}_2[k; g](t))f'(0) - (A_1[k](t) - B_1[k; g](t))f(x_0)]^{-1} \end{aligned} \quad (17)$$

Разрешая систему уравнений (14), (15) и учитывая определения (16)-(17), получаем систему нелинейных операторных уравнений для функций $k(t)$ и $g(t)$

$$k(t) = \tilde{C}[k; g](t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (18)$$

$$g(t) = \tilde{D}[k; g](t), \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (19)$$

Система операторных уравнений (18), (19) позволяет определить итерационный процесс для решения обратной задачи 1.

Найдем начальное приближение. Предположим, что выполнено условие

$$(p'(0)f(x_0) - q'(0)f'(0))(\varphi'''(0)f(x_0) - \varphi''(x_0)f'(0)) > 0. \quad (20)$$

Положив в уравнениях (18), (19) $t = 0$, получим, что

$$k(0) = \tilde{k}_0 = \frac{p'(0)f(x_0) - q'(0)f'(0)}{\varphi'''(0)f(x_0) - \varphi''(x_0)f'(0)} > 0, \quad (21)$$

$$g(0) = \tilde{g}_0 = \frac{p'(0)\varphi''(x_0) - q'(0)\varphi'''(0)}{f'(0)\varphi''(x_0) - f(x_0)\varphi'''(0)}. \quad (22)$$

Рассмотрим итерационный процесс

$$k_{m+1}(t) = \tilde{C}[k_m; g_m](t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

$$g_{m+1}(t) = \tilde{D}[k_m; g_m](t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

где $k_0(t) = \tilde{k}_0$, $g_0(t) = \tilde{g}_0$, и докажем его сходимость к решению обратной задачи.

Теорема. Пусть функции $f(x)$, $\varphi(x)$, $p(t)$ и $q(t)$ удовлетворяют условиям (4),(5),(9) и (20). Тогда существует $t_0 \in (0, T]$ такое, что последовательности функций $k_m(t), g_m(t)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, определенных итерационным процессом (23),(24), равномерно сходятся на отрезке $[0, t_0]$ к функциям $\bar{k}(t)$, $\bar{g}(t)$, являющимся решением обратной задачи 1 для $t \in [0, t_0]$.

Доказательство. Обозначим через $\bar{C}[0, t_0]$ пространство вектор функций $r(t) = \{k(t); g(t)\}$ непрерывных на отрезке $[0, t_0]$ с нормой $\|r\|_{\bar{C}[0, t_0]} = \|k\|_{C[0, t_0]} + \|g\|_{C[0, t_0]}$.

Введем функцию $r_0(t) = \{\tilde{k}_0; \tilde{g}_0\}$ и множество

$$R_0 = \{r(t) \in \bar{C}[0, t_0]; \quad \|r - r_0\|_{\bar{C}[0, t_0]} \leq \tilde{k}_0/2\}.$$

Оператор

$$\tilde{M}[r](t) = \{\tilde{C}[k; g](t); \tilde{D}[k; g](t)\}, \quad (25)$$

где операторы $\tilde{C}[k; g](t)$, $\tilde{D}[k; g](t)$ определены формулами (16),(17), отображает множество R_0 в $\bar{C}[0, t_0]$. Сходимость итерационного процесса (23),(24) эквивалентна сходимости метода последовательных приближений

$$r_{m+1}(t) = \tilde{M}[r_m](t), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

Докажем, что найдется $t_0 \in (0, T]$ такое, что метод последовательных приближений (26) сходится в норме пространства $\bar{C}[0, t_0]$.

Покажем, что существует $t_0 \in (0, T]$ при котором оператор $\tilde{M}[r](t)$ отображает множество R_0 в себя.

