МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

«Утверждаю»

Декан факультета ВМК МГУ
имени М.В. Ломоносова

академик _____ Е.И. Моисеев

«___» _____ 2018 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

«Стохастическое исчисление»

Уровень высшего образования – подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре

Направление подготовки – 01.06.01 «Математика и механика»

Направленность (профиль) – «Теория вероятностей и математическая статистика» (01.01.05)

2018 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

1. НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Стохастическое исчисление

2. УРОВЕНЬ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре.

3. НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ, НАПРАВЛЕННОСТЬ (ПРОФИЛЬ) ПОДГОТОВКИ

Направление 01.06.01 «Математика и механика». Направленность (профиль) «Теория вероятностей и математическая статистика» (01.01.05).

4. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина относится к дисциплинам вариативной части образовательной программы.

5. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина участвует в формировании следующих компетенций образовательной программы:

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения
Владение современными методами построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также методами разработки и реализации алгоритмов их решения на основе фундаментальных знаний в области математики и информатики (ПК-1)	З1 (ПК-1) Знать: современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения У1 (ПК-1) Уметь: применять современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения В1 (ПК-1) Владеть: навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественно-

	научных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения
Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях (УК-1)	У2 (УК-1)УМЕТЬ: при решении исследовательских и практических задач генерировать новые идеи, поддающиеся операционализации исходя из наличных ресурсов и ограничений В2 (УК-1)ВЛАДЕТЬ: навыками критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях
Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1)	З1(ОПК-1) ЗНАТЬ: современные методы исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области У1(ОПК-1) УМЕТЬ: уметь самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий
Способность планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития (УК-5(6))	З1(УК-5(6)) ЗНАТЬ: содержание процесса целеполагания профессионального и личностного развития, его особенности и способы реализации при решении профессиональных задач, исходя из этапов карьерного роста и требований рынка труда. У1(УК-5(6)) УМЕТЬ: формулировать цели личностного и профессионального развития и условия их достижения, исходя из тенденций развития области профессиональной деятельности, этапов профессионального роста, индивидуально-личностных особенностей.

Оценочные средства для промежуточной аттестации приведены в Приложении.

6. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часов.

38 часов составляет контактная работа с преподавателем – 30 часа занятий лекционного типа, 0 часов занятий семинарского типа (семинары, научно-практические занятия, лабораторные работы и т.п.), 0 часов индивидуальных консультаций, 3 часа мероприятий текущего контроля успеваемости, 1 часа групповых консультаций, 4 часа мероприятий промежуточной аттестации.

70 часов составляет самостоятельная работа аспиранта.

7. ВХОДНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Учащиеся должны владеть знаниями по теории интегрирования по стохастическому заряду (случайной знакопеременной мере) и по локальному мартингалу, уметь применять их к случайным процессам и к прикладным задачам в объеме, соответствующем основным образовательным программам бакалавриата и магистратуры по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика».

8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В процессе обучения используется программное обеспечение Wolfram Mathematica (пакет Mathematica) для вычислений при решении учебных задач.

9. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

В курсе рассматриваются специальный математический аппарат, известный под названием стохастического интегрирования по случайным знакопеременным мерам и интегрирования по локальному мартингалу. Исследуются свойства стохастических интегралов, а также их применение к различным классам случайны процессов. Изучаются классы случайных процессов, которые выступают в качестве объектов интегрирования. Приводятся примеры применения стохастического интегрирования к стационарным случайным процессам. На основе стохастического интегрирования по локальному мартингалу дается понятие стохастического дифференциального уравнения. Рассматриваются связи с классической теорией дифференциальных уравнений.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**	**Всего (часы)**	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них						**Самостоятельная работа обучающегося, часы** из них		
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, практические контрольные занятия и др)*	**Всего**	Выполнение домашних заданий	Подготовка рефератов и т.п..	**Всего**
Тема 1. Процессы второго порядка Основные понятия и термины. Корреляционаая функция процесса второго порядка, ее свойства. Дифференциальное исчисление второго порядка. Стохастическое интегрирование второго порядка. Характеризация операций дифференцирования и интегрирования второго порядка в терминах корреляционных функций.	18	6	-	-	-		6	6	6	12
Тема 2. Стохастические заряды	18	6	-	-	-	-	6	6	6	12

