

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»  
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ



УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ,

Академик /И.А. Соколов/

«14» сентября 2022 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

**Теория потенциала**  
Potential theory

Программа (программы) подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

102.01.00.112-фмн-кфап, 102.01.00.122-фмн-кмф, 102.01.00.122-фмн- кски,  
102.01.00.235-фмн- кски, 102.01.00.112-фмн-ком, 102.01.00.122-фмн-кани  
102.01.00.112-фмн-кса, 102.01.00.122-фмн- кса, 102.01.00.112-фмн- кндсипу,  
102.01.00.122-фмн- кндсипу, 102.01.00.114-фмн- кмс, 102.01.00.115-фмн- кммп  
102.01.00.115-фмн- кмк, 102.01.00.123-фмн- кмк, 102.01.00.116-фмн- квтм,  
102.01.00.122-фмн- квтм, 102.01.00.116-фмн- квм, 102.01.00.122-фмн- квм, 102.01.00.122-фмн- коу,  
102.01.00.112-фмн- коу, 102.01.00.123-фмн- кио, 102.01.00.122-фмн- кио, 102.01.00.235-фмн- киит,  
102.01.00.235-фмн-касвк, 102.01.00.235-фмн- ксп, 102.01.00.235-фмн- киб,  
102.01.00.236-фмн-киб, 102.01.00.235-фмн-кая

---

Москва 2022

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с Приказом Ректора МГУ №1216 от 24 ноября 2021 года «Об утверждении Требований к основным программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, самостоятельно устанавливаемых Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова»

1. Краткая аннотация:

**Название дисциплины** Теория потенциала

**Цель** изучения дисциплины – Излагаются основы теории потенциала, используемой при построении интегральных представлений функций. Даются основные свойства интегральных представлений, необходимые при приложении теории потенциала к решению краевых задач.

The basics of the theory of potential used in the construction of integral representations of functions are outlined. The properties of integral representations are given, which are necessary for applying the theory of potential to the solving of boundary value problems.

2. Уровень высшего образования – аспирантура

3. Научные специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». 1.1.6. «Вычислительная математика». область науки: Физико-математические науки.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре Программы аспирантуры: элективный курс.

5. Объем дисциплины (модуля) составляет 2 зачетные единицы, всего 108 часов, из которых 40 часов составляет контактная работа студента с преподавателем (36 часов занятия лекционного типа, 4 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 68 часов составляет самостоятельная работа учащегося.

6. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

На предыдущих уровнях высшего образования должны быть освоены общие курсы:

1. Алгебра и геометрия
2. Математический анализ
3. Функциональный анализ
4. Уравнения математической физики
5. Численные методы

7. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),  форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы						Самостоятельная работа обучающегося, часы		
		из них						из них		
Занятия лекционно го типа	Занятия семинарско го типа	Групповые консуль тации	Индивидуальные кон сультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации	Всего	Выполнение домашних заданий	Подготовка к коллоквиумам	Всего		
<p><b>Тема 1. Основные сведения по интегралам. Несобственные и сингулярные интегралы.</b></p> <p>Основные сведения об определенных, кратных, криволинейных, поверхностных интегралах. Несобственные интегралы с полярной особенностью. Сингулярные интегралы.</p>	<b>30</b>	10	-	-	-	-	10	20	<b>20</b>	

Гиперсингулярные интегралы.										
<b>Тема 2. Основные интегральные формулы математической физики.</b> Формулы Гаусса-Остроградского и Стокса. Формулы Грина для дифференциальных операторов. Выражения для решений уравнений Пуассона и Гельмгольца через краевые значения на границе для внутренних и внешних областей. Восстановление векторного поля по дивергенции и ротору.	<b>34</b>	14					14	20		<b>20</b>
<b>Тема 3. Краевые значения поверхностных потенциалов.</b> Краевые значения потенциалов простого и двойного слоя. Градиенты потенциалов простого и двойного слоя в плоском случае. Вихревой	<b>34</b>	14					14	20		<b>20</b>