Из определения оператора $A_1[k](t)$ следует, что для $t \in [0, t_0]$

$$\begin{aligned} & |A_1[k](t) - A_1[k](0)| \leq \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^3 |\varphi_n| \left| \exp \left(-n^2 \int_0^t k(\theta) d\theta \right) - 1 \right| \leq c_1 t_0, \quad \forall r \in R_0, \end{aligned} \quad (27)$$

где $c_1 = \frac{3}{2} \tilde{k}_0 \sum_{n=1}^{\infty} n^5 |\varphi_n|$.

Здесь и далее через c_i обозначаются положительные постоянные, не зависящие от $r \in R_0$ и $t \in [0, T]$.

Принимая во внимание определение (11), имеем

$$\begin{aligned} & |\tilde{A}_2[k](t) - \tilde{A}_2[k](0)| \leq \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\varphi_n| \left| \exp \left(-n^2 \int_0^t k(\theta) d\theta \right) - 1 \right| \leq c_2 t_0, \quad \forall r \in R_0, \end{aligned} \quad (28)$$

где $c_2 = \frac{3}{2} \tilde{k}_0 \sum_{n=1}^{\infty} n^4 |\varphi_n|$.

Из определений (12) и (13) следует, что для $t \in [0, t_0]$

$$|B_1[k; g](t)| \leq t_0 c_5 \sum_{n=1}^{\infty} n^3 |f_n| = c_3 t_0 \quad \forall r \in R_0, \quad (29)$$

а

$$|\tilde{B}_2[k; g](t)| \leq t_0 c_5 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |f_n| = c_4 t_0 \quad \forall r \in R_0, \quad (30)$$

где $c_5 = |\tilde{g}_0| + \tilde{k}_0/2$. Выберем $t_0 \in (0, T]$ такое, что

$$|\varphi'''(0)f(x_0) - \varphi''(x_0)f'(0)| - |f(x_0)|(c_1 + c_3)t_0 - |f'(0)|(c_2 + c_4)t_0 \geq c_6 > 0. \quad (31)$$

Обозначим через $\omega_p(\delta)$ и $\omega_q(\delta)$ модули непрерывности функций $p'(t)$ и $q'(t)$ на отрезке $[0, T]$.

Из оценок (27)-(30) и условия (31) следует, что для $t \in [0, t_0]$ и всех $r \in R_0$

$$|\tilde{C}[k; g](t) - \tilde{k}_0| \leq c_6^{-1} [\omega_p(t_0)|f(x_0)| + \omega_q(t_0)|f'(0)|] + c_7 t_0, \quad (32)$$

где $c_7 = c_6^{-2} |p'(0)f(x_0) - q'(0)f'(0)| [|f(x_0)|(c_1 + c_3) + f'(0)(c_2 + c_4)]$. Аналогично, для $t \in [0, t_0]$ и всех $r \in R_0$ справедливо неравенство

$$|\tilde{D}[k; g](t) - \tilde{g}_0| \leq c_8 \omega_p(t_0) + c_9 \omega_q(t_0) + c_{10} t_0, \quad (33)$$

где

$$c_8 = c_6^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\varphi_n| + T c_5 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |f_n| \right),$$

$$c_9 = c_6^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^3 |\varphi_n| + T c_5 \sum_{n=1}^{\infty} n^3 |f_n| \right),$$

$$\begin{aligned} c_{10} = & c_6^{-1} [|p'(0)(c_2 + c_4) + |q'(0)|(c_1 + c_3)] + \\ & + c_6^{-2} |p'(0)\varphi''(x_0) - q'(0)\varphi'''(0)| [|f'(0)(c_2 + c_4) + |f(x_0)|(c_1 + c_3)]. \end{aligned}$$

Выберем положительное число t_0 так, что выполнено неравенство

$$(c_6^{-1}|f(x_0)| + c_8)\omega_p(t_0) + (c_6^{-1}|f'(0)| + c_9)\omega_q(t_0) + (c_7 + c_{10})t_0 \leq \tilde{k}_0/2. \quad (34)$$

Из оценок (32), (33) и неравенства (34) следует, что при таком t_0 оператор $\tilde{M}[r](t)$ отображает множество R_0 в себя.