Понятие стохастического заряда (знакопеременной случайной меры), основные свойства, аналогия с классическим понятием знакопеременной меры. Построение стохастического интеграла по стохастическому заряду. Основные свойства стохастического интеграла. Связь с интегрирование по Стилтьесу.										
Тема 3. Стационарные процессы второго порядка Понятие и основные свойства стационарных случайных процессов второго порядка. Свойства корреляционных функций стационарных процессов второго порядка. Представление случайных процессов в виде стохастического интеграла по стохастическому заряду. Связь с классическим гармоническим анализом. Эргодические теоремы для стационарных последовательностей второго порядка. Теорема Шенона о стационарных последовательностях второго порядка. Разложение Вольда.	22	7	-	-	-	1	8	7	7	14
Тема 4. Локальные мартингалы	22	5	-	-	-	1	6	6	10	16

Понятие и основные свойства локального мартингала. Операции над локальными мартингалами, приводящие к новым локальным мартингалам. Квадратическая вариация локальных мартингалов и ее свойства. Локальные субмартингалы. Представление локального субмартингала в виде суммы локального мартингала и возрастающего случайного процесса. Класс предсказуемых случайных процессов, его роль в теории стохастического интеграла по локальному мартингалу.										
Тема 5. Стохастический интеграл Конструкция стохастического интеграла по локальному мартингалу. Классы случайных процессов, интегрируемых по локальному мартингалу. Роль предсказуемых случайных процессов. Формула Ито и ее частные случаи. Применение формулы Ито к характеризации процесса броуновского процесса и процесса Пуассона в классе локальных мартингалов, Понятие стохастического дифференциального уравнения. Решение	24	6	-	1	-	1	8	7	9	16

уравнения диффузии методами теории стохастических дифференциальных уравнений. Примеры решений стохастических дифференциальных уравнений. Теорема Ито о существовании стохастического дифференциального уравнения.										
6. Промежуточная аттестация – устный экзамен	4	4						0		
Итого	108	38						70		

10. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации.

11. РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Основная литература

1. **В. М. Круглов. Случайные процессы. Часть 2. Основы стохастического анализа. Москва. Юрайт. 2016.**
2. **Дж. Л. Дуб. Вероятностные процессы. Москва, Иностранная Литература. 1953.**

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. http://elibrary.ru
2. www.scopus.com

Информационные технологии, используемые в процессе обучения

1. Программное обеспечение пакета Mathematica (Wolfram Mathematica)
2. Издательская система LaTeX.

Активные и интерактивные формы проведения занятия

№ п\п	Тип занятия или внеаудиторной работы	Вид и тематика (название) интерактивного занятия
1	Лекция 5	Тренировочная лекция, прочитанная аспирантом на тему «Процессы второго порядка
2	Лекция 16	Тренировочная лекция, прочитанная аспирантом на тему «Стохастический интеграл по локальному мартингалу»

Материально-техническая база

Для преподавания дисциплины требуется класс, оборудованный маркерной или меловой доской и проектором.

12. ЯЗЫК ПРЕПОДАВАНИЯ

Русский

13. РАЗРАБОТЧИК ПРОГРАММЫ, ПРЕПОДАВАТЕЛИ

профессор, д.ф.-м.н. Круглов Виктор Макарович

Приложение

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«Стохастическое исчисление»

Средства для оценивания планируемых результатов обучения, критерии и показатели оценивания приведены ниже.

РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю)	**КРИТЕРИИ и ПОКАЗАТЕЛИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю)** *(критерии и показатели берутся из соответствующих карт компетенций, при этом пользуются либо традиционной системой оценивания, либо БРС)*					**ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА**
	1	2	3	4	5	
	Неудовлетворительно	**Неудовлетворительно**	**Удовлетворительно**	**Хорошо**	**Отлично**	
ЗНАТЬ: современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения З1 (ПК-1)	Отсутствие знаний	Фрагментарные представления о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	В целом сформированные, но неполные знания о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	Сформированные систематические знания о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	Устный экзамен
УМЕТЬ: применять современные методы построения и анализа мате-	Отсутствие умений	Фрагментарные умения применять современные методы построения и анализа	В целом успешное, но не систематическое умение применять	Успешное, но содержащее отдельные пробелы умение	Сформированное умение применять современные методы построения и анализа	Устный экзамен

