

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

УТВЕРЖДАЮ



Декан факультета ВМК МГУ
имени М.В. Ломоносова

_____ академик Е.И. Моисеев

« » _____ 2015 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
«Спектральная теория дифференциальных операторов»

Уровень высшего образования – подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре

Направление подготовки – 01.06.01 «Математика и механика»

Направленность (профиль) – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» (01.01.02)

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

1. НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Спектральная теория дифференциальных операторов

2. УРОВЕНЬ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре

3. НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ, НАПРАВЛЕННОСТЬ (ПРОФИЛЬ) ПОДГОТОВКИ

Направление подготовки – 01.06.01 «Математика и механика»

Направленность (профиль) – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» (01.01.02)

4. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина относится к специальным дисциплинам вариативной части образовательной программы и является дисциплиной по выбору, рекомендуемой к изучению в 1-м семестре обучения.

5. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина участвует в формировании следующих компетенций образовательной программы:

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения
ПК-1: владение современными методами построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также методами разработки и реализации алгоритмов их решения на основе фундаментальных знаний в области математики и информатики	ЗНАТЬ: классические методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также базовые методы разработки и реализации алгоритмов их решения; УМЕТЬ: применять классические методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также базовые методы разработки и реализации алгоритмов их решения; ВЛАДЕТЬ: базовыми навыками выбора методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также методов разработки и реализации алгоритмов их решения.

<p>ОПК-1: способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий</p>	<p>ЗНАТЬ: основные методы математического анализа классических задач в области естественных наук;</p> <p>УМЕТЬ: применять классические методы построения математических моделей, а также стандартные аналитические и численные методы их анализа;</p> <p>ВЛАДЕТЬ: базовыми навыками определения границ применимости математических моделей и интерпретации результатов их анализа.</p>
---	---

Оценочные средства для промежуточной аттестации приведены в Приложении.

6. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часов, из которых 42 часа составляет контактная работа студента с преподавателем (36 часа занятия лекционного типа, 0 часов занятия семинарского типа (семинары, научно-практические занятия, лабораторные работы и т.п.), 0 часов групповые консультации, 0 часов индивидуальные консультации, 4 часа мероприятия текущего контроля успеваемости, 2 часа мероприятия итоговой аттестации), 66 часов составляет самостоятельная работа аспиранта.

7. ВХОДНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Учащиеся должны владеть знаниями по курсам обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики и функционального анализа в объеме, соответствующем основным образовательным программам бакалавриата и магистратуры по укрупненным группам направлений и специальности 01.00.00 «Математика и механика».

8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Электронное обучение и дистанционные технологии не применяются. Процесс изложения учебного материала может сопровождаться презентациями с использованием мультимедийного проектора.

9. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Спецкурс посвящен исследованию спектральных свойств операторов Штурма-Лиувилля на конечных и бесконечных интервалах, а также оператора Лапласа в ограниченной области. Кроме того, изучаются различные функциональные пространства и вопросы спектральной теории для абстрактных самосопряженных операторов.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы					Самостоятельная работа учащегося, часы			
		из них					из них			
Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости: коллоквиумы, практические контрольные занятия и др.	Всего	Выполнение домашних заданий	Подготовка рефератов и т.п..	Всего		
Тема 1. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля на отрезке Общее определение оператора Штурма-Лиувилля, различные его виды. Краевые условия. Сопряженный оператор. Собственные значения и собственные функции. Теория Штурма. Теоремы о разложении по системе собственных и присоединенных функ-	26	10	-	-	-	-	10	-	16	16

ций										
Тема 2. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля на всей оси. Уравнение Штурма-Лиувилля на всей прямой. Несамосопряженный случай. Условия полноты системы собственных и присоединенных функций оператора.	26	8	-	-	-	2	10	-	16	16
Тема 3. Общие вопросы спектральной теории. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Самосопряженность оператора Шредингера.	18	6	-	-	-	-	6	-	12	12
Тема 4. Обобщенные производные и их свойства. Теорема Реллиха. Энергетические пространства. Задачи о минимуме квадратичного функционала.	18	6	-	-	-	-	6	-	12	12
Тема 5. Спектральная теория для оператора										