Найдем условия, при выполнении которых оператор $\tilde{M}[r](t)$ является сжимающим на R_0 . Введем постоянные

$$c_{11} = c_6^{-1} \max_{[0,T]} |(p'(t)f(x_0) - q'(t)f'(0))|,$$

$$c_{12} = \|p'\|_{C[0,T]} \sum_{n=1}^{\infty} (|\varphi_n| + c_5 T |f_n|) n^2 + \|q'\|_{C[0,T]} \sum_{n=1}^{\infty} (|\varphi_n| + c_5 T |f_n|) n^3.$$

Пусть $r_1(t) = \{k_1(t); g_1(t)\}$ и $r_2(t) = \{k_2(t); g_2(t)\}$ - две произвольные функции из множества R_0 . Из определения (16) оператора $\tilde{C}[k; g]$ следует, что

$$\|\tilde{C}[k_1; g_1] - \tilde{C}[k_2; g_2]\|_{C[0,t_0]} \leq c_{13} t_0 \|k_1 - k_2\|_{C[0,T]} + c_{14} t_0 \|g_1 - g_2\|_{C[0,T]}, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} c_{13} &= c_{11} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (|f(x_0)| n^5 + |f'(0)| n^4) |\varphi_n| + \right. \\ &\quad \left. + c_5 T \sum_{n=1}^{\infty} (|f(x_0)| n^5 + |f'(0)| n^4) |f_n| \right], \\ c_{14} &= c_{11} \left[|f(x_0)| \sum_{n=1}^{\infty} n^3 |f_n| + |f'(0)| \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |f_n| \right]. \end{aligned}$$

Учитывая определение (17) оператора $\tilde{D}[k; g]$, имеем

$$\|\tilde{D}[k_1; g_1] - \tilde{D}[k_2; g_2]\|_{C[0,t_0]} \leq c_{15} t_0 \|k_1 - k_2\|_{C[0,T]} + c_{16} t_0 \|g_1 - g_2\|_{C[0,T]}, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} c_{15} &= (c_6^{-1} \|p'\|_{C[0,T]} + c_6^{-2} c_{12} |f'(0)|) \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^4 |\varphi_n| + c_5 T \sum_{n=1}^{\infty} n^4 |f_n| \right] + \\ &\quad + (c_6^{-1} \|q'\|_{C[0,T]} + c_6^{-2} c_{12} |f(x_0)|) \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^5 |\varphi_n| + c_5 T \sum_{n=1}^{\infty} n^5 |f_n| \right], \\ c_{16} &= (c_6^{-1} \|p'\|_{C[0,T]} + c_6^{-2} c_{12} |f'(0)|) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |f_n| + \\ &\quad + (c_6^{-1} \|q'\|_{C[0,T]} + c_6^{-2} c_{12} |f(x_0)|) \sum_{n=1}^{\infty} n^3 |f_n|. \end{aligned}$$

Из оценок (35), (36) следует, что если выполнены неравенства

$$(c_{13} + c_{15}) t_0 < 1, \quad (c_{14} + c_{16}) t_0 < 1, \quad (37)$$

то оператор $\tilde{M}[r](t)$ является сжимающим на R_0 .

Из полученных выше оценок очевидно, что существует положительное число t_0 , для которого справедливы неравенства (31), (34) и (37). При этом t_0 оператор $\tilde{M}[r](t)$ отображает множество R_0 в себя и является сжимающим на R_0 . Следовательно, определенные итерационным процессом (23), (24) функции $k_m(t)$, $g_m(t)$ при $m \rightarrow \infty$ равномерно сходятся

на отрезке $[0, t_0]$ к непрерывным функциям $\bar{k}(t)$ и $\bar{g}(t)$, являющимся решением системы операторных уравнений (18),(19). Функции $\bar{k}(t)$ и $\bar{g}(t)$ удовлетворяют системе уравнений (14),(15). Интегрируя эти уравнения и учитывая условия (9), получим, что функция $u(x, t; \bar{k}, \bar{g})$ удовлетворяет условиям (7) и (8), а значит функции $\bar{k}(t)$ и $\bar{g}(t)$ являются решением обратной задачи для $t \in [0, t_0]$. Теорема доказана.