матических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения У1 (ПК-1)		математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения	современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения	применять современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения	математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения	
ВЛАДЕТЬ: навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения В1 (ПК-1)	Отсутствие навыков	Фрагментарное владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения	В целом успешное, но не полное владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения	Успешное, но содержащее отдельные пробелы владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения	Сформированное владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения	Устный экзамен
УМЕТЬ критически анализировать и оценивать современные науч-	Отсутствие умений	Фрагментарные умения критически анализировать и оценивать современные научные	В целом успешное, но не систематическое умение критически анализиро-	Успешное, но содержащее отдельные пробелы умение критически	Сформированное умение критически анализировать и оценивать современные научные	Реферат

ные достижений, генерировать новые идеи при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных областях У1(УК-1)		достижений, генерировать новые идеи при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных областях	вать и оценивать современные научные достижений, генерировать новые идеи при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных областях	анализировать и оценивать современные научные достижений, генерировать новые идеи при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных областях	достижений, генерировать новые идеи при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных областях	
ВЛАДЕТЬ: навыками анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях Код В1 (УК-1)	Отсутствие навыков	Фрагментарное применение навыков анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач	В целом успешное, но не систематическое применение навыков анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение навыков анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач	Успешное и систематическое применение навыков анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях	доклад на научном семинаре
УМЕТЬ: самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных	Отсутствие умений	Частично освоенное умение самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-	В целом успешное, но не систематическое умение самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных	Успешное и систематическое умение самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и	реферат

технологий У1 (ОПК-1)		коммуникационных технологий	исследования и информационно-коммуникационных технологий	методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	информационно-коммуникационных технологий	
ЗНАТЬ: современные методы исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области З1(ОПК-1)	Отсутствие знаний	Фрагментарные представления современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	В целом сформированные, но неполные знания о современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания о современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	Сформированные систематические знания о современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	реферат
ЗНАТЬ: содержание процесса целеполагания профессионального и личностного развития, его особенности и способы реализации при решении профессиональных задач, исходя из этапов карьерного роста и требований рынка труда. З1(УК-5(6))	Не имеет базовых знаний о сущности процесса целеполагания, его особенностях и способах реализации.	Допускает существенные ошибки при раскрытии содержания процесса целеполагания, его особенностей и способов реализации.	Демонстрирует частичные знания содержания процесса целеполагания, некоторых особенностей профессионального развития и самореализации личности, указывает способы реализации, но не может обосновать возможность их использования в конкретных ситуациях.	Демонстрирует знания сущности процесса целеполагания, отдельных особенностей процесса и способов его реализации, характеристик профессионального развития личности, но не выделяет критерии выбора способов целереализации при решении профессиональных задач.	Раскрывает полное содержание процесса целеполагания, всех его особенностей, аргументированно обосновывает критерии выбора способов профессиональной и личностной целереализации при решении профессиональных задач.	Отчеты, доклады на научных семинарах
УМЕТЬ:	Не умеет и не готов	Имея базовые пред-	При формулиров-	Формулирует це-	Готов и умеет фор-	Отчеты, доклады

формулировать цели личностного и профессионального развития и условия их достижения, исходя из тенденций развития области профессиональной деятельности, этапов профессионального роста, индивидуально-личностных особенностей. У1(УК-5(6))	формулировать цели личностного и профессионального развития и условия их достижения, исходя из тенденций развития области профессиональной деятельности, этапов профессионального роста, индивидуально-личностных особенностей.	ставления о тенденциях развития профессиональной деятельности и этапах профессионального роста, не способен сформулировать цели профессионального и личностного развития.	ке целей профессионального и личностного развития не учитывает тенденции развития сферы профессиональной деятельности и индивидуально-личностные особенности.	ли личностного и профессионального развития, исходя из тенденций развития сферы профессиональной деятельности и индивидуально-личностных особенностей, но не полностью учитывает возможные этапы профессиональной социализации.	мулировать цели личностного и профессионального развития и условия их достижения, исходя из тенденций развития области профессиональной деятельности, этапов профессионального роста, индивидуально-личностных особенностей.	на научных семинарах

Фонды оценочных средств, необходимые для оценки результатов обучения

Список вопросов для устного экзамена.