<p>слой. Краевые значения векторного поля, индуцируемого вихревым слоем. Краевые значения градиентов потенциалов простого и двойного слоя. Градиенты потенциалов простого и двойного слоя в трехмерном случае. Потенциалы точечного заряда, простого и двойного слоя для уравнения Гельмгольца.</p>											
<p><b>4. Промежуточная аттестация – устный экзамен</b></p>	<p><b>10</b></p>	<p><b>2</b></p>					<p><b>8</b></p>				
<p><b>Итого</b></p>	<p><b>108</b></p>	<p><b>40</b></p>					<p><b>68</b></p>				

## 8. Образовательные технологии.

Доска и мел. Информационные и интерактивные технологии используются при обсуждении проблемных и неоднозначных вопросов, требующих выработки решения в ситуации неопределенности.

## 9. Учебно-методические материалы для самостоятельной работы по дисциплине (модулю):

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации.

Литература для самостоятельной работы студентов в соответствии с тематическим планом .

**Тема 1 «Основные сведения по интегралам. Несобственные и сингулярные интегралы»**

**Тема 2 «Основные интегральные формулы математической физики»**

**Тема 3 «Краевые значения поверхностных потенциалов»**

## 10. Ресурсное обеспечение:

- Перечень основной и вспомогательной учебной литературы ко всему курсу

### **Основная литература**

1. Сетуха А.В. Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения. Учебное пособие. — М.:Аргамак-Медиа, 2014. — С. 256.
2. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. Учебное пособие. — М.: МГУ, 1999. — 798с.
3. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. — М.: ТОО «Янус», 1995. — 520 с.

### **Дополнительная литература**

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. —311с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Учебник. --- М.:Бинум, 2003. --- 632с.
3. Галишникова Т.Н., Ильинский А.С. Метод интегральных уравнений в задачах дифракции волн. --- М.:МАКС Пресс, 2013. --- 248с.
4. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М.:МАКС Пресс, 2013. --- 2008с.
5. Захаров Е.В. Орлик С.И. Интегральные уравнения. Учеб. пособие. --- М.:МАКС Пресс, 2012. --- Части 1---3.
6. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа: уч. пособ. --- М.:Академия, 2007. --- 320с.

## **Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»**

<http://elibrary.ru>

[www.scopus.com](http://www.scopus.com)

## Описание материально-технической базы.

Занятия проводятся в аудитории, оснащенной доской

11. Язык преподавания – русский

12. Преподаватели:

*Степень, должность ФИО.*, e-mail, тел.: - проф., д.ф.м.н, Сетуха Алексей Викторович,  
setuhaav@rambler.ru

### Фонды оценочных средств, необходимые для оценки результатов обучения

#### Список вопросов для устного экзамена.

1. Определенный и кратный интегралы, несобственные одномерные и кратные интегралы.

Сходимость интеграла  $\int_D \frac{f(x)}{|x-c|^\alpha} dx$ .

2. Криволинейные интегралы 1-го рода. Несобственные криволинейные интегралы.

3. Поверхностные интегралы 1-го рода. Параметризация поверхности. Специальная система координат.

4. Несобственные поверхностные интегралы  $\int_\Sigma \frac{f(x)}{|x-c|^\alpha} d\sigma$ . [1].

5. Линейный интегральный оператор с непрерывным ядром. Действие из  $C(D)$  в  $C(D)$ . Ограниченность интегрального оператора с непрерывным ядром.

6. Интегральный оператор Фредгольма с полярным ядром. Его ограниченность и компактность.

7. Условие Гельдера. Примеры функций, удовлетворяющих условию Гельдера. Оценка для разности  $|x-y|^{-\alpha} - |z-y|^{-\alpha}$ .

8. Выполнение условия Гельдера для функции, возникающей при применении оператора Фредгольма с непрерывным и полярным ядром непрерывной функции.

9. Сингулярный интеграл в смысле главного значения. Интеграл по отрезку. Существование интеграла  $\int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx$  в случае функции  $f$  непрерывной по Гельдеру.