3. Обратная задача 2 и метод ее решения

В работе [20] была изучена следующая обратная задача для уравнения (1). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ заданы, а функции $k(t)$ и $g(t)$ неизвестны. Требуется определить $k(t)$ и $g(t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)-(3):

$$u_x(0, t) = p(t), \quad u_x(\pi, t) = h(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (38)$$

где $p(t)$ и $h(t)$ известные функции, удовлетворяющие условиям $p, h \in C^1[0, T]$, $p(0) = \varphi'(0)$, $h(0) = \varphi'(\pi)$.

Опишем итерационный метод этой обратной задачи, который был предложен и обоснован в работе [20]. Введем операторы, действующие на функции $k(t)$ и $g(t)$

$$A_2[k](t) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \varphi_n \cos(n\pi) \exp \left(-n^2 \int_0^t k(\theta) d\theta \right), \quad (39)$$

и

$$B_2[k; g](t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 f_n \cos(n\pi) \int_0^t \exp \left(-n^2 \int_{\tau}^t k(\theta) d\theta \right) g(\tau) d\tau. \quad (40)$$

Используя определения (10),(12),(39) и (40), зададим операторы

$$C[k; g](t) = \frac{p'(t)f'(\pi) - h'(t)f'(0)}{(A_1[k](t) - B_1[k; g](t))f'(\pi) - (A_2[k](t) - B_2[k; g](t))f'(0)},$$

и

$$D[k; g](t) = \frac{p'(t)A_2[k](t) - h'(t)A_1[k](t)}{A_2[k](t)f'(0) - A_1[k](t)f'(\pi)} + \\ + \frac{k(t)(B_1[k; g](t)A_2[k](t) - B_2[k; g](t)A_1[k](t))}{A_2[k](t)f'(0) - A_1[k](t)f'(\pi)}.$$

Будем предполагать, что выполнено условие

$$(p'(0)f'(\pi) - h'(0)f'(0))(p'''(0)f'(\pi) - \varphi'''(\pi)f'(0)) > 0.$$

В работе [20] доказано, что существует положительное t_0 , для которого итерационный процесс

$$k_{m+1}(t) = C[k_m; g_m](t), \quad g_{m+1}(t) = D[k_m; g_m](t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (41)$$

где

$$k_0(t) = \frac{p'(0)f'(\pi) - h'(0)f'(0)}{\varphi'''(0)f'(\pi) - \varphi'''(\pi)f'(0)} > 0, \quad g_0(t) = \frac{p'(0)\varphi'''(\pi) - h'(0)\varphi'''(0)}{f'(0)\varphi'''(\pi) - f'(\pi)\varphi'''(0)}.$$

сходится к решению обратной задачи 2.

4. Результаты расчетов, иллюстрирующие сходимость итерационных методов

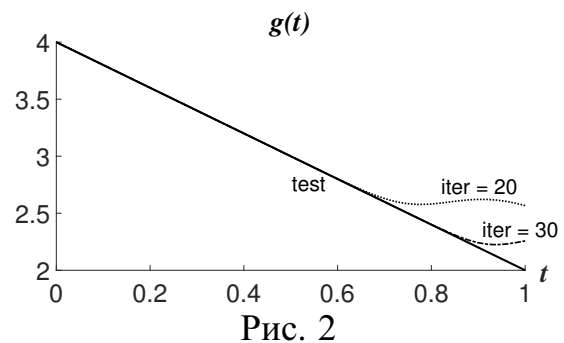
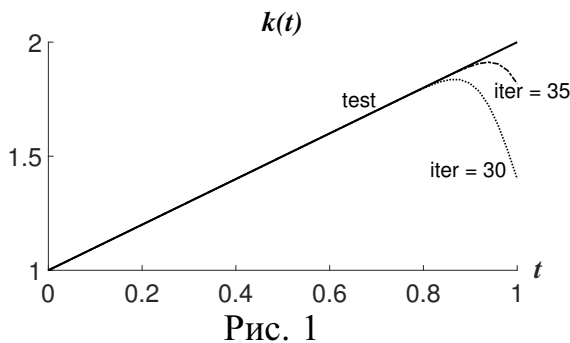
Численная реализация итерационных методов (23),(24) и (41) не вызывает особых затруднений. При приближенном вычислении значений операторов $\tilde{C}[k;g](t), \tilde{D}[k;g](t)$ и $C[k;g](t), D[k;g](t)$ интегралы заменяются квадратурными формулами, а ряды конечными суммами.

