Содержание

Программа конференции

СЕКЦИЯ I

14 апреля, понедельник, 16:30
II учебный корпус, 6 этаж, ауд. 685

***Кафедры** общей математики,*
функционального анализа и его применений

1. О спектральных разложениях функций из класса L_p при $p \neq 2$ в ряд по собственным функциям оператора Лапласа в произвольной N-мерной области. — *Доклад академика РАН Ильина В. А.*

2. Некоторые задачи смешанного типа для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в трехмерных областях. — *Доклад академика РАН Моисеева Е. И., аспиранта Нефедова П. В.*

3. О критериях принадлежности пространствам L_p и W_1^p при $p \geqslant 2$ обобщенных решений начально-краевых задач для уравнения Клейна-Гордона-Фока. — *Доклад ассистента Кулешова А. А., ассистента Смирнова И. Н.*

4. О функциях с ограниченными разностями. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Калябина Г. А.*

5. Применение метода повторного квантования для построения асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями в коэффициентах. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Коровиной М. В.*

6. Исследование интегрального уравнения равновесия в пространствах различных размерностей. — *Доклад доцента, к.ф.-м.н. Никитина А. А., студента Высшей Школы Экономики отделения Прикладной математики и информатики Бодрова А. Г.*

7. Математическое моделирование выработки электроэнергии солнечными батареями российского сегмента Международной космической станции. — *Доклад доцента, к.ф-м.н. Сазонова В. В.*

8. Краевая задача оптимального управления со связанными терминальными условиями. — *Доклад доцента, к.ф.-м.н. Хорошиловой Е. В.*

СЕКЦИЯ II

15 апреля, вторник, 12:00
II учебный корпус, 6 этаж, ауд. 685

***Кафедра** оптимального управления*

1. Задачи управления с неполной информацией. Новые подходы. — *Доклад академика РАН Кряжимского А. В.*

2. Равновесность по Бержу: достаточные условия и существование. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Жуковского В. И.*

3. Об одной оптимизационной задаче, связанной с управляемой моделью Солоу. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Никольского М. С.*

4. Нуль-управляемость двуступенчатых линейных управляемых систем. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Никольского М. С., аспиранта Молчанова А. А.*

5. Неравенства обратимости для волнового уравнения на докритических промежутках в классах слабых обобщенных решений. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Потапова М. М., аспиранта Иванова Д. А.*

6. Задачи граничного управления для волнового уравнения с терминальным эллипсоидальным множеством. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Потапова М. М., аспиранта Дряженкова А. А.*

7. О равномерной сходимости решений управляемой системы интегральных уравнений при слабой сходимости управлений. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Дмитрука А. В., аспиранта Белоглазова Ю. И.*

8. Исследование модели двухсекторной экономики с интегральным функционалом качества при различных коэффициентах амортизации. — *Доклад доцента, к.ф.-м.н. Киселёва Ю. Н., доцента, к.ф.-м.н. Орлова М. В., аспиранта Орлова С. М.*

9. Об оценивании числа переключений оптимальных управлений для модели распространения эпидемии. — *Доклад доцента, к.ф.-м.н. Хайлова Е. Н., профессора Техасского Женского Университета США, к.ф.-м.н. Григорьевой Э. В.*

10. Задача сопровождения для линейных систем второго порядка. — *Доклад младшего научного сотрудника, к.ф.-м.н. Лукьяновой Л. Н., аспиранта Румянцева А. Е.*

11. Об одном классе игровых задач терминального управления. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Григоренко Н. Л., аспиранта Анисимова А. В.*

12. Об условиях разрешимости задачи оптимального управления линейными динамическими системами с ограниченной информацией о начальном состоянии. — *Доклад академика РАН Кряжимского А. В., аспиранта Стрелковского Н. В.*

СЕКЦИЯ III

16 апреля, среда, 15:30
II учебный корпус, 5 этаж, ауд. 526а

***Кафедра** исследования операций*

1. Метод решения матричных игр специального вида. — *Доклад доцента, к.ф.-м.н. Морозова В. В., аспиранта Шалбузова К. Д.*

2. Двухузловой рынок. Оптимизация системы перемещения товара. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Васина А. А., аспиранта Дайловой Е. А.*

3. Моделирование баланса доходов и расходов российского населения. — *Доклад ассистента, к.ф.-м.н. Вржеща В. П., магистра МФТИ Санниковой И. В.*
4. Теоретико-игровой анализ правил рекламодателей в геопозиционных аукционах. — *Доклад аспиранта Блинова Н. Г., профессора, д.ф.-м.н. Новиковой Н. М.*
5. Оценка деривативов на дискретном рынке. — *Доклад математика Соловьева А. И.*
6. Построение кусочно-линейной системы мотивации для нескольких классов игроков. — *Доклад доцента, к.ф.-м.н. Белянкина Г. А., аспиранта Коновалова И. О., аспиранта Суетиной Е. Н.*
7. Анализ чувствительности модели оптимизации дивидендных выплат. — *Доклад доцента, к.ф.-м.н. Денисова Д. В., аспиранта Некрасовой О. В.*

СЕКЦИЯ IV

16 апреля, среда, 14:30
II учебный корпус, 6 этаж, ауд. 609

***Кафедра** математической физики*

1. Математическое моделирование на супер ЭВМ морских электромагнитных зондирований. — *Доклад старшего научного сотрудника Барашкова И. С., профессора, д.ф.-м.н. Дмитриева В. И.*
2. Численный анализ обусловленности двумерной задачи электроимпедансной томографии. — *Доклад младшего научного сотрудника Гаврилова С. В.*
3. Дифракция электромагнитной волны на треугольной металлической пластине. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Ильинского А. С.*
4. Повышение резкости изображений на основе деформации пиксельной сетки. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Крылова А. С., аспиранта Насонова А. А.*
5. О восстановлении изображений в некогерентных оптических системах. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Разгулина А. В., старшего преподавателя физического факультета МГУ Ирошникова Н. Г., старшего научного сотрудника физического факультета МГУ Ларичева А. В., студента Старостина А. С.*
6. О некоторых общих принципах для эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Тихонова И. В.*
7. Анализ рассеивающих свойств шероховатости в поле неизлучающих волн. — *Доклад старшего научного сотрудника, к.ф-м.н. Лопушенко В. В.*

СЕКЦИЯ V

16 апреля, среда, 14:35
II учебный корпус, 6 этаж, ауд. 685

***Кафедра** вычислительных технологий и моделирования*

1. Исследование и численное решение задачи минимизации экономического ущерба от локальных источников. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Агошкова В. И., аспиранта ИВМ РАН Новикова И. С.*
2. Решение задачи об управлении риском нефтяного загрязнения охраняемых зон Балтийского моря на основе метода блуждающих частиц. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Агошкова В. И., студента МФТИ Асеева Н. А.*
3. Исследование задачи об управляемости скорости ветра в прибрежной зоне Новороссийска при боре. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Агошкова В. И., студента МФТИ Шелопут Т. О.*
4. Усовершенствование процедуры построения составных полярных кодов. — *Доклад доцента, к.ф.-м.н. Замарашкина Н. Л., студента Цагашека И. В.*
5. Формулы и оценки для главного ранга тензоров. — *Доклад чл.-корр., профессора, д.ф.-м.н. Тыртышникова Е. Е., студента Стефонишина Д. А.*
6. О решении краевых задач для уравнения Лапласа со снесением граничного условия на приближенную границу. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Сетухи А. В., аспиранта Орловского государственного университета Писарева И. В.*
7. Быстрый метод решения кинетических уравнений агрегации и фрагментации. — *Доклад чл.-корр. РАН, профессора, д.ф.-м.н. Тыртышникова Е. Е., студента Матвеева С. А.*
8. Математическая модель ВИЧ-инфекции: исследование чувствительности точки стабилизации вирусной нагрузки. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Бочарова Г. А., студента Азиатцевой В. В.*
9. Математическое моделирование индивидуальной динамики иммунных клеток. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Бочарова Г. А., студента МФТИ Гребенникова Д. С.*
10. Трехмерное моделирование кинетики внутриклеточной репликации и распространения ВИЧ инфекции в органе-мишени. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Бочарова Г. А., студента Кислицына А. А.*
11. Трехмерное моделирование развития иммунного ответа на распространение ВИЧ инфекции в органе-мишени. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Бочарова Г. А., студента Савинкова Р. С.*

СЕКЦИЯ VI

21 апреля, понедельник, 14:30
II учебный корпус, 5 этаж, ауд. 526а

***Кафедры** системного анализа, нелинейных динамических систем и процессов управления*

1. Эллипсоидальные методы для решения задачи синтеза управлений в системах с запаздыванием. — *Доклад ассистента Вострикова И. В.*

2. Существование функции цены в задаче синтеза импульсного управления при неопределённости. — *Доклад ассистента Минаевой Ю. Ю.*

3. О структуре информационного множества кусочно-линейной системы. — *Доклад ассистента, к.ф.-м.н. Точилина П. А.*

4. О методах численного исследования нелинейных эффектов в задачах поверхностной плазмоники. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Магницкого Н. А., аспиранта Бурова Д. А.*

5. Сверхстабилизация линейных динамических объектов при наличии операторных возмущений. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Фурсова А. С., ассистента МГТУ им. Н. Э. Баумана Хусаинова Э. Ф.*

6. Приложение методов LMI к задачам стабилизации и наблюдения. — *Доклад младшего научного сотрудника, к.ф.-м.н. Капалина И. В.*

7. Некоторые аспекты стабилизации билинейных систем. — *Доклад младшего научного сотрудника, к.ф.-м.н. Гончарова О. И.*

СЕКЦИЯ VII

22 апреля, вторник, 12:50
II учебный корпус, 6 этаж, ауд. 685

Кафедра *алгоритмических языков,* ***лаборатории*** *троичной информатики, открытых информационных технологий, вычислительного практикума и информационных систем*

1. Об одном возможном подходе к созданию универсального языка программирования. — *Доклад доцента, к.ф.-м.н. Столярова А. В., аспиранта Французова О. Г.*

2. Коррекция ошибок сочетаемости слов на основе статистики синтаксических связей. — *Доклад доцента, к.ф.-м.н. Большаковой Е. И., аспиранта Азимова А. Е.*

3. Троичная схемотехника — устройства с памятью. — *Доклад ведущего научного сотрудника, к.т.н. Маслова С. П.*

4. Алгоритм деления по модулю в симметричных системах счисления. — *Доклад старшего научного сотрудника, к.ф.-м.н. Владимировой Ю. С., ведущего научного сотрудника, к.ф.-м.н. Рамиля Альвареса Х.*

5. Выделение групп пользователей в данных мобильного мониторинга. — *Доклад старшего научного сотрудника, к.ф.-м.н. Намиота Д. Е.*

6. Реализация на суперкомпьютере алгоритма RE-PAIR и его применение для высокоэффективного поблочного сжатия предметно-ориентированных данных. — *Доклад научного сотрудника, к.ф.-м.н. Захарова В. Б., аспиранта мех.-мат. ф-та Щукина В. Ю.*

7. Федеративная база данных по дореволюционным студентам Московского университета. — *Доклад ведущего научного сотрудника Леонова М. В., инженера Козырева В. В.*

