Кафедра ОМ

**Спецкурс для студентов 2-5 года и аспирантов:**

**Вопросы спектральной теории дифференциальных операторов**

**Лекторы: И.В. Садовничая, В.Н. Денисов**

**Годовой, начало в осеннем семестре1 лекция в неделю**

**Аннотация**

Спектральная теория линейных операторов является важным разделом современной математики, интерес к которой стимулируется актуальными задачами механики и физики. Особое место в этой теории занимает спектральный анализ дифференциальных операторов, т.е. изучение их собственных значений, собственных функций, разложение в ряд по собственным функциям в различных пространствах.

В первой части спецкурса изучается спектральная теория для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля на отрезке и на полупрямой и системы Дирака.

Во второй части спецкурса изучается спектральная теория для оператора Шредингера в многомерном случае. Устанавливаются вариационный принцип Куранта, расширение оператора по Фридрихсу, доказывается теорема о разложении в классах Соболева-Лиувилля.

**Программа курса**

1. Вариационный принцип. Теорема Куранта.
2. Спектр самосопряженных операторов.
3. Расширения по Фридрихсу. Теорема фон Неймана.
4. Самосопряженность оператора Шредингера.
5. Теорема о среднем значении для собственных функций оператора Лапласа.
6. Пространство функций Лиувилля-Соболева.
7. Оценка «пачки» собственных функций оператора Лапласа.
8. Спектральная функция оператора Лапласа и ее оценки.
9. Ядра дробного порядка и оценки их спектральных разложений.
10. Теорема о равномерной сходимости спектральных разложений функций из класса Лиувилля-Соболева. Принцип локализации.

**Спецкурс для студентов 2-5 года и аспирантов:**

**Введение в асимптотические методы. Асимптотика интегралов и решений обыкновенных дифференциальных уравнений**

**Лектор: д.ф.-м.н. В.Н. Денисов**

**Полугодовой, осенний семестр 1 лекция в неделю**

**Аннотация**

Будут изучены основные асимптотические методы: метод Лапласа, метод стационарной фазы и метод перевала. Будут даны приложения по асимптотике специальных функций и методу Грина-Лиувилля (ВКБ), имеющего большое значение в задачах квантовой механики и математической физики, в задачах астрофизики.

**Программа курса**

1. **Введение.** Асимптотические разложения. Простейшие асимптотические оценки, степенные асимптотические ряды. Интегралы со слабой особенностью. Корни уравнений.
2. **Глава 1.** Метод Лапласа.

Интегралы Лапласа (одномерный случай).

Модификации метода Лапласа.

Метод Лапласа для кратных интегралов.

1. **Глава 2.** Метод стационарной фазы.

Метод стационарной фазы в одномерном случае. Метод стационарной фазы в многомерном случае. Вклад от внутренней невырожденной стационарной точки.

Метод стационарной фазы. Вклад от граничных стационарных точек.

Особенность интегралов от быстро осциллирующих функций. Асимптотика преобразования Бесселя и Фурье.

1. **Глава 3.** Метод перевала (одномерный случай).

Метод перевала для интегралов Лапласа. Функции Эйри. Функции Бесселя. Полиномы Лежандра.

1. **Глава4.** Метод перевала (многомерный случай).

Основы метода перевала. Точки перевала полиномов и алгебраических функций.

1. **Глава 5.** Дифференциальные уравнения с большим параметром.

Асимптотика Грина-Лиувилля (ВКБ) для решений ОДУ. Осциллирующие и неосциллирующие решения ОДУ. Критерий Кнезера. Асимптотика ОДУ в классе регулярных по Карамата функций. Уравнения Томаса Ферми и Емдена Фаулера и асимптотика их решений.

**Литература**

1. Э. Копсон. Асимптотические разложения. Москва: Мир, 1966.
2. М.В. Федорюк. Асимптотика. Интегралы и ряды. Москва: Наука, 1987.
3. Ф. Олвер. Введение в асимптотические методы и специальные функции. Москва: Наука, 1978.
4. Э.Я. Риекстыньш. Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 1974.
5. А. Эрдеи. Асимптотические разложения. Москва: ГИФМЛ, 1962.

**Спецкурс для студентов 2-5 года и аспирантов:**

**Классические методы суммирования расходящихся интегралов и тауберовы теоремы. Изучение стабилизации решений нестационарных задач математической физики**

**Лектор: д.ф.-м.н. В.Н. Денисов**

**Полугодовой, осенний семестр 1 лекция в неделю**

**Аннотация**

Будут изучены классические методы суммирования расходящихся интегралов, которые находят эффективное применение для анализа задач о распространении тепла и задач о распространении волн при больших значениях времени .

**Программа курса**

1. Введение. Формула Остроградского-Гаусса, формула Грина для гладких функций, имеющих степенную особенность.

Фундаментальное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. Формула Грина для решения уравнения теплопроводности.

Задача Коши для сферических средних от начальной функции. Уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу для шаровых средних Чезаро-Рисса от начальной функции.

1. **Глава 1.** Линейные методы суммирования расходящихся интегралов, регулярность.

Методы шаровых средних Чезаро-Рисса положительного порядка и метод Абеля-Пуассона, их взаимосвязь.

1. **Глава 2.** Достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в различных классах начальных функций: ограниченных, степенных, из класса А.Н. Тихонова.

Теорема абелева типа для расходящихся интегралов.

Невозможность обращения абелевых теорем в случае неограниченных начальных функций. Примеры.

1. **Глава 3.** Простейшие тауберовы теоремы: теоремы Харди Литльвуда, тауберова теорема Н. Винера.

Односторонние тауберовы теоремы Дрожжинова-Завьялова и их применение.

О необходимых условиях стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности, не эквивалентных прямым абелевым теоремам.

1. **Глава 4.** О стабилизации средних Рисса положительного порядка по времени  для решения задачи Коши для волнового уравнения. Формула Кирхгофа и ее применения.

Принцип Гюйгенса. Уравнения, для которых справедлив принцип Гюйгенса.

Необходимые и достаточные условия стабилизации средних Рисса по времени от решения задачи Коши для волнового уравнения. Неоднородное уравнение, принцип Дюамеля.

**Литература**

1. Г. Харди. Расходящиеся ряды. Москва: Факториал Пресс, 2006.
2. D.V. Widder. An introduction to transform theory. Pure and Applied Mathematics, vol.42, 1971.
3. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики. Том 1, 2.

Москва: ГИТТЛ, 1951.

1. С.Л. Соболев. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1966.
2. О.А. Олейник. Лекции об уравнениях с частными производными. Москва: Бином, 2005.