Приведем некоторые результаты расчетов, иллюстрирующие сходимость итерационных методов. Схема вычислительных экспериментов была такова. Задавались функции $\varphi(x)$, $f(x)$, "точные решения" $k(t)$, $g(t)$ и $x_0 = \pi/4$. С ними решалась задача (1)-(3) и определялись функции $p(t)$, $q(t)$, $h(t)$. Затем с исходными данными $\varphi(x)$, $f(x)$, $p(t)$, $q(t)$ итерационным методом (23),(24) решалась обратная задача 1, а с исходными данными $\varphi(x)$, $f(x)$, $p(t)$, $h(t)$ итерационным методом (41) решалась обратная задача 2. Во всех приводимых ниже примерах $T = 1$,

$$\varphi(x) = 3 \sin x + \sin 2x + 0.01(\pi - x)^4 x^5,$$

$$f(x) = -0.5 \sin 3x + 0.02(\pi - x)^4 x^4.$$

Итерации останавливались при условии $\|k_{n+1} - k_n\|_{C[0,1]} \leq 0.001$, $\|g_{n+1} - g_n\|_{C[0,1]} \leq 0.001$.



На рисунках 1 и 2 изображены начальные приближения и некоторые промежуточные итерации, полученные при решении обратной задачи 1 методом (23),(24) в случае "точных решений"(test) $k(t) = 1 + t$, $g(t) = 4 - 2t$. Итерационный процесс остановился после 46 итераций, в результате которых были определены функции $k_{46}(t)$, $g_{46}(t)$, на рисунках совпадающие с "точными решениями".

На рисунках 3 и 4 изображены начальные приближения и некоторые промежуточные итерации, полученные при решении обратной задачи 2 методом (41) в случае "точных решений"(test) $k(t) = 1 + t$, $g(t) = 4 - 2t$. Итерационный процесс остановился после 20 итераций, в результате которых были вычислены функции $k_{20}(t)$, $g_{20}(t)$, на рисунках совпадающие с "точными решениями".

На рисунках 5 и 6 изображены начальные приближения и некоторые промежуточные итерации, полученные при решении обратной