8. Подход к реализации междисциплинарной библиотеки на основе личностного знания. — *Доклад научного сотрудника Громыко В. И., профессора, д.ф.н. философского факультета МГУ Казарян В. П., д.ф.-м.н., старшего научного сотрудника МГТУ Васильева Н. С., старшего преподавателя РУДН Симакина А. Г., гл. спец. банка “Возрождение” Аносова С. С.*

СЕКЦИЯ VIII

23 апреля, среда, 14:30
II учебный корпус, 6 этаж, ауд. 609

***Кафедры** вычислительных методов, суперкомпьютеров и квантовой информатики и автоматизации научных исследований*

1. Об устойчивости нелокальных разностных схем в подпространствах. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Гулина А. В., доцента, к.ф.-м.н. Морозовой В.А̇.*

2. Принцип экстремума для уравнения Лаврентьева-Бицадзе со смешанными краевыми условиями. — *Доклад старшего научного сотрудника, д.ф.-м.н. Моисеева Т. Е.*

3. Совместная релаксация электронных оболочек пары двух-уровневых атомов в кубитовом представлении. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Ожигова Ю. И., аспиранта Сковорода Н. А.*

4. Решение шестимерных кинетических уравнений с оператором Кулоновских столкновений методом сглаженных частиц. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Зайцева Ф. С., аспиранта Аникеева Ф. А.*

5. Управление границей плазмы на основе решения обратной задачи методом эпсилон-сетей. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Зайцева Ф. С., ассистента Сучкова Е. П.*

6. Применение адаптивных технологий для определения подлинности произведений живописи по цифровым изображениям. — *Доклад ведущего научного сотрудника, д.ф.-м.н. Шишкина А. Г., старшего научного сотрудника, к.ф.-м.н. Лукьяницы А.А̇.*

7. Оптимизация параметров автостереоскопических устройств. — *Доклад старшего научного сотрудника, к.ф.-м.н. Лукьяницы А. А.*

СЕКЦИЯ IX

23 апреля, среда, 14:30
II учебный корпус, 5 этаж, ауд. 526а

***Кафедры** математической статистики, математической кибернетики и математических методов прогнозирования*

1. Асимптотическая нормальность оценки риска при вейвлет и вейвлет-вейглет разложениях функции сигнала в моделях с коррелированным шумом. — *Доклад доцента, д.ф.-м.н. Шестакова О. В., аспиранта Ерошенко А.А.*

2. Действие оператора FE-замыкания на множестве функций счетнозначной логики. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Марченкова С. С., аспиранта Калининой И. С.*

3. О тривиальных пересечениях предполных классов пятизначной логики, сохраняющих разбиения. — *Доклад ассистента, к.ф.-м.н. Нагорного А.С.*

4. Мультипликативная сложность некоторых булевых функций. — *Доклад доцента, к.ф.-м.н. Селезневой С. Н.*

5. О проверяющих тестах для некоторого класса функций, реализованных контактными схемами. — *Доклад доцента, к.ф.-м.н. Романова Д. С.*

6. Методы решения задач классификации на два класса с категориальными признаками. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Дьяконова А. Г., аспиранта МГТУ им. Н. Э. Баумана Головиной А. М.*

7. О сложности мультиплексорных функций в некоторых классах схем. — *Доклад профессора, д.ф.-м.н. Ложкина С. А., к.ф.-м.н. Власова Н. В.*

СЕКЦИЯ I

Кафедры общей математики, функционального анализа и его применений

Некоторые задачи смешанного типа для уравнения Лаврентьева–Бицадзе в трехмерных областях

Моисеев Евгений Иванович, Нефедов Павел Владимирович

Кафедра функционального анализа и его применений, e-mail: `decanvmk@rambler.ru`, `paul.nefedov@cs.msu.su`

В трехмерной области D рассматривается уравнение Лаврентьева–Бицадзе [1]:

$$L[u] = u_{xx} + sign(y) \cdot u_{yy} + u_{zz} = 0, \qquad (1)$$

где функция $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D$, а трехмерная область D представима в виде $D = D^{(+)} \cup D^{(-)}$:

$$D^{(+)} = \left\{(x, y, z) : \ D^{(+)}_{xy} \times (0 < z < \pi)\right\},$$

$$D^{(-)} = \left\{(x, y, z) : \ (D^{(-1)}_{xy} \cup D^{(-2)}_{xy}) \times (0 < z < \pi)\right\},$$

причем двумерные (в плоскости переменной $z = 0$) области $D^{(+)}_{xy}$, $D^{(-1)}_{xy}$ и $D^{(-2)}_{xy}$ определены соответственно как:

$$D^{(+)}_{xy} = \left\{(x, y) : \ -1 < x < 1, \ x^2 + y^2 < 1, \ y > 0\right\},$$

$$D_{xy}^{(-1)} = \{(x,y):\ -1 < x < 0,\ y < 0,\ -x-1 < y < x\}\,,$$

$$D_{xy}^{(-2)} = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ y < 0,\ -x < y < x-1\}\,.$$

В трехмерной области D требуется найти регулярное (т. е. классическое) решение дифференциального уравнения (1), принадлежащее функциональному классу $u \in C(\overline{D^{(+)} \cup D^{(-)}}) \cap C^2(D^{(+)}) \cap C^2(D^{(-)})$ и удовлетворяющее на границе трехмерной области D дополнительным (граничным) условиям специального вида, определяемым типом рассматриваемой граничной задачи.

В работе рассматриваются классические задачи Трикоми, Франкля и Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе применительно к трехмерному случаю в области D. Необходимо отметить, что для существования классического решения указанных задач дополнительно накладываются следующие ограничения на граничную функцию $\psi = \psi(\phi, z)$ (далее — “А”-условия):

(A1) $\psi = \psi(\phi, z) \in C_{\phi}^{2,\alpha}$ (условие гёльдеровости функции $\psi = \psi(\phi, z)$ по переменной ϕ);

(A2) $\psi_{z^4}^{(4)} \in C^{\alpha},\ \psi_{z^4}^{(4)} \in C^4$;

(A3) $\psi(\phi, 0) = \psi(\phi, \pi) = 0$ (условие периодичности по переменной z).

Основной результат настоящей работы заключается в следующей теореме, при доказательстве которой частично используются некоторые результаты работы [2]. Подробное изложение результатов работы можно найти в [3–5].

Теорема. *Классическое решение $u = u(x, y, z)$ задач Трикоми, Франкля и Геллерстедта (при выполнении условий “А”) в трехмерной области D для уравнения (1) смешанного типа Лаврентьева–Бицадзе существует и может быть представлено в виде специальных биортогональных функциональных рядов из работы [2].*

Благодарности

Работа выполнена в рамках программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-7332.2010.9), фонда РФФИ (проекты № 11-01-12081-офи-м-2011, № 11-01-00164-а) и при частичной финансовой поддержке федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России”.

Литература

1. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во “Наука”. 1970. 295 с.

2. Moiseev E. I., Prudnikov A. P., Sedletskii A. M. Basic Property and Completeness of Certain Systems of Elementary Functions. Cambidge Scientific Publishers. 2007. 120 p.

3. Moiseev E. I., Nefedov P. V. Tricomi problem for the Lavrent’ev-Bitsadze equation in a 3D domain // Integral Transforms and Special Functions. 2012. Vol. 23. Issue 10. P. 761–768.

4. Moiseev E. I., Nefedov P. V. Frankl problem for the Lavrent’ev-Bitsadze equation in a 3D-domain // Integral Transforms and Special Functions. 2013. Vol. 24. Issue 7. P. 554–560.

5. Moiseev E. I., Nefedov P. V. Gellerstedt problem for the Lavrent’ev-Bitsadze equation in a 3D-domain // Integral Transforms and Special Functions. (to be published in 2014; now available at http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/10652469.2014.883618).

О функциях с ограниченными разностями

Калябин Геннадий Анатольевич

Кафедра общей математики, e-mail: gennadiy.kalyabin@gmail.com

Пусть $L_0 \equiv L_0(I)$, $I := (0,1)$ — совокупность измеримых почти всюду конечных функций $f : I \to \mathbb{C}$; $0 < p \leqslant \infty$, $L_p \equiv L_p(I)$ — пространство Лебега функций с конечной квазинормой (нормой при $p \geqslant 1$):

$$\|f\|_{L_p(I)} := \left(\int_I |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, \quad \|f\|_{L_\infty(I)} := \text{ess sup}_{x\in I} |f(x)|. \tag{1}$$

Для двух совокупностей $\{\gamma\}$, $\{\tau\}$, $\gamma_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\tau_j \in \mathbb{R}$; $j \in \{0, 1, \dots k\}$; $k \geqslant 1$, $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_k$, рассмотрим семейство разностных операторов:

$$\mathcal{D}_h^k \equiv \mathcal{D}_{h,\{\gamma\}\{\tau\}}^k : L_0(I) \to L_0(I_h); \quad I_h := (-\tau_0 h, 1 - \tau_k h);$$

$$\mathcal{D}_h^k f(x) := \sum_{j=0}^k \gamma_j f(x + \tau_j h); \quad 0 < h < H \equiv H(\{\tau\}) := (\tau_k - \tau_0)^{-1}. \tag{2}$$

Операторы (2) включают разности $\Delta_h^k f(x)$ произвольного порядка ([1], §4.2), а также смещенные и центрированные разности. Еще в 1970-х Сергеем Михайловичем Никольским (сообщение О. В. Бесова) был поставлен вопрос: следует ли из конечности $\|\Delta_h^k f(\cdot)\|_{L_p(0,1-kh)}$ для всех h из некоторого достаточно “большого” множества $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_+$ принадлежность $L_p(I)$ исходной функции $f(\cdot)$?

Теорема. *Пусть известно, что* $\mathcal{D}_h^k f(\cdot) \in L_p(I_h)$ *при всех* h *из некоторого множества* $\mathcal{A} \subset (0, H/2)$ *положительной меры. Тогда* $f(\cdot) \in L_p(I)$.

Замечание. *Примеры показывают, что число* $H/2$ *в теореме нельзя заменить никаким бóльшим, и что для бесконечного интервала теорема неверна.*

Доказательство опирается на классические результаты теории меры (теоремы о структуре измеримых почти всюду конечных функций, точках плотности, о выражении меры плоского множества через меры его сечений и о ее инвариантности при движениях), подробно изложенных в [2].

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность В. И. Буренкову за постановку задачи и внимание к работе. Работа была выполнена при поддержке грантами РФФИ (проекты № 12-01-00554, № 14-01-00684).

Литература

1. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М. : Наука, 1977. 456 с.

2. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М. : Наука, 1974. 399 с.

