

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»  
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ



УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ,

Академик

*И.А. Соколов*

«14» сентября 2022 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Теория вероятностных распределений

Theory of probability distributions

Программа (программы) подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

102.01.00.112-фмн-кфап, 102.01.00.122-фмн-кмф, 102.01.00.122-фмн- кски,  
102.01.00.235-фмн- кски, 102.01.00.112-фмн-ком, 102.01.00.122-фмн-кани  
102.01.00.112-фмн-кса, 102.01.00.122-фмн- кса, 102.01.00.112-фмн- кндсипу,  
102.01.00.122-фмн- кндсипу, 102.01.00.114-фмн- кмс, 102.01.00.115-фмн- кммп  
102.01.00.115-фмн- кмк, 102.01.00.123-фмн- кмк, 102.01.00.116-фмн- квтм,  
102.01.00.122-фмн- квтм, 102.01.00.116-фмн- квм, 102.01.00.122-фмн- квм, 102.01.00.122-фмн- коу,  
102.01.00.112-фмн- коу, 102.01.00.123-фмн- кио, 102.01.00.122-фмн- кио, 102.01.00.235-фмн- киит,  
102.01.00.235-фмн-касвк, 102.01.00.235-фмн- ксп, 102.01.00.235-фмн- киб,  
102.01.00.236-фмн-киб, 102.01.00.235-фмн-кая

---

Москва 2022

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с Приказом Ректора МГУ №1216 от 24 ноября 2021 года «Об утверждении Требований к основным программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, самостоятельно устанавливаемых Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова»

1. Краткая аннотация:

**Название дисциплины** Теория вероятностных распределений

**Цель** изучения дисциплины – Данный курс посвящен изучению общих свойств вероятностных распределений в одномерном, многомерном случаях и для случайных процессов. Изучаются как общие свойства вероятностных распределений, так и некоторые специальные, которые часто используются в тех или иных приложениях. Например, исследуются такие популярные сейчас темы как распределения с тяжелыми хвостами, свойство долговременной зависимости, самоподобные процессы, случайные суммы и подчиненные процессы. Знание подобных разделов абсолютно необходимо студентам при подготовке их диссертаций, но, как правило, это не освещается в стандарных курсах. Теоретическое изложение дополняется рассмотрением большого числа конкретных примеров.

2. Уровень высшего образования – аспирантура

3. Научная специальность 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика. Область науки: физико-математические науки.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре Программы аспирантуры - элективный курс.

5. Объем дисциплины (модуля) составляет 2 зачетные единицы, всего 108 часов. 28 часов составляет контактная работа с преподавателем – 24 часа занятий лекционного типа, 0 часов занятий семинарского типа (семинары, научно-практические занятия, лабораторные работы и т.п.), 0 часов индивидуальных консультаций, 0 часов мероприятий текущего контроля успеваемости, 2 часа групповых консультаций, 2 часа мероприятий промежуточной аттестации. 80 часов составляет самостоятельная работа студента.

6. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

На предыдущих уровнях высшего образования должны быть освоены общие курсы:

1. Математический анализ
2. Функциональный анализ
3. Обыкновенные дифференциальные уравнения
4. Теория вероятностей и математическая статистика
5. Теория случайных процессов

6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

	Всего (часы)	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них						Самостоятельная работа обучающегося, часы из них		
		Занятия лекционно го типа	Занятия семинарско го типа	Групповые консуль тации	Индивидуальные кон сультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации	Всего	Выполнение домашних заданий	Подготовка к коллоквиумам	Всего
<p><b>Тема 1. Случайный элемент и его распределение.</b></p> <p>Измеримое пространство. Вероятностное пространство. Случайный элемент и его распределение. Основные свойства распределений случайных элементов. Примеры.</p>	10	2		-	-		2	8	-	8
<p><b>Тема 2. Классические одномерные и многомерные распределения и их обобщения</b></p> <p>Одномерная схема Бернулли,</p>	18	6	-	-	-	-	6	12	-	12