10. Сингулярный интеграл с ядром Гильберта.

11. Кратный сингулярный интеграл в смысле главного значения. Условия существования и доказательство существования.

12. Выполнение условия Гельдера для функции, возникающей после применения сингулярного интегрального оператора к функции, удовлетворяющей условию Гельдера.
13. Гиперсингулярный интеграл в смысле конечного значения по Адамару. Общее определение (одномерных и многомерный случай). Возможные трактовки интеграла  $\int_a^b \frac{f(x)}{(x-c)^2} dx$  и их связь с интегралом в смысле главного значения.
14. Основные интегральные формулы: формулы Остроградского-Гаусса, Стокса, Грина (без доказательства). Две формулы Грина для интеграла по области от эллиптического дифференциального оператора.
15. Уравнения Лапласа, Пуассона, Гельмгольца. Потенциалы точечного заряда, простого, двойного слоя, потенциал объемного заряда (определения). Формула Грина для потенциала точечного заряда (3-я формула Грина).
16. Выражение для решения уравнений Лапласа и Гельмгольца (однородного) через поверхностные потенциалы по границе области. Случаи внутренней и внешней областей. Условия излучения Зоммерфельда для уравнения Гельмгольца.
17. Прямые значения потенциалов простого и двойного слоя на поверхности. Их непрерывность.
18. Существование краевых значений потенциала простого слоя.
19. Потенциал двойного слоя с постоянной плотностью. Связь с телесным углом.
20. Краевые значения потенциала двойного слоя.
21. Градиент потенциала двойного слоя в плоском случае. Связь с полем скоростей вихревого слоя.
22. Связь градиентов потенциалов простого и двойного слоя в двумерном случае с интегралом Коши. ( для потенциала двойного слоя)
23. Интеграл Коши для функций комплексной переменной. Формулы Сохоцкого.
24. Краевые значения градиента потенциала простого слоя в плоском случае.
25. Краевые значения градиента потенциала простого слоя двойного слоя в плоском случае.
26. Краевые значения нормальной производной потенциала двойного слоя в плоском случае: выражение через гиперсингулярный интеграл, понимаемый в смысле конечного значения по Адамару.
27. Поверхностный градиент функции, его связь с обычным градиентом, функции, заданной в окрестности поверхности. Производные вектора нормали вдоль поверхности.
28. Интеграл от поверхностного градиента функции по поверхности.
29. Интеграл по поверхности от векторного произведения поверхностного градиента и вектора нормали.
30. Краевые значения градиента потенциала простого слоя.

31. Выражение для градиента потенциала двойного слоя через поверхностный градиент плотности (закон Био-Савара).
32. Существование краевых значений градиента двойного слоя. Формула для краевых значений.
33. Выражение для нормальной производной потенциала двойного слоя через гиперсингулярный интеграл, понимаемый в смысле конечного значения по Адамару.

Материалы для мероприятий текущего контроля.

Мероприятия текущего контроля реализуются в виде лекций дискуссий.

Примерные темы рефератов. Примеры тем:

- 1) Основные интегральные формулы математической физики.
- 2) Свойства поверхностных и объемных потенциалов

### **Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения**

#### **Особенности организации процесса обучения**

Для эффективного освоения курса рекомендуется перед каждым занятием привести в порядок конспекты лекций. После каждого занятия рекомендуется найти и прочитать дополнительную литературу по теме лекции и прочитать свои конспекты.

#### **Система контроля и оценивания**

За работу во время лекций-дискуссий и за реферат выставляются оценки.

Окончательная оценка определяется в первую очередь на основании оценки устного ответа аспиранта. При этом окончательная оценка корректируется в сторону повышения на основании оценок за реферат, а также оценок, полученных на лекциях-дискуссиях.

#### **Структура и график контрольных мероприятий**

Лекция дискуссия на 12-й, 18-й. реферат в течение семестра. Устный экзамен в конце семестра.