Применение метода повторного квантования для построения асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями в коэффициентах

Коровина Мария Викторовна

Кафедра общей математики, e-mail: betelgeuser@yandex.ru

Работа посвящена исследованию асимптотических разложений решений уравнений с вырождением, а именно уравнений вида

$$H\left(r, -r^2\frac{d}{dr}\right)u = 0, \tag{1}$$

где $k \in N$, и $\hat{H}$ — дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами.

$$H(r,p) = \sum_{i=0}^{n} a_i(r)\, p^i,$$

где $a_i(r)$ — полиномы по r. Таким образом оператору умножения на p ставится в соответствие оператор $-r^2\frac{d}{dr}$. Это соответствие называется квантованием. Метод повторного квантования заключается в том, что квантование проводится два раза. При этом оператору интегрирования в двойственном пространстве ставится в соответствие оператор умножения. Запишем уравнение (1) в виде

$$H_0\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)u + \sum_{i=1}^{n} b_i r^i \left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^{k_i} u + \sum_{i=1}^{m} c_i r^i u = 0$$

Будем решать методом повторного квантования. Основной символ дифференциального оператора равен $H_0(p) = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i$. Пусть он имеет корни порядка не выше второго, а именно числа $p_1, \ldots, p_k$ являются корнями кратности один, а $p_{k+1}, \ldots, p_m$ — корни кратности два. Тогда справедлива

Теорема. *Асимптотика решения представима в виде*

$$u(r) = \sum_{i=1}^{k} e^{\frac{p_i}{r}} r^{\beta_i} \sum_{j=0}^{\infty} C_j^i r^j + \sum_{i=k+1}^{m} u_i(r).$$

Здесь при условии, что $c_1 + b_1 p_i^{k_1} \neq 0$

$$u_i = e^{\frac{p_i}{r}} \left(e^{\frac{\alpha_1^i}{\sqrt{r}}} r^{\frac{\sigma_1^i}{2}} \sum_j C_{ji}^1 r^{\frac{j}{2}} + e^{\frac{\alpha_2^i}{\sqrt{r}}} r^{\frac{\sigma_2^i}{2}} \sum_j C_{ji}^2 r^{\frac{j}{2}} + g_0(r) \right), \quad \alpha_{1,2}^i = \pm 2\sqrt{c_1 + b_1 p_i^{k_1}},$$

А при условии $c_1 + b_1 p_i^{k_1} = 0$

$$u_i = e^{\frac{p_i}{r}} \left(\sum_{j=-\sigma}^{-1} C_{ji}^0 r^j + g_1(r)\ln r + g_2(r)\ln^2 r + g_3(r) \right).$$

Здесь через $g_i(r)$, $i = 0,1,2,3$ *обозначены голоморфные функции,* C_{ji}^k, α_j^i, σ_j^i — *некоторые константы.*

Исследование интегрального уравнения равновесия в пространствах различных размерностей

Бодров Андрей Геннадьевич[1], **Никитин Алексей Антонович**[2]

[1] Отделение прикладной математики и информатики НИУ-ВШЭ, e-mail: drinob@gmail.com
[2] Кафедра общей математики, e-mail: nikitin@cs.msu.ru

В настоящей работе продолжается изучение интегрального уравнения равновесия, возникшего в работах Ульфа Дикмана (Ulf Dieckmann) и Ричарда Лоу (Richard Law) [1, 2]. На этот раз авторами рассмотрены многомерные случаи данного уравнения:

$$(b+s\omega(\overline{x}))C(\overline{x}) = \int_{R^n} bm(\overline{y})C(\overline{y}+\overline{x})d\overline{y} + \frac{b}{b-S}m(\overline{x})\int_{R^n} s\omega(\overline{y})C(\overline{y})d\overline{y}, \qquad (1)$$

где параметр n принимает значения $1, 2, 3$, а вектора $\overline{x}, \overline{y} \in R^n$. На функции ω и m наложен ряд условий, связанных с их биологической интерпретацией. Кроме того, исходя из той же биологической интерпретации, мы считаем данные функции, а также решение C — радиально-симметричными.

Авторами были рассмотрено уравнение (1) с интегральными ядрами Гаусса:

$$\omega(\overline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma_\omega|^{1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\overline{x}^T\Sigma_\omega^{-1}\overline{x}}, \quad m(\overline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma_m|^{1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\overline{x}^T\Sigma_m^{-1}\overline{x}}, \quad \overline{x} \in R^n,$$

в которых Σ_ω, Σ_m — диагональные матрицы с квадратами параметров σ_ω и σ_m на главной диагонали. Многомерные интегральные уравнения были приведены к одномерному. Тем самым данный случай был приведён к случаю, изученному в работе [3], в которой, между тем, рассматривалось одномерное уравнение (1) с гораздо более простыми интегральными ядрами, чем те, что были получены в данной работе, после приведения интегралов к однократным.

Были построены графики зависимостей первого момента от радиусов конкуренции (competition radius) и разброса потомства (dispersal radius). Интересным является результат не существования решения интегрального уравнения (1) с параметром $S \neq 0$.

Благодарности

Авторы выражают благодарность Ульфу Дикману за полезные обсуждения и внимание к работе.

Литература

1. Dieckmann U. and Law R. Relaxation (2000) projections and the method of moments. The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity. P. 412–455. Cambridge University Press.

2. Law R. and Dieckmann U. (2000). A dynamical system for neighborhoods in plant communities. Ecology. Vol. 81. P. 2137–2148.

3. Бодров А. Г., Никитин А. А. Качественный и численный анализ интегрального уравнения, возникающего в модели стационарных сообществ // Доклады академии наук. 2014. Т. 455. № 5. С. 507–511.

Математическое моделирование выработки электроэнергии солнечными батареями российского сегмента Международной космической станции

Сазонов Василий Викторович

Кафедра общей математики, e-mail: `sazonov@cs.msu.ru`

Бортовое питание российского сегмента (РС) Международной космической станции (МКС) осуществляется от аккумуляторов, которые заряжаются от солнечных батарей (СБ), установленных на служебном модуле (СМ). Фотоэлектрические панели (ФЭП), из которых состоят СБ, вырабатывают электроэнергию когда освещаются Солнцем, причем вырабатываемый ток пропорционален косинусу угла между нормалью к поверхности батареи и направлению на Солнце [1], поэтому солнечные батареи оснащены приводами, позволяющими уменьшить указанный угол.

При частичном затенении поверхности СБ, часть ФЭП становятся неосвещенными и перестают вырабатывать ток, снижая при этом мощность тока от СБ в целом. Поверхность МКС имеет сложную форму, с большим числом элементов внешней оснастки и подвижными элементами, которые могут частично или полностью затенять СБ, когда станция пролетает по участку орбиты, освещаемому Солнцем. Для определения тока, вырабатываемого СБ, необходимо определить какие части СБ освещаются Солнцем. В настоящей работе предложено решение этой задачи, основанное на методе трассировки лучей [2].

Модель внешней поверхности МКС составлена из нескольких типов геометрических примитивов: плоских четерехугольников, усеченных конусов, прямоугольных параллелепипедов и триангуляций. Триангуляцией представляются элементы конструкции сложной формы, которые получены путем импорта из САПР.

Разработано программное обеспечение, позволяющее моделировать полет МКС, точно воспроизводить ее конфигурацию, положение подвижных элементов и определять мощность СБ РС МКС в любой момент времени. Программное обеспечение разрабатывается при поддержке ОАО РКК “Энергия” имени С. П. Королева и министерства образования и науки России (грант МК-5734.2014.9).

Литература

1. Виссарионов В. И., Дерюгина Г. В., Кузнецова В. А., Малинин Н. К. Солнечная энергетика // Учебное пособие для ВУЗов. — М. : Издательские дом МЭИ, 2008.
2. Роджерс Д. Ф. Алгоритмические основы машинной графики [пер. с англ.]. М. : Мир. Редакция литературы по математическим наукам, 1989.

Краевая задача оптимального управления со связанными терминальными условиями

Хорошилова Елена Владимировна

Кафедра общей математики, e-mail: `khorelena@gmail.com`

Рассматривается задача терминального управления с линейной динамикой на фиксированном отрезке времени. Концам отрезка отвечают терминальные пространства, на декартовом произведении которых сформулирована конечномерная задача выпуклого программирования:

$$(x_0^*, x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathrm{Argmin}\{\varphi_0(x_0) + \varphi_1(x_1) \tag{1}$$

$$A_0x_0 + A_1x_1 \leq a,\ (x_0, x_1) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0^*,\ x(t_1) = x_1^*, \tag{3}$$

$$x(\cdot) \in \mathrm{AC}^n[t_0, t_1],\ u(\cdot) \in \mathrm{U}\}, \tag{4}$$

$$\mathrm{U} = \left\{ u(\cdot) \in \mathrm{L}_2^r[t_0, t_1] \mid \frac{1}{2}\|u(\cdot)\|^2_{\mathrm{L}_2^r} \leq \mathrm{C}^2 \right\}. \tag{5}$$

Две компоненты x_0, x_1 решения этой задачи, связанные неравенством (2), определяют начальное и терминальное условия для управляемой динамики. Динамика (3) трактуется как ограничение типа равенств. Управления $u(t)$ предполагаются ограниченными в норме L_2.

Требуется найти управление $u^*(\cdot) \in \mathrm{U}$ и отвечающую ему траекторию $x^*(\cdot)$, являющуюся абсолютно непрерывной функцией из $\mathrm{L}_2^n[t_0, t_1]$, такие, что левый $x_0^* = x^*(t_0)$ и правый $x_1^* = x^*(t_1)$ концы траектории являются решением конечномерной задачи выпуклого программирования. Подчеркнем, что точка x_1^*, как следует из (1)–(5), всегда принадлежит множеству достижимости управляемой динамики (3).

Предлагается седловой подход к решению рассматриваемой задачи [1], основанный на вычислении седловых точек функции Лагранжа. Для решения используется итеративный метод седлового типа. Доказывается его слабая сходимость по управлениям и сильная сходимость по фазовым и сопряженным траеториям, а также терминальным переменным.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 12-01-00783) и Программой государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-4640.2014.1).

Литература

1. Антипин А. С., Хорошилова Е. В. Оптимальное управление со связанными начальными и терминальными условиями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2014. Т. 20. № 2. С. 7–21.

СЕКЦИЯ II

Кафедра оптимального управления

Равновесность по Бержу: достаточные условия и существование

Жуковский Владислав Иосифович

Кафедра оптимального управления, e-mail: `zhkvlad@yandex.ru`

Понятие “равновесная по Бержу ситуация” появилось впервые в кандидатской диссертации К. С. Вайсмана [1] сейчас широко распространено за границей (обзор насчитывает уже свыше 60 названий).

Определение 1. *Ситуация $x^B \in X$ называется равновесной по Бержу в бескоалиционной игре N лиц при неопределенности (БИН)*

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, Y^X, \{f_i(x, y)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle,$$

если

$$f_i[x||x_i^B] \leqslant f_i[x^B] \ \ \forall x = (x_1, ..., x_N) \in X \ \ (i \in \mathbb{N}), \tag{1}$$

где гарантии $f_i[x] = \min\limits_{y(\cdot)\in Y^X} f_i(x, y) = f_i(x, y^{(i)}(x))$ $(i \in \mathbb{N})$.

Способ уравновешивания конфликтов за счет применения x^B наблюдается в семейных и родственных отношениях, религиозных общинах, филантропии, спонсорской поддержке, благотворительности и т. п.