<p>биномиальное, геометрическое и пуассоновское распределения. Классические одномерные непрерывные распределения и приложения в статистике. Многомерная схема Бернулли, многомерные биномиальное, геометрическое и пуассоновское распределения. Классические многомерные непрерывные распределения и их применения в статистике.</p>										
<p><b>Тема 3. Классические случайные процессы и их основные свойства</b></p> <p>Случайное блуждание, однородный процесс Пуассона, сложный процесс Пуассона, винеровский процесс, процесс Орнштейна-Уленбека, процессы Леви.</p>	16	4	-	-	-	-	4	12	-	12
<p><b>Тема 4. Предельные теоремы и связанные с ними распределения.</b></p> <p>Общая постановка задачи о предельных теоремах в схеме серий. Безгранично делимые распределения, формула Леви-Хинчина для характеристической функции. Условия сходимости к заданному безгранично делимому распределению. Устойчивые распределения, формула для характеристической функции, описание областей притяжения.</p>	16	4		-			4	12	-	12

<p><b>Тема 5. Случайные суммы и подчиненные процессы</b></p> <p>Случайные суммы и предельные теоремы для них. Теорема переноса Гнеденко-Фахима. Случайная замена времени, субординатор. Подчиненные процессы, неоднородный процесс Пуассона. Связь устойчивых процессов Леви с различными показателями.</p>	16	4					4	12		12
<p><b>Тема 6. Самоподобные процессы</b></p> <p>Определение самоподобного процесса и вычисление его характеристик. Процесс дробного броуновского движения и альфа-устойчивое движение Леви.</p>	16	4					4	12		12
<p><b>Тема 7. Распределения и процессы со специальными свойствами</b></p> <p>Различные классы распределений с тяжелыми хвостами и их соотношения. Процессы с долговременной зависимостью. Примеры.</p>	16	4					4	12		12
<p><b>8. Промежуточная аттестация – устный экзамен</b></p>	4									



## 8. Образовательные технологии.

При проведении лекционных занятий рассматриваются примеры с конкретными расчетами в тех или иных ППП по статистике. Более того, в ходе самостоятельной работы студенты обучаются применению этих пакетов в реальных задачах. Конкретный выбор пакета предоставляется студенту.

## 9. Учебно-методические материалы для самостоятельной работы по дисциплине (модулю):

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации.

Литература для самостоятельной работы студентов в соответствии с тематическим планом .

### Тема 1 «Случайный элемент и его распределение»

Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 264 с.

Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике, М.: Наука, 1985. – 640 с.

Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1989. – 640 с.

### Тема 2 «Классические одномерные и многомерные распределения и их обобщения»

Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике, М.: Наука, 1985. – 640 с.

Н.Л. Джонсон, С. Коц, А. Кемп. Одномерные дискретные распределения. – М.: Бином, 2010. – 560 с.

Балакришнан Н., Котц С., Джонсон Н.Л. Одномерные непрерывные распределения. – М.: Бином, 2010. – 703 с.

N. Balakrishnan, V.B. Nevzorov. A primer on statistical distributions. – John Wiley&Sons, New Jersey, 2003. – 305 p.

### Тема 3 «Классические случайные процессы и их основные свойства»

Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 570 с.

#### **Тема 4 «Предельные теоремы и связанные с ними распределения»**

1. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 264 с.

#### **Тема 5 «Случайные суммы и подчиненные процессы»**

Gnedenko B.V., Korolev V.Yu. Random Summation. Limit Theorems and Applications. – Boca-Raton, Florida: CRT Press, 1996.

#### **Тема 6. «Самоподобные процессы»**

Embrechts P. and Maejima M. Selfsimilar Processes. – Princeton University Press, 2002. – 111 p.

#### **Тема 7. «Распределения и процессы со специальными свойствами»**

1. Румянцев А.С., Морозов Е.В. Распределения с тяжелыми хвостами и их приложения. – Петрозаводск: ПетрГУ, 2013.
2. Mikosch Th., Resnick S., Rootzen H., Stegeman A. Is network traffic approximated by stable Levy motion or fractional Brownian motion? - Ann. Appl.Probab., 2002. — V. 12, № 1. — P. 23-68.