Лапласа. Формула среднего значения. Оценка «пачки» собственных функций оператора Лапласа. Метод В.А.Ильина. Исследования спектральных разложений оператора Лапласа.	18	6	-	-	-	2	8	-	10	10
Итоговая аттестация: Экзамен	2	-	-	-	-	-	2	-	-	-
Итого	108	36	-			4	42		66	66

10.УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к экзамену и промежуточной аттестации.

11.РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Основная учебно-методическая литература

1. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака, Москва: Мир, 1988.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы, Москва: Наука, 1969.
3. М.Рид. Б.Саймон. Методы математической физики. Москва, Мир, том 2, 1978.
4. В.А.Ильин. Спектральная теория дифференциальных операторов. Москва, Наука, 1991.

Дополнительная учебно-методическая литература

1. Лидский В.Б. Несамосопряженный оператор типа Штурма-Лиувилля с дискретным спектром // Труды ММО, т.9, №45, стр. 45-79, 1960.
2. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: Университетский курс. РХД, 2009. - 724 стр.

3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, Москва: Наука, 1988. – 512 стр.
4. Савчук А.М., Шкаликов А.А. Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами - распределениями, Труды ММО, Т. 64, 2003, с. 159-219.
5. Садовнича И.В. О равносходимости разложений в ряды по собственным функциям операторов Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями, Мат. сборник, Т. 201, № 9, 2010, стр. 61-76.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. т. 5, Москва, 1959г.
7. У.Егоров, V.Kondratiev. On spectral theory of elliptic operator. Basel. Boston. Berlin.Birkhauser. 1996.
8. С.Л.Соболев Некоторые применения функционального анализа в математической физике., Москва, Наука, 1988.
9. С.М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва, Наука, 1969.
10. Г.Н.,Ватсон. Теория бесселевых функций, том. 1, Москва, ИЛ, 1949.

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. www.arxiv.org
2. www.mathnet.ru

Информационные технологии

1. Программное обеспечение для подготовки слайдов лекций MS PowerPoint
2. Программное обеспечение для создания и просмотра pdf-документов Adobe Reader
3. Издательская система LaTeX.

12. ЯЗЫК ПРЕПОДАВАНИЯ

Русский

13. РАЗРАБОТЧИК ПРОГРАММЫ

Разработчики – д.ф.-м.н., профессор Денисов Василий Николаевич; д.ф.-м.н., профессор Садовнича Инна Викторовна.

**ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«Спектральная теория дифференциальных операторов»**

Средства для оценивания планируемых результатов обучения, критерии и показатели оценивания приведены ниже.

РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю)	КРИТЕРИИ и ПОКАЗАТЕЛИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ по дисциплине из соответствующих Карт компетенций					ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
	1	2	3	4	5	
	<i>Неудовлетворительно</i>	<i>Неудовлетворительно</i>	<i>Удовлетворительно</i>	<i>Хорошо</i>	<i>Отлично</i>	
<i>Знать</i> основные понятия, возникающие в спектральной теории дифференциальных операторов Код 31 (ПК-1)	отсутствие знаний	фрагментарные представления об основных понятиях спектральной теории	сформированные представления об основных понятиях спектральной теории	сформированные представления об основных понятиях спектральной теории дифференциальных операторов, знание различных примеров	Систематизированные знания об основных понятиях спектральной теории дифференциальных операторов и глубокое понимание их свойств	Устный опрос
<i>Знать</i> основные принципы исследования спектральных свойств операторов Код 31 (ПК-1)	отсутствие знаний	фрагментарные представления об основных принципах исследования спектральных свойств операторов	сформированные представления об основных принципах исследования спектральных свойств операторов	сформированные представления об основных принципах исследования спектральных свойств операторов, с примерами	Системные знания об основных принципах исследования спектральных свойств операторов, понимание их взаимосвязи с другими областями анализа	Устный экзамен