Теорема 1 (достаточные условия). *Если* $(x^0, z^B) \in X^2$ *является седловой точкой* $\varphi(x, z) = \max\limits_{i\in\mathbb{N}}(f_i[x_i||z] - f_i[z])$*, то минимаксная стратегия* x^B *удовлетворяет (1).*

Игре Γ поставим в соответствие прежде всего “игру гарантий”

$$\Gamma_g = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i[x]\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle,$$

а затем ее смешанное расширение

$$\widetilde{\Gamma}_g = \langle \mathbb{N}, \{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i[\mu] = \int\limits_X f_i[x]\mu(dx)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle.$$

Определение 2. *Ситуацию в смешанных стратегиях* $\mu^B(\cdot) \in \{\mu\}$ *назовем равновесной по Бержу для* Γ_g*, если*

$$\max_{\mu_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}(\cdot)\in\{\mu_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}\}} f_i[\mu||\mu_i^B] = f_i[\mu^B] \ (i \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть в игре* Γ 1^o) *множества* $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbb{N})$*,* $Y = co\, Y \subset \mathbb{R}^m$ *— компакты;* 2^o) $f_i(x, y) \in C(X \times Y, \mathbb{R})$ $(i \in \mathbb{N})$ *и при каждом* $x \in X$ *строго выпуклы по* $y \in Y$*. Тогда удовлетворяющее (2) множество смешанных ситуаций* $\{\mu^B\}$ *непусто.*

Теорема 3. *При выполнении (*1^o*) и (*2^o*) существует максимальная по Слейтеру* $\overline{\mu}^B(\cdot) \in \{\mu^B\}$*, т. е. при* $\forall \mu^B(\cdot) \in \{\mu^B\}$ *несовместна система неравенств* $f_i[\mu^B] > f_i[\overline{\mu}^B]$ $(i \in \mathbb{N})$.

Литература

1. Вайсман К. С. Равновесие по Бержу : автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.09 : защищена 25.04.1995. — СПб., 1995. — 15 с.

Об одной оптимизационной задаче, связанной с управляемой моделью Солоу

Никольский Михаил Сергеевич

Кафедра оптимального управления факультета ВМК МГУ, e-mail: `mni@mi.ras.ru`

Среди многочисленных моделей математической экономики привлекают определенный интерес оптимизационные задачи, связанные с управляемой моделью Солоу (см., например, [1, 2] и др.). Настоящая работа продолжает исследования работы [2].

В нашей работе динамика управляемой системы в удельных показателях описывается одномерным нелинейным уравнением, в котором фазовой переменной является удельный капитал, а роль управления играет удельное потребление на одного работника, на которое накладываются смешанные ограничения. Управляемый процесс протекает на отрезке времени $[0, T]$ под воздействием измеримого управления и начинается из заданного начального состояния. Также фиксируется терминальное состояние управляемой системы в конечный момент T. Качество допустимого управления оценивается интегральным функционалом, описывающим дисконтированную полезность от потребления, который надо максимизировать. Таким образом, рассматривается некоторый вариант задачи об оптимальном росте для односекторной замкнутой экономической системы с конечным горизонтом управления. Большую сложность в рассмотрениях [2] вызывает наличие смешанных ограничений на управление. Непосредственное применение принципа максимума Понтрягина в форме, учитывающей смешанные ограничения на управление, вызывает большие трудности. Мы предлагаем использовать переход к новой, эквивалентной оптимизационной задаче, в которой ограничения на управление имеют традиционный вид, и дальше использовать обычный принцип максимума Понтрягина. В рассматриваемой оптимизационной задаче такой переход удобно осуществить с помощью несложной замены управления. На этом пути удалось получить простое аналитическое описание множеств достижимости исследуемого управляемого объекта и установить общие условия существования оптимального управления. Также были получены эффективные достаточные условия, обеспечивающие непрерывность оптимального управления и отсутствие особых режимов.

Благодарности

Благодарю Н. Л. Григоренко за внимание и полезные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00175-а, № 12-01-00506, № 13-01-00685, № 13-01-12446 офи-м2).

Литература

1. Колемаев В. А. Математическая экономика. М. : Юнити. 2005.
2. Анисимов А. В., Григоренко Н. Л., Лукьянова Л. Н. Задача оптимального управления для односекторной модели экономического роста со смешанными ограничениями // Прикладная математика и информатика : Труды факультета ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. М. : МАКС Пресс. № 44. 2013. С. 5–21.

Неравенства обратимости для волнового уравнения на докритических промежутках в классах слабых обобщенных решений

Иванов Денис Александрович, Потапов Михаил Михайлович

Кафедра оптимального управления, e-mail: `deniaru91@gmail.com`, `michaelpotapov@hotmail.com`

Рассматриваются задачи с различными комбинациями двусторонних граничных управлений трех основных типов для волнового уравнения вида

$$y_{tt} = y_{xx} - \theta(x)y, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l,$$

на докритических промежутках $T < T_* = l$ в классе *слабых* обобщенных решений. Требуется соответствующим выбором управлений минимизировать расстояние до заданного целевого состояния

$$y\,|_{t=T} = f^0(x), \quad y_t\,|_{t=T} = f^1(x), \quad 0 < x < l.$$

Для построения устойчивых приближенных решений таких задач с помощью вариационного метода [1] получены новые конструктивные неравенства непрерывной обратимости оператора управления. Их главным отличием от рассмотренного в [2] случая *сильных* обобщенных решений является вырождение оценочной константы при $T \to T_*$. Приводятся результаты численных экспериментов.

Литература

1. Потапов М. М. Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущенным оператором // Докл. РАН. 1999. Т. 365. № 5. С. 596–598.

2. Потапов М. М., Иванов Д. А. Задачи двустороннего граничного управления для волнового уравнения на докритических промежутках в классах сильных обобщенных решений // Тр. Ин-та Матем. и Мех. УрО РАН. 2013. Т. 19. № 4. С. 192–202.

Задачи граничного управления для волнового уравнения с терминальным эллипсоидальным множеством

Потапов Михаил Михайлович, Дряженков Андрей Александрович

Кафедра оптимального управления, e-mail: `mpotapov@tochka.ru, andrja@yandex.ru`

Для волнового уравнения вида

$$\rho(x)y_{tt} = (k(x)y_x)_x - q(x)y, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l,$$

рассматриваются задачи граничного управления, в которых, в отличие от [1], вместо точного попадания в заданные целевые состояния

$$y\,|_{\,t=T} = f^0(x), \quad y_t\,|_{\,t=T} = f^1(x), \quad 0 < x < l,$$

требуется решить задачу квадратичной минимизации на эллипсоидальном множестве

$$\|\mathcal{A}u - f\|_F \to \inf_{u\in U}, \qquad U = \big\{u \in H \;\big|\; \|\mathcal{B}u - g\|_G \leqslant R\big\}. \tag{1}$$

В качестве операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в (1) могут быть выбраны, например,

$$\mathcal{A}u = y(T,\cdot\,),\;\; \mathcal{B}u = y_t(T,\cdot\,) \quad \text{или} \quad \mathcal{A}u = y_t(T,\cdot\,),\;\; \mathcal{B}u = y(T,\cdot\,). \tag{2}$$

Для отыскания нормального решения u_* задачи (1) предложен вычислительный алгоритм, устойчивый к неравномерным возмущениям в операторах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Одним из главных условий для обоснованного применения этого алгоритма, основанного на вариационном методе [1, 2], является знание величины r из оценки $\|u_*\| \leqslant r$ нормы точного решения u_*. Для операторов вида (2) необходимые для реализации метода значения r извлекаются из оценок, полученных в [3].

Алгоритм, предложенный здесь для решения задач граничного управления, допускает обобщения на случай задач квадратичной минимизации с эллипсоидальными ограничениями в гильбертовых пространствах при определенных требованиях к операторам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Литература

1. Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Потапов М. М., Разгулин А. В. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения. — М.: Изд. отдел факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2010. — 384 с.

2. Потапов М. М. Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущённым оператором // Доклады РАН. 1999. Т. 365. № 5. С. 596–598.

3. Потапов М. М., Дряженков А. А. Оптимизация порогового момента в неравенстве наблюдаемости для волнового уравнения с краевым условием упругого закрепления // Труды МИАН. 2012. Т. 277. С. 215–229.

Исследование модели двухсекторной экономики с интегральным функционалом качества при различных коэффициентах амортизации

Киселёв Юрий Николаевич, Орлов Михаил Владимирович, Орлов Сергей Михайлович

Кафедра оптимального управления, e-mail: `kiselev@cs.msu.su, orlov@cs.msu.su, sergey.orlov@cs.msu.su`

В докладе рассматривается двумерная нелинейная задача оптимального управления на конечном отрезке времени с функционалом интегрального типа с дисконтирующим множителем. Управление в задаче двумерно и подчинено геометрическому ограничению с областью управления в форме треугольника $\{u_1 \geqslant 0,\ u_2 \geqslant 0,\ u_1 + u_2 \leqslant 1\}$.

В основе задачи лежит модель распределения ресурсов в двухсекторной экономике с производственной функцией Кобба-Дугласа. Фазовые переменные характеризуют уровень развития двух секторов экономики с различными коэффициентами амортизации. Функционал качества определяет интегральный объём потребления на заданном промежутке времени. Работа является продолжением исследований статьи [3], где рассматривались одинаковые коэффициенты амортизации. Конструктивное описание оптимального решения получено с использованием принципа максимума Понтрягина [1]. При достаточно большом горизонте планирования оптимальное решение содержит особый режим, который в фазовой плоскости можно представить в виде некоторого сингулярного луча, выходящего из начала координат, с угловым коэффициентом, зависящим от коэффициентов амортизации и параметров функции Кобба-Дугласа. При определённых естественных предположениях о параметрах задачи поведение оптимальной траектории заключается в следующем: на начальном участке времени фазовая траектория стремится к особому лучу наискорейшим образом с управлением $(1,0)$ либо $(0,1)$, затем фазовая точка, находясь на луче, удаляется от начала координат, что соответствует фазе сбалансированного экономического роста с особым управлением $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, далее следует участок, на котором выбирается граничное управление $(1,0)$ либо $(0,1)$, зависящее от соотношения между коэффициентами амортизации, и, наконец, на конечном участке времени фазовая точка движется с управлением $(0,0)$. Интересно отметить, что положительный вклад в функционал вносит лишь финальный промежуток времени, на других же участках времени соответствующий вклад равен нулю. Обоснование оптимальности построенного экстремального решения производится с привлечением теоремы [2] о достаточных условиях оптимальности в терминах конструкций принципа максимума.

Литература

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов // М.: Наука, 1961.

2. Киселёв Ю. Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Математические модели в экономике и биологии. 2003. М. : МАКС Пресс. С. 57–67.

3. Киселёв Ю. Н., Орлов М. В., Орлов С. М. Исследование двухсекторной экономической модели с функционалом интегрального типа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2013. № 4. С. 27–37.