#### 10. Ресурсное обеспечение:

- Перечень основной и вспомогательной учебной литературы ко всему курсу

#### **Основная учебно-методическая литература**

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 570 с.
2. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 264 с.
3. Корольюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике, М.: Наука, 1985. – 640 с.
4. Скороход А.В. Случайные процессы с независимыми приращениями. – М.: Наука, 1964. – 278 с.
5. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1989. – 640 с.

#### **Дополнительная литература**

3. D'Apice, Ciro; Khokhlov, Yury; and Sidorova Oksana, On an extension of class of self-similar processes – In: Transactions of The XXV International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Salerno, Italy, September 20-24, 2005, pp. 35-38.
4. Bertoin J. Levy Processes. Cambridge University Press, 1996. – 266 p.
5. Н.Л. Джонсон, С. Коц, А. Кемп. Одномерные дискретные распределения. – М.: Бином, 2010. – 560 с.

6. Балакришнан Н., Котц С., Джонсон Н.Л. Одномерные непрерывные распределения. – М.: Бином, 2010. – 703 с.
7. N. Balakrishnan, V.B. Nevzorov. A primer on statistical distributions. – John Wiley&Sons, New Jersey, 2003. – 305 p.
8. Embrechts P. and Maejima M. Selfsimilar Processes. – Princeton University Press, 2002. – 111 p.
9. Галактионова О.В., Хохлов Ю.С., Модель телетрафика, объединяющая устойчивое движение Леви и дробное броуновское движение. - Вестник Тверского госуниверситета, сер. Прикладная математика, 2006, вып. 3, с. 163-167.
10. Gnedenko B.V., Korolev V.Yu. Random Summation. Limit Theorems and Applications. – Boca-Raton, Florida: CRT Press, 1996.
11. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. – М.:Физматлит, 1994. – 544 с.
12. Зингер А.А. Об одном классе предельных распределений для нормированных сумм независимых случайных величин. – Теория вероятн. и ее примен., 1965, Т. 10, вып. 4, с. 672-692.
13. Золотарев В.М. Одномерные устойчивые законы. – М.: Наука, 1983. – 304 с.
14. Иванова Н.Л., Хохлов Ю.С., Многомерная модель коллективного риска. -- Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2005, № 3. С. 35-43.
15. Mikosch Th., Resnick S., Rootzen H., Stegeman A. Is network traffic approximated by stable Levy motion or fractional Brownian motion? - Ann. Appl.Probab., 2002. — V. 12, № 1. — P. 23-68.
16. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
17. Румянцев А.С., Морозов Е.В. Распределения с тяжелыми хвостами и их приложения. – Петрозаводск: ПетрГУ, 2013.
18. Sato K. Levy processes and infinitely divisible distributions. – Cambridge University Press, 1999. – 499 p.
19. Samorodnitsky, G. and Taqqu M.S. Stable Non-Gaussian random Processes. Stochastic Models with Infinite Variance. – Chapman and Hall, New York-London, 1994.

- Перечень используемых информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса, включая программное обеспечение, информационные справочные системы (при необходимости):
  1. Программное обеспечение для подготовки слайдов лекций MS PowerPoint
  2. Программное обеспечение для создания и просмотра pdf-документов Adobe Reader
  3. Издательская система LaTeX.
- 1. [www.probability.net](http://www.probability.net)
- 2. <http://elibrary.ru>
- 3. [www.scopus.com](http://www.scopus.com)
- Описание материально-технической базы.

Для преподавания дисциплины требуется класс, оборудованный маркерной или меловой доской и проектором.

11. Язык преподавания – русский

12. Преподаватели:

*Степень, должность ФИО.*, e-mail, тел.: -Д.ф.-м.н., профессор Хохлов Юрий Степанович,  
[yshkhkhlov@yandex.ru](mailto:yshkhkhlov@yandex.ru) , (495)9395394

### **Фонды оценочных средств, необходимые для оценки результатов обучения**

Аттестация проводится в виде итогового устного экзамена. В билете 2 вопроса, кроме того нужно ответить на несколько вопросов из дополнительного списка основных определений и результатов.

