

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ



УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ,

Академик

/И.А. Соколов/

«14» сентября 2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Стохастическое исчисление
Stochastic calculus

Программа (программы) подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

102.01.00.112-фмн-кфап, 102.01.00.122-фмн-кмф, 102.01.00.122-фмн- кски,
102.01.00.235-фмн- кски, 102.01.00.112-фмн-ком, 102.01.00.122-фмн-кани
102.01.00.112-фмн-кса, 102.01.00.122-фмн- кса, 102.01.00.112-фмн- кндсипу,
102.01.00.122-фмн- кндсипу, 102.01.00.114-фмн- кмс, 102.01.00.115-фмн- кммп
102.01.00.115-фмн- кмк, 102.01.00.123-фмн- кмк, 102.01.00.116-фмн- квтм,
102.01.00.122-фмн- квтм, 102.01.00.116-фмн- квм, 102.01.00.122-фмн- квм, 102.01.00.122-фмн- коу,
102.01.00.112-фмн- коу, 102.01.00.123-фмн- кио, 102.01.00.122-фмн- кио, 102.01.00.235-фмн- киит,
102.01.00.235-фмн-касвк, 102.01.00.235-фмн- ксп, 102.01.00.235-фмн- киб,
102.01.00.236-фмн-киб, 102.01.00.235-фмн-кая

Москва 2022

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с Приказом Ректора МГУ №1216 от 24 ноября 2021 года «Об утверждении Требований к основным программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, самостоятельно устанавливаемых Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова»

1. Краткая аннотация:

Название дисциплины Стохастическое исчисление

Цель изучения дисциплины – Данный курс посвящен важным разделам современного стохастического анализа, которые активно используются как в теоретических работах, так и в приложениях. А именно, строится теория мартингалов, как основного инструмента современной теории вероятностей и дается строгое построение процесса Броуновского движения, как наиболее распространенной модели случайного процесса буквально во всех приложениях теории вероятностей. Далее дается построение процессов Леви, лежащих в основе большинства современных исследований по случайным процессам. И наконец закладываются основы общей теории Марковских процессов, и в первую очередь объясняется фундаментальная связь этих процессов с уравнениями в частных производных и псевдодифференциальными уравнениями, берущая основания в фундаментальных работах Эйнштейна по теории диффузии в физических процессах и Башелье в финансовых моделях.

2. Уровень высшего образования – аспирантура

3. Научная специальность 1.1.4 «Теория вероятностей и математическая статистика», область науки: Физико-математические науки.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре Программы аспирантуры **элективный курс.**

5. *Объем дисциплины (модуля) составляет 2 зачетные единицы, всего 108 часов, из которых 28 часа составляет контактная работа студента с преподавателем (24 часов занятия лекционного типа, 4 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 80 часа составляет самостоятельная работа учащегося.*

6. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

На предыдущих уровнях высшего образования должны быть освоены общие курсы:

1. Математический анализ

2. Линейная алгебра

3. Обыкновенные дифференциальные уравнения

4. Теория вероятностей и математическая статистика

7. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы						Самостоятельная работа обучающегося, часы		
		Из них						из них		
Занятия лекционно-го типа	Занятия семинарско-го типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации	Всего	Выполнение домашних заданий	Подготовка к коллоквиумам	Всего		
<p>Тема 1. Мартингалы в дискретном времени</p> <p>Определения мартингалов и моментов остановки. Мартингалное преобразование (дискретный стохастический интеграл). Теорема Дуба о случайном выборе. Максимальные неравенства Дуба. Сходимость супер- и субмартингалов.</p>	16	6	2	-	-	8	8	-	8	

<p>Применения к процессам случайных блужданий. Обобщения на случай непрерывного времени (без доказательств).</p>										
<p>Тема 2. Процесс Броуновского движения</p> <p>Определение и основные свойства БД. Построение БД методами Гильбертова пространства. Кратные Винеровские стохастические интегралы. Винеровский хаос, пространства Фока, производные Малявэна. Стохастический интеграл Ито.</p>	8	4	-	-	-	-	4	4	-	4
<p>Тема 3. Процессы Леви</p> <p>Формула Леви-Хинчина для бесконечно делимых распределений. Процессы</p>	12	6	-	-	-	-	6	6	-	6

8. Образовательные технологии.

При проведении лекционных занятий предусматривается использование информационных технологий, включающих пакеты математических программ: MATLAB, MATHEMATICA и др. Использование информационных технологий осуществляется, в частности, в процессе реализации активных и интерактивных форм проведения занятий. При чтении лекций в качестве материала, иллюстрирующего возможности математического моделирования в различных ситуациях, активно используются примеры из практики обработки данных в процессе исследований в предметной области. Информационные и интерактивные технологии используются при обсуждении проблемных и неоднозначных вопросов, требующих выработки решения в ситуации неопределенности.

9. Учебно-методические материалы для самостоятельной работы по дисциплине (модулю):

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации.

10. Ресурсное обеспечение:

- Перечень основной и вспомогательной учебной литературы ко всему курсу

Основная литература:

1. V.N. Kolokoltsov. Markov Processes, Semigroups and Generators. Studies in Mathematics 38. De Gruyter 2011
2. И. Гихмани А. Скороход. Случайные процессы (в трех томах). М.: Наука, 1978.

Дополнительная литература:

1. А.Н. Ширяев. Вероятность. Москва, Наука 2020 (в трех томах).
2. O. Kallenberg. Foundations of Modern Probability. Springer, 2002.

- Перечень используемых информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса, включая программное обеспечение, информационные справочные системы (при необходимости):

<http://elibrary.ru>

www.scopus.com

- Описание материально-технической базы.
Занятия проводятся в аудитории, оснащенной мультимедийным экраном

11. Язык преподавания – русский

12. Преподаватели:

Степень, должность ФИО., e-mail, тел.: -Д.ф.-м.н., профессор Колокольников Василий Никитич, kolokolsov59@mail.ru, 9037574807

Фонды оценочных средств, необходимые для оценки результатов обучения

Образцы домашних заданий:

1. Найдите явную формулу для резольвенты Броуновского движения.
2. Используя мартингалные методы, определите распределение вероятностей выхода простого случайного блуждания из любого заданного интервала.
3. Используя связь Марковских процессов с дифференциальными уравнениями, вычислите вероятности выхода Броуновского движения из любого заданного интервала слева или справа.
4. Кроме того в качестве домашнего задания подразумевается изучение рекомендуемой литературы.

Примеры вопросов для промежуточной аттестации – зачета (экзамена):

1. Теорема Дуба о случайном выборе.
2. Максимальные неравенства Дуба.
3. Построение Броуновского Движения методами Гильбертова пространства.
4. Формула Леви-Хинчина для бесконечно делимых распределений.
5. Построение процессов Леви. Разложение Леви-Ито.
6. Мартингалы Дынкина
7. Принцип отражения для Броуновского движения.
8. Определение и построение стохастического интеграла Ито.

Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения

Зачет (экзамен) проходит по билетам, включающем 2 вопроса. Уровень знаний аспиранта по каждому вопросу на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». В случае если на все вопросы был дан ответ, оцененный не ниже чем «удовлетворительно», аспирант получает общую оценку «зачтено».