Об оценивании числа переключений оптимальных управлений для модели распространения эпидемии

Хайлов Евгений Николаевич[1], **Григорьева Эллина Валерьевна**[2]

[1] Кафедра оптимального управления, e-mail: khailov@cs.msu.su

[2] Техасский женский университет, США, e-mail: egrigorieva@twu.edu

На заданном отрезке времени $[0, T]$ рассматривается нелинейная управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = (\sigma - \mu)N(t) - \delta I(t), \\ \dot{S}(t) = \sigma N(t) - u_2(t)S(t)I(t)N^{-1}(t) - u_1(t)S(t), \\ \dot{I}(t) = u_2(t)S(t)I(t)N^{-1}(t) - u_3(t)I(t), \\ N(0) = N_0,\ S(0) = S_0,\ I(0) = I_0;\ N_0 > 0,\ S_0 > 0,\ I_0 > 0,\ S_0 + I_0 < N_0, \end{cases}$$

которая описывает распространение эпидемии в популяции переменного размера $N(t)$. Здесь $S(t)$ — количество здоровых особей, $I(t)$ — количество заразившихся переносчиков болезни, $R(t) = N(t) - S(t) - I(t)$ — количество выздоровевших особей; σ — уровень рождаемости, μ – уровень естественной смертности, δ — уровень смертности, связанный с болезнью. Кроме того, $u_1(t)$, $u_3(t)$, $u_2(t)$ — управляющие функции, описывающие вакцинацию, лечение и проведение других непрямых эпидемиологических мероприятий. Множество допустимых управлений образуют всевозможные измеримые по Лебегу функции $u_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, которые при почти всех $t \in [0, T]$ удовлетворяют ограничениям: $0 < u^i_{\min} \leq u_i(t) \leq u^i_{\max}$, $i = \overline{1,3}$. Показано, что при любых допустимых управлениях $u_i(t)$, $i = \overline{1,3}$ соответствующие решения $N(t)$, $S(t)$, $I(t)$ исходной системы определены на всем отрезке $[0, T]$ и ограничены. Для изучаемой системы на множестве допустимых управлений рассматривается задача минимизации количества заразившихся переносчиков болезни в конечный момент времени T:

$$I(T) \to \min_{u_1(\cdot), u_2(\cdot), u_3(\cdot)}.$$

В такой задаче существуют оптимальные управления $u^*_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, для анализа которых применяется принцип максимума Понтрягина. Рассматриваются такие значения параметров σ, μ, δ, $u^i_{\min}$, $u^i_{\max}$, $i = \overline{1,3}$ исходной системы, для которых управления $u^*_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, определяемые из принципа максимума Понтрягина, являются кусочно-постоянными функциями, принимающими значения $\{u^i_{\min}; u^i_{\max}\}$, $i = \overline{1,3}$. Оценивание числа переключений этих управлений связано с оценкой числа нулей соответствующих функций переключений $L_{u_i}(t)$, $i = \overline{1,3}$. Каждая функция $L_{u_i}(t)$ и отвечающие ей вспомогательные функции $G_{u_i}(t)$, $P_{u_i}(t)$, $i = \overline{1,3}$ удовлетворяют линейной неавтономной системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{L}_{u_i}(t) = \gamma^i_{11}(t)L_{u_i}(t) + \gamma^i_{12}(t)G_{u_i}(t) + \gamma^i_{13}(t)P_{u_i}(t),\ t \in [0, T], \\ \dot{G}_{u_i}(t) = \gamma^i_{21}(t)L_{u_i}(t) + \gamma^i_{22}(t)G_{u_i}(t) + \gamma^i_{23}(t)P_{u_i}(t), \\ \dot{P}_{u_i}(t) = \gamma^i_{31}(t)L_{u_i}(t) + \gamma^i_{32}(t)G_{u_i}(t) + \gamma^i_{33}(t)P_{u_i}(t), \end{cases}$$

где $\gamma^i_{jk}(t)$ для $i,j,k=\overline{1,3}$ — известные кусочно-непрерывные функции и $\gamma^1_{13}(t)=0$. Оценка числа нулей функции переключений $L_{u_1}(t)$ опирается на возможность приведения на отрезке $[0,T]$ соответствующей матрицы линейной системы к почти диагональному виду. Оценивание числа нулей функций $L_{u_i}(t)$, $i=2,3$ связано с построением для этих функций соответствующих линейных неавтономных дифференциальных уравнений и последующим применением к ним теоремы Валле-Пуссена.

Задача сопровождения для линейных систем второго порядка

Лукьянова Лиля Николаевна[1], **Румянцев Алексей Евгеньевич**[2]

[1] Лаборатория обратных задач, e-mail: lln@cs.msu.su

[2] Кафедра оптимального управления, e-mail: rumiantcev@gmail.com

Рассматривается движение двух векторов $x\in R^n$ и $y\in R^n$, описываемое уравнениями:

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}=u(t),\ x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0,\ \ \ddot{y}+\beta\dot{y}=v(t),\ y(0)=y_0,\ \dot{y}(0)=\dot{y}_0. \tag{1}$$

Здесь $u(t)\in R^n:||u(t)||\leqslant\rho$ — управление первого игрока, $v(t)\in R^n:||v(t)||\leqslant\sigma$ — управление второго игрока, α,β,ρ,σ — положительные константы. Второй игрок выбирает произвольное, измеримое по Лебегу, управление $v(t):\ ||v(t)||\leqslant\sigma$. Первый игрок, осуществляющий процесс игрового сопровождения второго игрока, в момент времени t, располагает информацией о $\{v(s),\ s\in[0,t]\},\ \ y(t),\dot{y}(t),u(t),x(t),\dot{x}(t)$ и уравнениях (1). В момент t, будущее управление второго игрока первому игроку неизвестно. Процесс сопровождения состоит из трех этапов. *Первый этап* процесса сопровождения оканчивается, если в некоторый конечный момент времени T_1 выполнены условия “мягкой встречи”: $x(T_1)=y(T_1)+\ell,\ \dot{x}(T_1)=\dot{y}(T_1)$. *Второй этап* процесса сопровождения состоит в выборе первым игроком управления, обеспечивающего для $t\in[T_1,T_2]$ соотношение: $x(t)=y(t)+\ell,\ \dot{x}(t)=\dot{y}(t)$. Здесь ℓ - фиксированный вектор R^n, T_2 — момент окончания второго этапа, $T_2>T_1$. *Третий этап* процесса сопровождения заключается в нахождении управления первого игрока, переводящего фазовый вектор первого игрока в заданную конечную позицию $x(T_3)=x_3,\ \dot{x}(T_3)=\dot{x}_3,\ T_3>T_2$. Рассматривается задача о нахождении соотношений на параметры игры, при которых существует управление первого игрока, гарантирующее реализацию трех этапов процесса сопровождения. Задача сопровождения для двух игроков рассматривалась в работах [1–5]. В работах [4–5], предполагалось, что на первом этапе процесса сопровождения, в процессе реализации мягкой встречи, объекты не сталкиваются (например движутся в разных плоскостях). В настоящем докладе приведено соотношение на параметры и позиционное контруправление [1] первого игрока обеспечивающие мягкую встречу со вторым игроком и гарантирующее избежание столкновения [3] с ним при любых допустимых управлениях второго игрока. Приводятся результаты численного моделирования.

Литература

1. Осипов Ю. С., Избранные труды. — М.: Издательство МГУ, 2009. — 656 с.

2. Батенко А. П., Управление конечным состоянием движущихся объектов. — М.: “Советское радио”, 1977. — 256 с.

3. Лукьянова Л. Н., Задача уклонения от столкновения: Линейная теория и приложения. — М. : Изд. отдел факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2009. — 216 с.

4. Зонневенд Д. Об одном типе превосходства игрока // ДАН СССР. 1973. Т. 208. № 3. С. 520–523.

5. Григоренко Н. Л., Лукьянова Л. Н., Румянцев А. Е. Игровая задача сопровождения для двух линейных систем второго прядка // Проблемы динамического управления: Сборник научных трудов факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. 2012. Вып. 6. С. 160–188.

Об одном классе игровых задач терминального управления

Григоренко Николай Леонтьевич, Анисимов Александр Владимирович

Кафедра оптимального управления, e-mail: `grigor@cs.msu.su, alexx91@mail.ru`

Рассматривается задача терминального управления для дифференциальной игры двух групп игроков: первой группы из m управляемых объектов и второй группы из двух управляемых объектов [1–5]. Пусть движение векторов $z_{ij} \in R^n$ описывается уравнениями

$$\dot{z}_{ij}(t) = A_{ij}z_{ij}(t) + B_{ij}u_i(t) - C_{ij}v_j(t),\ z_{ij}(0) = z^0_{ij},\ i = 1, ..., m,\ j = 1, 2, \qquad (1)$$

где $u_i(t) \in P_i \subset R^p$, $||u_i(t)||_{L_2} \leqslant \mu$, $v_j(t) \in Q_j \subset R^q$, $||v_j(t)||_{L_2} \leqslant \nu$, $t \in [t_0, \infty]$. $A_{ij} - n \times n$, $B_{ij} - n \times p$, $C_{ij} - n \times q$, матрицы, u_i, v_j — параметры управлений i-го игрока 1-ой группы и j-го игрока 2-ой группы, P_i, Q_j — выпуклые компакты. Игрок первой группы с номером i распоряжается выбором вектора $u_i(t)$, где $u_i(t) \in P_i$ — измеримая функция для $t \geqslant t_0$. Игрок второй группы с номером j распоряжается выбором $v_j(t) \in Q_j$ — измеримой функции для $t \geqslant t_0$. Терминальные множества $M_{ij} \in R^n$ имеют вид $M_{ij} = M^1_{ij} + M^2_{ij}$ [1–4], где M^1_{ij} — линейные подпространства из R^n, M^2_{ij} — выпуклые компакты из L^1_{ij}, L^1_{ij} — ортогональное дополнение к M^1_{ij} в R^n. Игра начинается в момент $t = t_0$ и считается оконченной, если найдутся номера $i_1, i_2 \in \{1, ..., m\}$ и конечные времена $t_1 \geqslant t_0$, $t_2 \geqslant t_0$, такие что $z_{i_1 1}(t_1) \in M_{i_1 1}(t_1)$, $z_{i_2 2}(t_2) \in M_{i_2 2}(t_2)$. Цель игроков первой группы — окончить игру за возможно меньшее время, цель игроков второй группы противоположна.

Задача терминального управления для дифференциальной игры группы из m управляемых объектов и группы из двух управляемых объектов — формулируется следующим образом. Найти начальные состояния $z^0 = (z^0_{11}, \ldots, z^0_{m1}, z^0_{12}, \ldots, z^0_{m2})$ для которых существует такая стратегия терминального управления [4–5] игроков первой группы, что при любых стратегиях игроков второй группы найдутся номера $i_1, i_2 \in \{1, ..., m\}$, такие, что в некоторые конечные моменты времени решения уравнения (1) с индексами i_1, i_2 при так выбранных управлениях придут на терминальные множества $M_{i_l j}$, $M_{i_2 q}$ соответственно, где $q = \{1, 2\} \setminus j$.

В докладе приведена теорема о достаточных условиях существования решения задачи терминального управления в игре двух групп управляемых объектов: первой группы из m управляемых объектов и второй группы из двух управляемых объектов. Рассмотрены модельные примеры. Для игры с простыми движениями [2–4], в случае четырех игроков первой группы и двух игроков второй группы при равных ограничениях на управления игоков, приведена терема о необходимых и достаточных условиях существования решения игры терминального управления.

Литература

1. Понтрягин Л. С. Избранные труды. — М.: МАКС Пресс, 2004. — 552 с.

2. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985. — 518 с.

3. Осипов Ю. С. Избранные труды. — М.: Издательство МГУ, 2009. — 656 с.

4. Никольский М. С. Некоторые линейные задачи управления // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. Издательство МГУ, 2010. С. 14–21.

5. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М.: Издательство МГУ, 1990. — 197 с.

СЕКЦИЯ III

Кафедра исследования операций

Метод решения матричных игр специального вида

Морозов Владимир Викторович, Шалбузов Камиль Джавидович

Кафедра исследования операций, e-mail: `vmorosov@mail.ru, kshalbuzov@gmail.com`

Решение матричных игр в смешанных стратегиях чаще всего сводится к решению задачи линейного программирования. Но в случае, когда матрица игры $A = (a_{ij})_{m\times n}$ имеет астрономическое размеры, указанный прием неприменим. В докладе рассматривается специальный класс матриц, для которых существует быстрый алгоритм нахождения для любой заданной смешанной стратегии p (q) первого (второго) игрока наилучшей чистой стратегии второго (первого) игрока $j \in J(p)$ $(i \in I(q))$, где $J(p) = \{j|(pA)_j = \underline{v}(p) = \min_{j=1,\dots,n}(pA)_j\}$, $I(q) = \{i|(Aq)_i = \overline{v}(q) = \max_{i=1,\dots,m}(Aq)_i\}$.

Предлагается следующий алгоритм приближенного решения матричной игры. Пусть задано $\varepsilon > 0$, а к k-му шагу сформированы подмножества I^k и J^k чистых стратегий первого и второго игроков (на первом шаге их можно выбрать произвольными). Решается подыгра с матрицей $A^k = (a_{ij})_{i\in I^k,\, j\in J^k}$ и для оптимальной стратегии p^k первого игрока выбирается любая чистая стратегия $j_k \in J(p^k)$. Затем решается подыгра с матрицей $B^k = (a_{ij})_{i\in I^k,\, j\in J^{k+1}}$, где $J^{k+1} = J^k \cup \{j_k\}$. Пусть в этой подыгре q^k — оптимальная смешанная стратегия второго игрока. Определим наилучшие верхнюю и нижнюю оценки значения игры $\overline{v}^k = \min_{t=1,\dots,k} \overline{v}(q^t) = \overline{v}(q^{t_1})$ и $\underline{v}^k = \max_{t=1,\dots,k} \underline{v}(p^t) = \underline{v}(p^{t_2})$. Далее проверяется неравенство $\overline{v}^k - \underline{v}^k \leqslant \varepsilon$. Если оно выполнено, то величина $(\overline{v}^k + \underline{v}^k)/2$ является ε-приближением для значения игры v, а p^{t_2} и q^{t_1} — ε-оптимальными стратегиями. Если $\overline{v}^k - \underline{v}^k > \varepsilon$, то выбирается любая чистая стратегия $i_k \in I(q^k)$, формируется подматрица $A^{k+1} = (a_{ij})_{i\in I^{k+1},\, j\in J^{k+1}}$, где $I^{k+1} = I^k \cup \{i_k\}$, и осуществляется переход к $(k+1)$-му шагу.

В частном случае данный алгоритм использовался в [1]. Перечисляются следующие матричные игры, где алгоритм может быть применен: дискретный вариант модели “нападение-оборона” [1], игра фермера против природы [2], игра, описывающая конкуренцию двух фермерских хозяйств [3], модель противодействия двух сторон на нескольких пунктах. Последние три модели относятся к играм, в которых стратегиями игроков являются перестановки последовательностей вида $1, \dots, m$. В [3] игра решалась методом Брауна-Робинсон [4]. В докладе для указанных игр будут приведены результаты численного сравнения предложенного алгоритма с алгоритмом Брауна-Робинсон.

Литература

1. Морозов В. В., Шалбузов К. Д. О решении дискретной игры распределения ресурсов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2014. № 2. С. 10–16.

2. Емец О. А., Устьян Н. Ю. Игры с комбинаторными ограничениями // Кибернетика и системный анализ. 2008. № 4. С. 134–141.

3. Емець О. О., Ольховська О. В. Розв’язування комбінаторних задач ігрового типу з обмеженнями-переставленнями у обох гравців: ітераційний метод // Системні дослідження та інформаційні технології. № 4. С. 80–93.

4. Робинсон Дж. Итеративный метод решения игр // Матричные игры. Сборник статей под. ред. Н. Н. Воробьева. М. : Физматгиз. 1961. С. 110–118.

Двухузловой рынок. Оптимизация системы перемещения товара

Васин Александр Алексеевич, Дайлова Екатерина Александровна

Кафедра исследования операций, e-mail: vasin@cs.msu.su, e.daylova@gmail.com

Для рынков однородных товаров, в том числе электроэнергии, характерна сетевая структура, при которой потребители и производители расположены в разных узлах. Система перемещения товара между рынками характеризуется коэффициентом потерь и пропускной способностью. В [1, 2] получены методы расчета конкурентного равновесия для сетевого рынка. В [3] рассмотрен двухузловой рынок в условиях несовершенной конкуренции и определены возможные типы равновесий Нэша для конкуренции по Курно.

Нами исследована модель двухузлового рынка с едиными узловыми ценами в условиях совершенной конкуренции. Каждый узел описывается множеством производителей и функцией спроса. Оптимальная заявка фирмы-производителя соответствует Вальрасовской функции предложения. Системный оператор действует так, как если бы на рынке присутствовало множество посредников, перемещающих товар с одного рынка на другой, пока это выгодно. При этом либо узловые цены удовлетворяют соотношению, при котором дальнейшее перемещение товара невыгодно, либо достигается максимум пропускной способности.

Проведен анализ равновесия в зависимости от пропускной способности системы перемещения товара. Показано, что существует пороговое значение пропускной способности, до достижения которого ограничение пропускной способности активно, а при значениях выше порогового поток стабилизируется и ограничение пропускной способности становится неактивным.

Исследована задача поиска оптимальной пропускной способности с точки зрения общего благосостояния, равного суммарному выигрышу участников рынка и состоящего из следующих компонент: прибыли производителей и сюрпласа потребителей на каждом из рынков, а также прибыли сетевой системы. При этом учтены затраты на создание системы перемещения товара между узлами. Предложена методика нахождения оптимальной пропускной способности системы с точки зрения общего благосостояния.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-91163 ГФЕН_а).

Литература

1. Давидсон М. Р. и др. Математическая модель конкурентного оптового рынка электроэнергии в России // Известия Академии Наук. Теория и системы управления. 2004. № 3. С. 72–83.

2. Hogan W. Competitive electricity market design: a wholesale primer // Harvard University, WP. 1998.

3. Vasin A., Vasina P. Electricity markets analysis and design // Working Paper 2006/053. Moscow, New Economic School.

Моделирование баланса доходов и расходов российского населения

Вржещ Валентин Петрович[1], Санникова Ирина Владимировна[2]

[1] Кафедра исследования операций, e-mail: valentin.vrzheshch@gmail.com
[2] ФУПМ, МФТИ, e-mail: lardgin@gmail.com

В работе представлена межвременная модель макроэкономического агента Домохозяйство, который решает задачу максимизации дисконтированной полезности по управляющим переменным остатков наличных денег и валюты, банковских депозитов и кредитов, покупок импортных и внутренних товаров как длительного пользования, так и текущего потребления. Основным достоинством модели является возможность моделировать одновременно кредиты и депозиты, что достигается за счет предположения о покупках товаров длительного пользования за счет нетто-кредитов. Такой подход основывается на особенностях статистики баланса доходов и расходов российских домохозяйств, которые позволяют выдвигать очень сильные предположения о поведении домохозяйств как отдельного рационального макроэкономического агента. Для моделирования как положительных нетто-кредитов, так и положительных нетто-депозитов были введены запасы импортных и внутренних товаров, выбытие которых входит в функцию полезности макроагента наравне с текущими покупками импортных и внутренних благ. Отдельно введены валютные остатки, прирост которых с 1999 г., по данным Центрального банка, составил порядка 180 млрд. долл. США. Несмотря на относительно простую постановку задачи, введение запасов и их использование в функции полезности приводит к довольно непростой численной задаче, которую удается идентифицировать по 10 настроечным параметрам, часть из которых являются параметрами ограничений ликвидности или нормирующими константами. Традиционные подходы моделируют домохозяйства набором агентов различных видов (одни владеют депозитами, другие привлекают кредиты) либо в постоянных пропорциях, либо динамическим распределением. Однако российская статистика позволяет сделать сильные предположения, которые дают перейти к моделированию одного макроагента Домохозяйство, одновременно владеющего депозитами и привлекающего кредиты.

Теоретико-игровой анализ правил ранжирования рекламодателей в геопозиционных аукционах

Блинов Никита Глебович, Новикова Наталья Михайловна

Кафедра исследования операций, e-mail: nikita.blinov@gmail.com, nnovik@ccas.ru

Геопозиционные аукционы являются логическим развитием позиционных аукционов [1, 2] — механизма распределения рекламных позиций в ответе поисковой системы на заданный пользователем запрос. Особенность геопозиционных аукционов заключается в том, что рекламодателями являются организации, имеющие физический адрес. Таким образом, в параметры системы относительно изученных ранее позиционных аукционов добавляются такие сущности, как координаты рекламодателя и область запроса пользователя.

Перейдем к более конкретному описанию процесса. Рекламодатели делают ставку — декларируют сумму, которую они готовы заплатить поисковой системе за одно целевое действие (например, переход на их сайт или бронирование столика). Также рекламодатели указывают, на каком уровне карты они хотят демонстрировать свои рекламные объявления. Например, организация может не хотеть рекламироваться, когда пользователь ищет на уровне всего города, но готова это делать, когда поиск проходит в ее районе. На основе ставок всех претендентов поисковая система определяет, чьи рекламные объявления попадут на страницу для данного запроса и данного уровня карты, и на какую позицию.

Приведем описание параметров модели: пусть N — число рекламных позиций, одинаковое для любого уровня карты; J — число различных уровней карты; K_j, $j \in (1, \dots, J)$ — число рекламодателей, участвующих в аукционе для уровня карты j, $K_j > N$ $\forall j \in (1, \dots, J)$; $s_{k,j}$ — полезность клика для рекламодателя k при уровне карты j; b_k — ставка игрока k; $b = (b_1, \dots, b_K)$ — вектор ставок рекламодателей; $i = \pi_{k,j}(b)$ — позиция игрока k после ранжирования поисковикой системой на уровне карты j; $\alpha_{i,j}$ — отношение количества переходов по объявлениям на данной позиции при данном уровне карты к числу показов (CTR позиции i); $U_{k,j}(b) = u_{k,j}(b, \pi_{k,j}(b)) = \alpha_{i,j} s_{k,j} - p_{i,j}(b)$ — выигрыш игрока k, занимающего позицию i при уровне карты j, где $p_{i,j}$ — платеж игрока, находящегося на позиции i при уровне карты j, вид которого зависит от конкретной схемы аукциона. Функция выигрыша игрока представляет собой сумму его выигрышей по всем уровням карты с некоторым коэффициентом, вид которого также зависит от конкретной схемы аукциона.