### **Список вопросов для устного экзамена.**

1. Случайный элемент и его распределение. Примеры: случайная величина, случайный вектор, случайный процесс.
2. Одномерные распределения вероятностей: вырожденное, Бернулли, биномиальное, геометрическое, Пуассона, отрицательное биномиальное, равномерное, нормальное, гамма, показательное, хи-квадрат, Стьюдента, Снедекора-Фишера, Вейбулла, Парето, логистическое, логнормальное, отрицательное гауссовское, бета.
3. Многомерные распределения: Многомерное Бернулли, многомерное биномиальное, полиномиальное, многомерное распределение Пуассона, равномерное в области, многомерное нормальное, многомерное распределение Стьюдента, распределение Уишарта.
4. Примеры случайных процессов: процесс Леви, процесс Пуассона, винеровский процесс, гамма-процесс, многомерный процесс Пуассона.
5. Безгранично делимые распределения и их связь с предельными теоремами.

6. Формула Леви-Хинчина для характеристической функции безгранично делимого распределения. Примеры безгранично делимых распределений.

7. Условия сходимости к заданному безгранично делимому распределению.

8. Устойчивые распределения: определение, связь с предельными теоремами, формула для характеристической функции, описание областей притяжения.

9. Распределения с тяжелыми хвостами: определение четырех классов и их соотношения. Примеры.

10. Подчиненные процессы. Структура неоднородного процесса Пуассона.

11. Самоподобные процессы: определение, примеры.

### **Дополнительные вопросы к экзамену по курсу**

#### **"Теория вероятностных распределений"**

**(Знать наизусть!)**

1. Определение случайного элемента и его распределения.

2. Одномерные распределения вероятностей: вырожденное, Бернулли, биномиальное, геометрическое, Пуассона,

отрицательное биномиальное, равномерное, нормальное, гамма, показательное, хи-квадрат, Стьюдента, Снедекора-Фишера, Вейбулла, Парето,

логистическое, логнормальное, отрицательное гауссовское, бета.

3. Многомерные распределения: Бернулли, многомерное биномиальное, полиномиальное, геометрическое, многомерное распределение Пуассона, равномерное в области,

многомерное нормальное, многомерное распределение Стьюдента, распределение Уишарта.

4. Примеры случайных процессов: процесс Леви, процесс Пуассона, винеровский процесс, гамма-процесс, многомерный процесс Пуассона.
5. Определение безгранично делимого распределения.
6. Формула Леви-Хинчина для характеристической функции безгранично делимого распределения.
7. Примеры безгранично делимых распределений.
8. Определение устойчивого распределения.
9. Формула для характеристической функции устойчивого распределения.
9. Распределение с тяжелым хвостом.
10. Распределение с длинным хвостом.
11. Субэкспоненциальное распределение и его основное свойство.
12. Распределение с правильно меняющимся хвостом.
13. Определение самоподобного процесса.
14. Дробное броуновское движение.
15. Альфа-устойчивое движение Леви.
16. Определение субординатора.
17. Примеры субординаторов: детерминированный процесс, альфа-устойчивый процесс, гамма-процесс, процесс Пуассона.

18. Определение подчиненного процесса.

19. Примеры подчиненных процессов: неоднородный процесс Пуассона, симметричный альфа-устойчивый процесс и его получение из винеровского процесса, сложный процесс Пуассона, процесс Кокса.

20. Определение стационарной последовательности со свойством долговременной зависимости.

21. Связь свойства самоподобия со свойством долговременной зависимости.

### **Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения**

Зачет (экзамен) проходит по билетам, состоящим из 1 вопроса и 1 задачи. В случае если на вопрос и задачу был дан ответ, оцененный не ниже чем «удовлетворительно», аспирант получает общую оценку «зачтено».