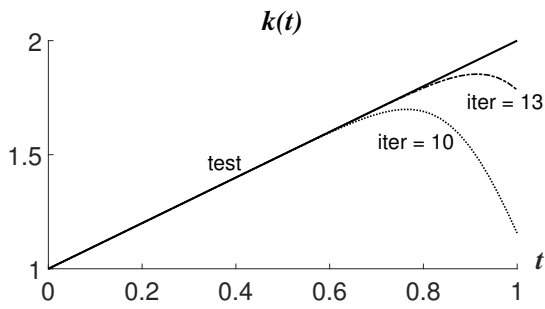


Рис. 3

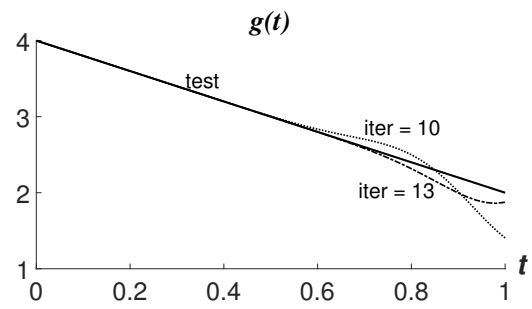


Рис. 4

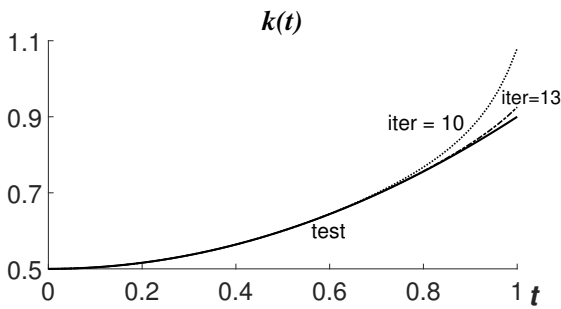


Рис. 5

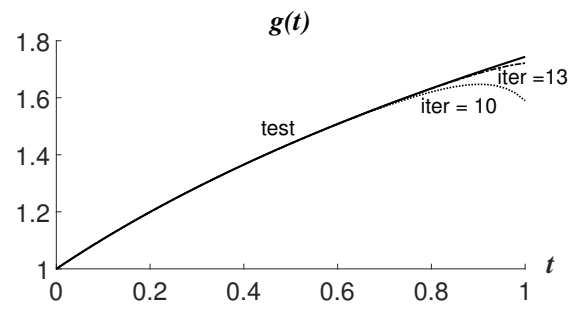


Рис. 6

задачи 1 методом (23),(24) в случае "точных решений"(test) $k(t) = 0.5 + 0.4t^2$, $g(t) = \ln(e + 3t)$. Итерационный процесс остановился после 14 итераций, в результате которых были найдены функции $k_{14}(t)$, $g_{14}(t)$, на рисунках совпадающие с "точными решениями".

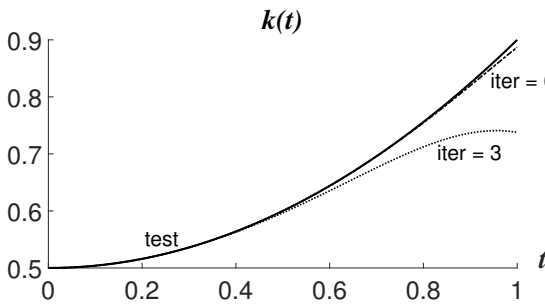


Рис. 7

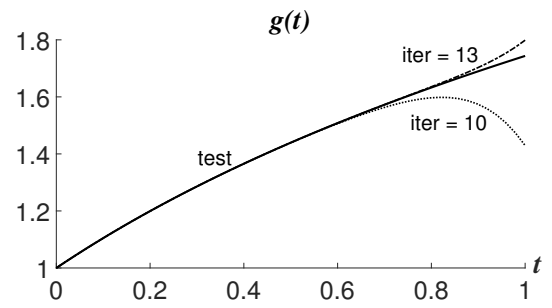


Рис. 8

На рисунках 7 и 8 изображены начальные приближения и некоторые промежуточные итерации, полученные при решении обратной задачи 2 методом (41) в случае "точных решений"(test) $k(t) = 0.5 + 0.4t^2$, $g(t) = \ln(e + 3t)$. Итерационный процесс остановился после 18 итераций, в результате которых были вычислены функции $k_{18}(t)$, $g_{18}(t)$, на рисунках совпадающие с "точными решениями".

На основе приведенных вычислительных результатов и ряда других экспериментов можно сделать вывод о том, что несмотря на то, что сходимость итерационных процессов была доказана "в малом на

практике они сходятся на достаточно больших интервалах времени. Следует также отметить, что, как правило, скорость сходимости итераций $k_n(t)$ выше, чем скорость сходимости итераций $g_n(t)$.