В работе предложено и формализовано в терминах теории игр понятие геопозиционного аукциона. Предложена классификация данных типов аукционов, а также проведено исследование их на равновесия. В качестве базовой схемы аукциона рассмотрены схема Викри-Кларка-Гроувза и схема с поэтапным аукционом.

Литература

1. Benjamin Edelman, Michael Ostrovsky, Michael Schwarz. Internet Advertising and the Generalized Second Price Auction: Selling Billions of Dollars Worth of Keywords. American Economic Review, v. 97(1), March 2007, pp. 242-259.

2. Benjamin Edelman, Michael Ostrovsky. Strategic Bidder Behavior in Sponsored Search Auctions Decision Support Systems, v. 43(1), February 2007, pp. 192-198.

Оценка деривативов на дискретном рынке

Соловьев Алексей Игоревич

Кафедра исследования операций, e-mail: `alex.solo.88@mail.ru`

Большое распространение в настоящее время получила задача эффективной аппроксимации реальных финансовых рынков рынками с конечным числом состояний. Цель такой аппроксимации — построение оценок стоимости обязательства с применением методов математического программирования. Состояние рынка характеризуется вектором стоимостей ценных бумаг, среди которых несколько рисковых. Торги происходят в детерминированные моменты времени. В каждый момент времени число состояний рынка конечно, но это число допускается достаточно большим для лучшей аппроксимации реального рынка.

В работе [1] обобщена классическая дискретная модель Кокса-Росса-Рубинштейна для случая двух рисковых активов, модель рынка описана в виде трёхмерного дерева сценариев.

В данной работе число рисковых бумаг считается произвольным, учитываются переменные темпы роста и корреляции стоимостей бумаг. Считается, что распределение стоимости каждой рисковой ценной бумаги подчинено логнормальному закону. Целесообразность использования логарифмической модели приводится в монографии [2] и объясняется лучшей сходимостью к непрерывной модели. В представленной работе показана взаимосвязь стоимости рыночного портфеля и относительного изменения базового фондового индекса.

Литература

1. Boyle, Phelim P. A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables // Journal of Financial and Quantitative Analysis. I(23). 1988. P. 1–12.
2. Fernholz E. R. Stochastic portfolio theory // New York: Springer-Verlag, 2002. 177 p.

Построение кусочно-линейной системы мотивации для нескольких классов игроков

Коновалов Илья Олегович, Белянкин Георгий Андреевич, Суетина Елена Николаевна

Кафедра исследования операций, e-mail: `i.o.konovalov@gmail.com, gbelyank@mail.ru, suetina.lena@gmail.com`

Различные мотивационные схемы имеют широкое применение в современных рыночных условиях. С целью повышения собственной прибыли компании пытаются стимулировать своих работников на увеличение их трудовой активности. Системы бонусов и поощрений делают связь между доходами сотрудника и его эффективностью более наглядной. Так, чем больше товара реализует сотрудник отдела продаж или чем больше деталей произведет рабочий на заводе, тем больше будет их премия. В рамках данной работы система мотиваций рассматривалась в виде игры, где работодатель и работники стремятся максимизировать свои функции выигрыша. Стратегией для работодателя является выбор параметров схемы мотвации, а именно двух пороговых значений, с одного из которых начинаются дополнительные выплаты сотруднику, а при достижении второго работник получает свой максимально возможный бонус. В свою очередь, работники, исходя из этих параметров, решают, сколько они будут работать (или контексте продаж, какое количество продукции сотрудник отдела собирается реализовать). При этом в системе таже учитывается “неудовольствие” сотрудника, которое тем больше, чем больше ему приходится работать. Следует отметить, что игра рассматривалась с точки зрения работодателя, то есть максимизации его функции выигрыша. Работа над исследованием мотивационной системы велась в несколько этапов и началась с рассмотрения наиболее простого варианта с одним работником, после игра была решена для двух, и затем расширена на N работников. На первом этапе была рассмотрена игра Г1 двух лиц, работодателя и одного работника, и было получено аналитическое решение задачи, то есть найдены такие значения параметров системы мотивации, являющихся стратегией работодателя, что выигрыш работодателя максимален. На втором этапе была проведена аналогичная работа, но рассматривался уже более сложный случай двух работников. Данный этап показал всю сложность и практическую невозможность приведения аналитического решения в общем случае. Далее была составлена общая задача с N работниками, каждый из которых харатеризуется собственным коэффициентом в функции “неудовольствия”. Коэффициенты имеют равномерное распределение. Наилучшие значения параметров системы мотивации для работодателя находятся с помощью программы, написанной в Wolfra Mathemaica. Также была получена зависимость количества мотивированных сотрудников от параметров системы. Исследованная модель является математической формализацией системы мотивации сотрудников отделов продаж. Поэтому полученные результаты могут иметь широкое применение в оптимизации уже существующих систем в различных компаниях.

Литература

1. Васин А. А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики. — М. : Макс-пресс, 2005. 278 с.

2. Васин А. А., Краснощеков П. С., Морозов В. В. Исследование операций. — М. : Издательский центр “Академия”, 2008. 464 с.

Анализ чувствительности модели оптимизации дивидендных выплат

Денисов Дмитрий Витальевич, Некрасова Ольга Валерьевна

Кафедра Исследования Операций, e-mail: `dvden@cmc.msu.ru, necros_0889@mail.ru`

В работе исследовалась дискретная оптимизационная модель финансового состояния страховой компании с учетом следующих обозначений: s — начальный капитал, c — поток премий, поступающих в единицу времени по контрактам, заключенным в данной страховой компании, X_t — случайные неотрицательные величины, характеризующие агрегированные размеры убытков, произошедших в течение t-го временного периода.

По результатам закрытия t-го отчетного периода в начале следующего $t+1$-го временного периода принимается решение о возможности проведения дивидендных выплат $d(t)$, $t \geqslant 0$.

При необходимости ограничения страхового риска и повышения надежности деятельности цедент заключает договор с перестраховочной компанией, оставляя в ответственности компании часть риска в размере $g(t) = g\left(X_t\right)$.

В модели учитываются ограничения на вероятность разорения при конечном горизонте планирования T_{fin} и используется квантильный критерий нахождения параметров модели, при которых вероятность разорения заключена в доверительный интервал $\psi^d_{re}(s) \leqslant \alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$:

$$\psi^d_{re}(s) = P\left\{\tau^d_{re} \leqslant T_{\text{fin}}\right\}$$

Таким образом исследуется чувствительность решения оптимизационной задачи выбора пары стратегий — перестрахования и выплаты дивидендов, при которых суммарное дисконтированное значение выплаченных дивидендов на конечном горизонте планирования T_{fin} будет максимальным, в зависимости от входных параметров задачи:

$$T = \begin{cases} \tau_{re}^d, & \text{если } \tau_{re}^d \leqslant T_{fin}; \\ T_{fin}, & \text{если } \tau_{re}^d > T_{fin} \end{cases}$$

$$u(s,\alpha) = E\left[\sum_{t=0}^{T-1} v^t d(t)\right] \longrightarrow \max_{d(t)\ ,g(t)\ ,\ t\in[0,T]\ ,\ \psi_{re}^d(s)\leqslant\alpha\ ,\ 0<\alpha\leqslant 1}$$

Литература

1. Dickson D.C.M., Waters H. R. Some optimal dividends problems // ASTIN Bulletin. 2004. № 34. C. 49–74.
2. Gerber H.U., Shiu E.S.W. Optimal dividends: analysis with Brownian motion // North American Actuarial Journal. 2004. T. 8. № 1. C. 1–20.
3. Dickson D.C.M., Drekic S. Optimal dividends under a ruin constraint // Annals of Actuarial Science. 2006. № 1. C. 291–306.
4. Hipp C. Stochastic control with application in insurance. Stochastic methods in finance // Lecture Notes in Math. 2004. C. 127–164.

СЕКЦИЯ IV

Кафедра математической физики

Математическое моделирование на супер ЭВМ морских электромагнитных зондирований

Барашков Игорь Сергеевич[1], **Дмитриев Владимир Иванович**[2]

[1] Лаборатория математической физики, e-mail: `baraskov@cs.msu.ru`
[2] Кафедра математической физики, e-mail: `dmitriev@cs.msu.ru`

В настоящее время ведется активная разведка залежей углеводородов в шельфовой зоне морей. В этих работах используются электромагнитные зондирования. Математическая модель представляет собой двухслойную среду при $z > 0$ с электропроводностью σ_1 (море) и σ_2, $\sigma_2 < \sigma_1$ (подстилающее основание). В нижнем полупространстве находится неоднородность (залежи углеводородов) с малой электропроводностью σ_T, $\sigma_T \ll \sigma_2$. Источником поля является электрический диполь, погруженный в море, а приемник находится вблизи морского дна. Из уравнений Максвелла следует, что электромагнитное поле вычисляется по формулам

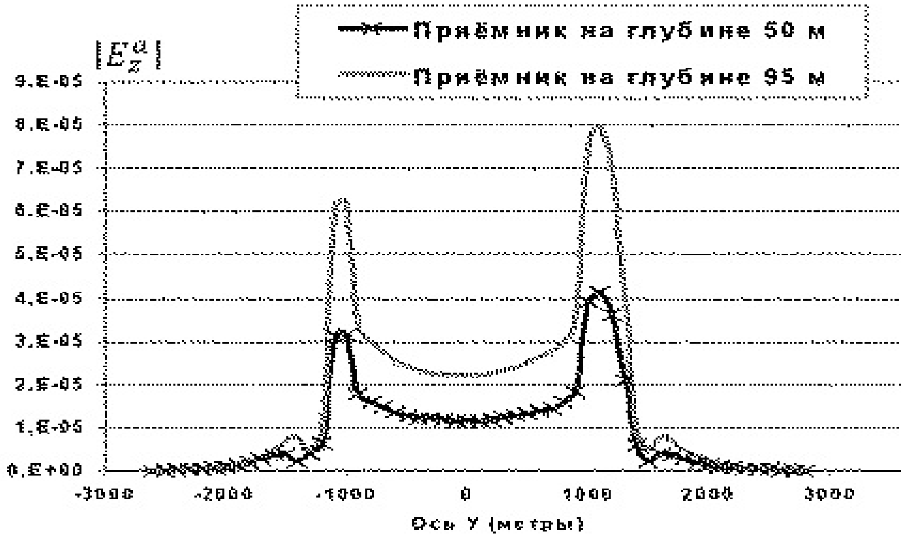
$$\vec{E}(M) = \vec{E}^N(M) + \int_V \hat{G}_E(M, M_0)\vec{j}(M_0)dv_{M_0},$$

$$\vec{H}(M) = \vec{H}^N(M) + \int_V \hat{G}_H(M, M_0)\vec{j}(M_0)dv_{M_0},$$

где $\hat{G}_E$ и $\hat{G}_H$ — тензора Грина электрического и магнитного типов, $\vec{j}(M) = (\sigma_T - \sigma_2)\vec{E}$ — избыточный ток в неоднородности, а $\vec{E}^N$, $\vec{H}^N$ — нормальные поля источника в слоистой среде. Ток $\vec{j}(M)$ находится из интегрального уравнения

$$\vec{j}(M) - (\sigma_T - \sigma_2)\int\limits_V \hat{G}_E(M, M_0)\vec{j}(M_0)dv_{M_0} = (\sigma_T - \sigma_2)\vec{E}^N.$$

Так как уравнение трехмерное векторное, то интегральное уравнение сводится к системе линейных алгебраических уравнений очень высокого порядка, поэтому для его решения используется супер ЭВМ.