1. Свойства корреляционных функций; положительная определенность.
2. Теорема о существовании процесса второго порядка с данной корреляционной функцией.
3. Производная второго порядка случайного процесса. Критерий существования производной второго порядка.
4. Связь между непрерывностью процесса второго порядка и непрерывностью корреляционной функции.
5. Связь между дифференцированием второго порядка случайного процесса и дифференцированием корреляционной функции.
6. Интегрирование процесса второго порядка. Критерий интегрируемости.
7. Свойство линейности интеграла второго порядка. Связь с интегрированием корреляционной функции.
8. Несобственные интегралы второго порядка. Критерий существования несобственного интеграла.
9. Конечно аддитивные стохастические заряды. Центрированные заряды. Примеры.
10. Критерий, когда конечно аддитивный стохастический заряд является стохастическим зарядом.
11. Создание автоматизированных систем в защищенном исполнении.
12. Построение стохастического интеграла по стохастическому заряду. Основные свойства интеграла.
13. Стационарные процессы второго порядка. Основные свойства.
14. Теорема о представлении стационарного процесса в виде стохастического интеграла.
15. Теорема Шенона о стационарных последовательностях второго порядка.

16. Представление стационарной последовательности второго порядка в виде стохастического интеграла.
17. Теорема о скользящем среднем для стационарной последовательности второго порядка.
18. Строго стационарные случайные процессы. Критерий, когда случайный процесс является стационарным.
19. Максимальное неравенство. Теорема Гарсиа.
20. Эргодические теоремы для стационарных последовательностей.
21. Локальные мартингалы. Операции над локальными мартингалами, которые приводят к новым локальным мартингалам.
22. Локальные мартингалы из классов Дуба.
23. Неотрицательные локальные мартингалы. Связь с супермартингалами.
24. Критерий для локального мартингала быть предсказуемым случайным процессом.
25. Локально интегрируемые локальные мартингалы. Условие постоянства локального мартингала.
26. Квадратические вариации локальных мартингалов. Свойства квадратических вариаций.
27. Меры Лебега-Стилтьеса, построенные по квадратическим вариациям локальных мартингалов.
28. Построение стохастического интеграла по локальному мартингалу.
29. Свойства стохастических интегралов. Связь с интегрирование по мере Лебега-Стилтьеса.
30. Остановленные стохастические интегралы. Основные свойства.
31. Повторные стохастические интегралы по локальному мартингалу.
32. Вычисление некоторых стохастических интегралов.
33. Формула Ито и ее разновидности.
34. Характеризация процесса броуновского движения в классе локальных мартингалов.
35. Характеризация пуассоновского процесса в классе локальных мартингалов.
36. Понятие стохастического дифференциального уравнения. Теорема Ито о существовании решения.

Материалы для мероприятий текущего контроля.

Мероприятия текущего контроля реализуются в виде тестов с выбором вариантов ответа. Четыре набора тестов охватывают теоретический материал, относящийся соответственно к темам 1, 3, 4 и 5. Вопросы тестов соответствуют приведенным выше вопросам к устному экзамену, раскрывая их на более подробном уровне.

Примерные темы рефератов.

Реферат посвящен Теме 2. Примеры тем:

1. Методические подходы к оценке эффективности защиты речевой информации.
2. Электромагнитные низкочастотные каналы утечки информации.
3. Маскирование сигналов шумами, коррелированными с сигналами.
4. Задачи контроля каналов утечки информации в реальном масштабе времени.

Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения

Особенности организации процесса обучения

Для эффективного освоения курса рекомендуется перед каждым занятие привести в порядок конспекты лекций. После каждого занятия рекомендуется найти и прочитать дополнительную литературу по теме лекции и прочитать свои конспекты.

Система контроля и оценивания

За каждую контрольную работу и реферат выставляются баллы (максимум 10 баллов за каждый вид работы). Пусть М – максимальное число баллов, которое может набрать студент. В конце семестра баллы конвертируются в оценку О1 следующим образом:

меньше М/2 баллов: О1=2;

больше или равно М/2 баллов, но меньше 2М/3: О1=3;

больше или равно 2М/3 баллов, но меньше 5М/6: О1=4;

больше или равно 5М/6 баллов: О1=5.

На экзамене оценка О1 является стартовой. Окончательная оценка определяется исходя из оценки устного ответа студента, при этом она не может отличаться от стартовой оценки более чем на 1 балл.

Структура и график контрольных мероприятий

Контрольная работа на 3-й, 8-й, 10-й, 14-й неделях, реферат в течение семестра, устный экзамен в конце семестра.