Литература

1. Тихонов А.Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Доклады АН СССР. 1935. Т.1. № 5. С. 294-300.
2. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения. Москва, Мир. 1970.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск, Наука. Сибирское отделение. 1980.
4. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск. Наука, 1969.
5. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. Москва. Наука. 1984.
6. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. Москва. Машиностроение. 1988.
7. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. Москва. МГУ. 1994.
8. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.V. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. Marcel Dekker. New York. 2000.
9. Isakov V. Inverse problems for partial differential equations. Springer. New York. 2006
10. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Сибирское научное издательство. Новосибирск. 2008.
11. Самарский А.А., Вабищевич П.Н.. Численные методы решения обратных задач математической физики. М., Издательство ЛКИ. 2009.
12. Музылев Н.В. О единственности одновременного определения коэффициентов теплопроводности и объемной теплоемкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1983. Т.23. № 1. С.102-108.
13. Клибанов М.В. Об одном классе обратных задач для нелинейных параболических уравнений // Доклады АН СССР. 1985. Т.280. № 3. С. 533-536.
14. Иванчов Н.И., Пабыривска Н.В. Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении // Сибирский математический журнал. 2002. Т.43. № 2. С.406-413.

15. *Fatullayev A.C., Gasilov N., Yusubov I.* Simultaneous determination of unknown coefficients in a parabolic equation // *Applicable Analysis*. 2008. V.87. N 10. pp.1167-1177.
16. *Hussein M.S., Lesnic D., Ivanchov M.I.* Simultaneous determination of time-dependent coefficients in the heat equation // *Computer and Mathematics with Applications*. 2014.V.67. N 5. pp.1065-1091.
17. *Su L.D., Vabishechevish P.N., Vasil'ev V.I.* The inverse problem of simultaneous determination of right-hand side and the lowest coefficients in parabolic equations// in book *Numerical Analysis and Its Applications* (ed. Dimov I.,Farago I.,Vulkov I.) Springer 2017. pp. 633-639.
18. *Камынин В.Л.* Об обратной задаче одновременного определения двух зависящих от времени младших коэффициентов в недивергентном параболическом уравнении на плоскости // *Математические заметки*. 2020. Т.107. № 1. С.74-86.
19. *Denisov A.M., Solov'eva S.I.* Determining the intensity variation of the heat sources in the heat equation // *Computational Mathematics and Modeling*. 2022. V.33. N 1. pp. 1-8.
20. *Денисов А.М.* Итерационный метод решения задачи определения коэффициента и источника в уравнении теплопроводности // *Дифференциальные уравнения*. 2022. Т.58. № 6. С.756-762.
21. *Бимуратов С.Ш., Кабанихин С.И.* Решение одномерной обратной задачи электродинамики методом Ньютона-Канторовича // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1992. Т.32. № 12. С.1900-1915.
22. *Monch L.* A Newton method for solving inverse scattering problem for a sound-hard obstacle // *Inverse problems*. 1996. V.12. N 3.P. 309-324.
23. *Kabanikhin S.I., Scherzer O., Shichlenin M.A.* Iteration method for solving a two-dimensional inverse problem for hyperbolic equation // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2003. V.11. N.1 P.1-23.
24. *Yan-Bo Ma.* Newton method for estimation of the Robin coefficient// *J.Nonlinear Sci.Appl.* 2015. V.8. N 5. P. 660-669.
25. *Денисов А.М.* Итерационный метод решения обратной коэффициентной задачи для гиперболического уравнения // *Дифференциальные уравнения*. 2017. Т.53. № 7. С.943-949.
26. *Баев А.В., Гаврилов С.В.* Итерационный метод решения обратной задачи рассеяния для системы уравнений акустики в слоисто-неоднородной среде с поглощением // *Вестник МГУ серия 15, Вычислительная математика и кибернетика*. 2018. № 2. С.7-14.

27. *Гаврилов С.В., Денисов А.М.* Численные методы решения нелинейного операторного уравнения, возникающего в обратной коэффициентной задаче. // Дифференциальные уравнения. 2021. Т.57. № 7. С.900-906.