


Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»**  
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета ВМК МГУ,  
Академик И.А. Соколов  
«14» сентября 2022 г.



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

**Стохастическое исчисление**  
**Stochastic calculus**

Программа (программы) подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с Приказом Ректора МГУ №1216 от 24 ноября 2021 года «Об утверждении Требований к основным программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, самостоятельно устанавливаемых Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова»

#### 1. Краткая аннотация:

Данный курс посвящен важным разделам современного стохастического анализа, которые активно используются как в теоретических работах, так и в приложениях. А именно, строится теория мартингалов, как основного инструмента современной теории вероятностей и дается строгое построение процесса Броуновского движения, как наиболее распространенной модели случайного процесса буквально во всех приложениях теории вероятностей. Далее дается построение процессов Леви, лежащих в основе большинства современных исследований по случайным процессам. И наконец закладываются основы общей теории Марковских процессов, и в первую очередь объясняется фундаментальная связь этих процессов с уравнениями в частных производных и псевдодифференциальными уравнениями, берущая основания в фундаментальных работах Эйнштейна по теории диффузии в физических процессах и Башелье в финансовых моделях.

Одна из задач курса заключается в развитии способности к критическому анализу современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях.

#### 2. Уровень высшего образования - подготовка кадров высшей квалификации.

3. Научная специальность в отрасли физико-математических наук - 1.2.1., 1.2.2., 1.2.3., 1.1.2., 1.1.4., 1.1.5., 1.1.6., 2.3.5., 2.3.6., а также в отрасли технических наук - 1.2.2.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре Программы аспирантуры: Обязательные Дисциплины (модули) - Факультетская дисциплина (обязательная дисциплина по выбору).

5. Объем дисциплины (модуля) составляет 2 зачетные единицы, всего 72 часа, из которых 28 часов составляет контактная работа аспиранта с преподавателем, 44 часа составляет самостоятельная работа аспиранта.

6. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

На предыдущих уровнях высшего образования должны быть освоены общие курсы:

#### 1. Математический анализ

2. Линейная алгебра
3. Обыкновенные дифференциальные уравнения
4. Теория вероятностей и математическая статистика

7. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),  форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы						Самостоятельная работа обучающегося, часы		
		из них						из них		
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации	Всего	Выполнение домашних заданий	Подготовка к коллоквиумам	Всего
<b>Тема 1. Мартингалы в дискретном времени</b>  Определения мартингалов и моментов остановки. Мартингальное преобразование (дискретный стохастический интеграл). Теорема Дуба о случайном выборе. Максимальные неравенства Дуба. Сходимость супер- и субмартингалов.	16	6	2	-	-		8	8	-	8

Применения к процессам случайных блужданий. Обобщения на случай непрерывного времени (без доказательств).										
Тема 2. Процесс Броуновского движения  Определение и основные свойства БД. Построение БД методами Гильбертова пространства. Кратные Винеровские стохастические интегралы. Винеровский хаос, пространства Фока, производные Малявэна. Стохастический интеграл Ито.	8	4	-	-	-	-	4	4	-	4
Тема 3. Процессы Леви  Формула Леви-Хинчина для бесконечно делимых распределений. Процессы Леви и Пуассона. Интегралы	12	6	-	-	-	-	6	6	-	6

по процессам Пуассона. Построение процессов Леви. Разложение Леви-Ито. Субординаторы.										
Тема 4. Процессы Маркова и дифференциальные уравнения  Определение и конструкции. Феллеровские процессы, полугруппы, резольвенты и генераторы. Диффузии и процессы прыжкового типа. Применения мартингалов, мартингалы Дынкина. Свойство сильной Марковости. Принцип отражения для Броуновского движения.	16	8		-	-		8	8	-	8
Промежуточная аттестация: экзамен	20	-	-	-	-	-	2	18	-	18
<b>Итого</b>	<b>72</b>	<b>26</b>	<b>2</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>28</b>	<b>44</b>	<b>-</b>	<b>44</b>

#### 8. Образовательные технологии.

При проведении лекционных занятий предусматривается использование информационных технологий, включающих пакеты математических программ: MATLAB, MATHEMATICA и др. Использование информационных технологий осуществляется, в частности, в процессе реализации активных и интерактивных форм проведения занятий. При чтении лекций в качестве материала, иллюстрирующего возможности математического моделирования в различных ситуациях, активно используются примеры из практики обработки данных в процессе исследований в предметной области. Информационные и интерактивные технологии используются при обсуждении проблемных и неоднозначных вопросов, требующих выработки решения в ситуации неопределенности.

#### 9. Учебно-методические материалы для самостоятельной работы по дисциплине (модулю).

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации.

#### 10. Ресурсное обеспечение.

Перечень основной и вспомогательной учебной литературы ко всему курсу

Основная литература:

1. V.N. Kolokoltsov. Markov Processes, Semigroups and Generators. Studies in Mathematics 38. De Gruyter 2011
2. И. Гихмани А. Скороход. Случайные процессы (в трех томах). М.: Наука, 1978.

Дополнительная литература:

1. А.Н. Ширяев. Вероятность. Москва, Наука 2020 (в трех томах).
2. O. Kallenberg. Foundations of Modern Probability. Springer, 2002.

Перечень используемых информационных технологий при осуществлении образовательного процесса, включая программное обеспечение, информационные справочные системы (при необходимости):

<http://elibrary.ru>

[www.scopus.com](http://www.scopus.com)

Занятия проводятся в аудитории, оснащенной мультимедийным экраном

11. Язык преподавания – русский

12. Преподаватели:

д.ф.-м.н., профессор Колокольников Василий Никитич.

### **Фонды оценочных средств, необходимые для оценки результатов обучения**

Образцы домашних заданий:

1. Найдите явную формулу для резольвенты Броуновского движения.
  2. Используя мартингалы, определите распределение вероятностей выхода простого случайного блуждания из любого заданного интервала.
  3. Используя связь Марковских процессов с дифференциальными уравнениями, вычислите вероятности выхода Броуновского движения из любого заданного интервала слева или справа.
- Кроме того, в качестве домашнего задания подразумевается изучение рекомендуемой литературы.

Примеры вопросов для промежуточной аттестации –**экзамена**:

1. Теорема Дуба о случайном выборе.
2. Максимальные неравенства Дуба.
3. Построение Броуновского Движения методами Гильбертова пространства.
4. Формула Леви-Хинчина для бесконечно делимых распределений.
5. Построение процессов Леви. Разложение Леви-Ито.
6. Мартингалы Дынкина
7. Принцип отражения для Броуновского движения.
8. Определение и построение стохастического интеграла Ито.

### **Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения**

Зачет (экзамен) проходит по билетам, включающем 2 вопроса. Уровень знаний аспиранта по каждому вопросу на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Критерии и показатели оценивания ответа на экзамене			
2	3	4	5



Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Фрагментарные знания актуальных проблем, алгоритмов, теорем в области стохастического исчисления.	Неполные знания актуальных проблем, алгоритмов, теорем в области стохастического исчисления.	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания актуальных проблем, алгоритмов, теорем в области стохастического исчисления.. .	Сформированные и систематические знания актуальных проблем, алгоритмов, теорем в области стохастического исчисления.