<i>Уметь</i> устанавливать факты полноты и базисности систем и наличия сходимости, опираясь на теоретические знания Код У1 (ОПК-1)	отсутствие умений	фрагментарные представления о методах исследования вопросов полноты, базисности и сходимости	умение выяснить асимптотическое поведение систем корневых функций операторов	умение изучать вопросы сходимости, опираясь на асимптотическое поведение функций системы	умение устанавливать факты полноты и базисности системы функций, опираясь на ее свойства и основные принципы спектральной теории	Устный опрос
<i>Уметь</i> применять методы исследования спектральных свойств к конкретным дифференциальным операторам Код У1 (ОПК-1)	отсутствие умений	фрагментарные представления о методах исследования спектральных свойств	умение описать основные свойства некоторых конкретных операторов	умение исследовать поведение собственных значений и собственных функций конкретных дифференциальных операторов	Умение полностью исследовать спектральные свойства конкретных дифференциальных операторов	Устный экзамен

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

Вопросы к экзамену.

1. Оператор Штурма-Лиувилля. Его виды и основные свойства. Примеры.
2. Функция Грина. Асимптотика собственных значений и собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с регулярными краевыми условиями.
3. Нули собственных функций оператора Штурма-Лиувилля. Теория Штурма.
4. Периодические краевые задачи для операторов Штурма-Лиувилля.
5. Разложения по системе собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с разделенными краевыми условиями.
6. Уравнение Штурма-Лиувилля на всей прямой. Несамосопряженный случай.
7. Круг и точка Вейля в случае всей прямой.
8. Определение дифференциального оператора.
9. Условия единственности решения, квадратично суммируемого на всей оси.
10. Условия полной непрерывности резольвенты оператора.

11. Критерий полной непрерывности резольвенты.
12. Условия полноты системы собственных и присоединенных функций оператора.
13. Вариационный принцип. Теорема Куранта.
14. Спектр самосопряженных операторов.
15. Расширения по Фридрихсу. Теорема фон Неймана.
16. Самосопряженность оператора Шреденгера.
17. Пространства С.Л.Соболева. Теорема вложения Реллиха.
18. Энергетические пространства.
19. Задача о минимуме квадратичного функционала.
20. Теорема о среднем значении для собственных функций оператора Лапласа.
21. Оценка «пачки» собственных функций оператора Лапласа.
22. Спектральная функция оператора Лапласа и ее оценки.
23. Ядра дробного порядка и оценки их спектральных разложений.
24. Теорема о равномерной сходимости спектральных разложений функций из класса Лиувилля-Соболева. Принцип локализации.

Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения

Особенности организации процесса обучения

Для эффективного освоения курса рекомендуется перед каждым занятием привести в порядок конспекты лекций. После каждого занятия рекомендуется найти и прочитать дополнительную литературу по теме лекции и прочитать свои конспекты.

Система контроля и оценивания

По итогам каждого устного опроса выставляются баллы (максимум 10 баллов за каждый вид работы). Пусть M – максимальное число баллов, которое может набрать студент. В конце семестра баллы конвертируются в оценку O_1 следующим образом:

меньше $M/2$ баллов – $O_1=2$;

больше или равно $M/2$ баллов, но меньше $2M/3$ – $O_1=3$;

больше или равно $2M/3$ баллов, но меньше $5M/6$ – $O_1=4$;

больше или равно $5M/6$ баллов – $O_1=5$.

На экзамене оценка O_1 является стартовой. Окончательная оценка определяется исходя из оценки устного ответа студента, при этом она не может быть меньше предварительной оценки и не может быть больше её более чем на 1 балл.

Структура и график контрольных мероприятий

Устные опросы на 7-й и 14-й неделях; устный экзамен в конце семестра.