На рисунке приведены графики вертикальной компоненты электрического поля измеренной на глубине 50 и 95 метров при общей глубине моря 100 метров. Легко видеть, что в окрестности края неоднородности $|E_z^a|$ имеет резкие максимумы, что позволяет оконтуривать залежь углеводородов.

Численный анализ обусловленности двумерной задачи электроимпедансной томографии

Гаврилов Сергей Вадимович

Кафедра математической физики, e-mail: `gvrlserg@gmail.com`

Рассматривается задача электроимпедансной томографии в ограниченной двумерной области с кусочно-постоянным коэффициентом электрической проводимости, значения которой считаются известными [1]. Обратная задача состоит в поиске границы, разделяющей области с разной электропроводностью. Исходной информацией являются условия Дирихле и Неймана на внешней границе области.

Рассмотрим односвязные ограниченные области на плоскости Ω и Ω_1 с границами Γ_0 и Γ_1 соответственно, причем $\overline{\Omega}_1 \in \Omega$. Кривые Γ_0 и Γ_1 достаточно гладкие. Обозначим через Ω_0 область $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_1$.

Пусть функция $u(M)$, такова что: $u \in C(\overline{\Omega})$, $u(M) = u_i(M)$, $M \in \Omega_i$ $(i = 0, 1)$, где

$u_i \in C^2(\Omega_i) \cap C^1(\overline{\Omega}_i)$ $(i = 0, 1)$,

$$\Delta u_i(M) = 0, \quad M \in \Omega_i, \quad i = 0, 1, \tag{1}$$

$$u_0(M) = u_1(M), \quad M \in \Gamma_1, \tag{2}$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0(M)}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial u_1(M)}{\partial n}, \quad M \in \Gamma_1, \tag{3}$$

$$u_0(M) = f(M), \quad M \in \Gamma_0. \tag{4}$$

Здесь σ_0, σ_1 — заданные положительные постоянные, а $f(M)$ — функция, непрерывная и не постоянная на Γ_0.

Сформулируем задачу электроимпедансной томографии. Пусть в краевой задаче (1)–(4) кривая Γ_0, постоянные σ_0, σ_1 и функция $f(M)$ на Γ_0 заданы, а кривая Γ_1 неизвестна. Требуется определить Γ_1, если задана дополнительная информация о решении $u(M)$ задачи (1)–(4):

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n} = g(M), \quad M \in \Gamma_0, \tag{5}$$

где $g(M)$ известная функция, непрерывные на Γ_0, а n — нормаль к Γ_0.

Проведен анализ обусловленности сформулированной обратной задачи на основе серии вычислительных экспериментов, в которых неизвестная граница Γ_1 ищется в классе кривых, зависящем от конечного числа параметров. Вычислительные эксперименты выполнены для различных функций $f(M)$ в условии (4), а также для задачи, в которой для определения неизвестной границы используется несколько пар условий Дирихле и Неймана аналогичных (4) и (5) (см. [2]).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 14-01-00244)

Литература

1. Гаврилов С. В., Денисов А. М. Итерационный метод решения трехмерной задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости и одного измерения на границе. Ж.вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 8. С. 1426–36.

2. Гаврилов С. В., Денисов А. М. Численные методы определения границы неоднородности в краевой задаче для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. т.51. № 8. с.1476 - 89.

Дифракция электромагнитной волны на треугольной металлической пластине

Ильинский Анатолий Серафимович

Кафедра математической физики, e-mail: `celd@cs.msu.su`

Настоящий доклад посвящен результатам реализации численного метода расчета распределения тока на тонкой металлической пластине в трехмерном пространстве.

В качестве основного объекта исследования выбрана треугольная пластина, для которой проводились измерения обратного поперечника рассеяния на измерительном комплексе ИРЭ РАН. С вычислительной точки зрения объект рассеяния электромагнитной волны представляет определенные трудности. Треугольная пластина ориентирована произвольно по отношению направления падения плоской волны. В зависимости от ориентации наводимые на пластине токи меняются очень заметно. Однако при любой ориентации имеют место особенности поведения наведенных токов на кромках и в угловых точках.

Основное содержание доклада состоит в демонстрации нового метода численного решения интегрального уравнения для неизвестного вектора тока, наведенного на пластине, и подробно исследованного в работе [1]. Новый метод основан на применении проекционной процедуры метода Галеркина к интегральному уравнению для токов. Для аппроксимации векторов тока на пластине используются так называемые “реберные” базисные функции, определенные в двух соседних элементарных треугольных областях, на которые разделена исходная плоская область. Для построения неравномерных треугольных сеток использовалось специальное программное обеспечение, разработанное Е. С. Николаевым.

Реберные векторные базисные функции впервые были описаны в работе [2], а полнота базисных функций доказана в работе [3].

В докладе приведены результаты численного исследования задачи рассеяния плоской волны на треугольной пластине.

Литература

1. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. — М. : ИПРЖР, 1996. — 176 с.

2. Rao S. M., Wilton D. R. and Glisson A. W. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape // IEEE Trans. 1982. V. AP-30. № 3. P. 409.

3. Смирнов Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза : Изд-во Пенз. ун-та, 2009. — 268 с.

Повышение резкости изображений на основе деформации пиксельной сетки

Насонова Александра Андреевна, Крылов Андрей Серджевич

Кафедра математической физики, e-mail: `nasonova@cs.msu.ru, kryl@cs.msu.ru`

Повышение резкости изображений обычно основано на решении обратной двумерной задачи для уравнения свертки [1]. В данной работе представлен другой подход для решения задачи повышения резкости изображений: предлагается деформировать равномерную координатную сетку, на которой задано изображение, таким образом, чтобы пиксели из окрестности размытого контура стали находиться ближе к этому контуру. Далее изображение на деформированной координатной сетке пересчитывается на исходную равномерную координатную сетку. Подобный подход был предложен в работе [2], однако из-за зависимости от большого количества параметров и случайных деформаций контуров изображений метод не нашел широкого применения.

Для деформации двумерной координатной сетки предлагается вычислять векторное поле смещений $\vec{d}(x, y)$, отвечающее за смещение пикселя с координатой (x, y) в точку с координатой $(x, y)+\vec{d}(x, y)$. На векторное поле наложены ограничения: 1) формы контуров изображений не должны быть деформированы, т. е. $\vec{d}(x_e, y_e) = 0$ для всех пикселей контура (x_e, y_e); 2) не должно создаваться завихрений: $\mathrm{rot}\ \vec{d} = 0$. Для этого поле смещений представляется как градиент некоторой скалярной функции $u(x, y)$: $\vec{d}(x, y) = \nabla u(x, y)$; 3) пиксели из окрестности контура, расположенные дальше от контура, не могут сместиться в сторону контура сильнее, чем пиксели, расположенные ближе к контуру: $\mathrm{div}\ \vec{d} \geqslant -1$. Поле смещений $\vec{d}(x, y)$ связано с функцией близости пикселей $p(x, y)$ как $p(x, y) = 1 + \mathrm{div}\ \vec{d}$.

Функция близости характеризует расстояние между смежными пикселями после деформации (если $p(x, y) < 1$, то в точке (x, y) произошло сгущение координатной сетки, если $p(x, y) > 1$ — разрежение).

Таким образом задача деформации представляется как задача Дирихле для уравнения Пуассона в области G всего изображения:

$$\begin{cases} \Delta u &= p(x, y) - 1, (x, y) \in G \\ u(x, y) &= 0, \qquad\qquad (x, y) \in \partial G. \end{cases}$$

Граничное условие в данной постановке задачи обуславливает отсутствие деформации координаной сетки на границе изображения. Функция близости $p(x, y)$ учитывает, в том числе, уровень размытия изображения, метод оценки которого предложен в [3].

Метод повышения резкости изображений был протестирован на синтетических и реальных изображениях и показал хорошие результаты. Предложенный подход позволяет сохранить контраст и текстуры изображений и не повышает уровень шума.

Литература

1. M. Almeida, M. Figueiredo Parameter estimation for blind and non-blind deblurring using residual whiteness measures // IEEE Trans. Image Processing. 2013. Vol. 22. P. 2751–2763.

2. N. Arad, C. Gotsman Enhancement by image dependent warping // IEEE Trans. Image Proc. 1999. Vol. 8. P. 1063–1074.

3. А. А. Насонова, А. С. Крылов Определение ширин границ изображения на основе нерезкого маскирования // Прикл. математика и информатика. 2013. Т. 42. С. 76–82.

О восстановлении изображений в некогерентных оптических системах

Разгулин Александр Витальевич, Старостин Александр Сергеевич[1], Ирошников Никита Георгиевич, Ларичев Андрей Викторович[2]

[1] Кафедра математической физики, ВМК МГУ, e-mail: razgulin@cs.msu.su

[2] Кафедра медицинской физики, физический факультет МГУ, e-mail: larichev@optics.ru

Задача восстановления изображений в некогерентной оптической системе возникает при разработке методов неинвазивной диагностики живых структур глаза человека, нацеленных на выявления фундаментальных закономерностей функционирования таких структур в норме и патологии. Несовершенство оптической системы человеческого глаза, как естественной, так и приобретенной в результате болезней или повреждений, не позволяет получить изображения различных отделов глаза с высокой разрешающей способностью, необходимой для ранней диагностики различных заболеваний. Кроме того, исследование структур живых объектов накладывает существенные ограничения на интенсивность зондирующего излучения, что заставляет работать с изображениями, для которых отношение сигнал/шум ненамного превышает единицу.

С математической точки зрения рассматриваемая задача формулируется в виде двумерного интегрального уравнения 1 рода типа свертки с передаточной функцией, которая отражает специфику оптической системы глаза человека, а именно, некогерентное освещение, наличие зрачка, а также фазовых искажений, вызванных непостоянными аберрациями. При этом в качестве исходных данных используется набор распределений интенсивности, который является результатом регистрации динамической серии изображений с погрешностями.

В задачах восстановления астрономических изображений, имеющих качественно близкие постановки, хорошо зарекомендовал себя подход, основанный на использовании корреляционных функций третьего порядка и биспектров [1] (биспектр — преобразование Фурье корреляционной функции третьего порядка), отличающихся такими преимуществами, как сохранение тройной корреляцией комплексного Фурье-спектра сигнала (что позволяет восстановить информацию о фазовых характеристиках исходного изображения) и инвариантность биспектра к смещению исходного сигнала.

В данной работе, являющейся продолжением [2], представлены новые результаты по применению биспектрального метода к восстановлению изображений, характерных для задач офтальмологии. Особое внимание уделено проведению методических тестов на эталонных изображениях в условиях типичных аберраций оптической системы глаза человека. По поводу других методов восстановления изображений, не использующих биспектр, см., например, [3].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-02-00677.

Литература

1. Bartelt H., Lohmann A. W., and Wirnitzer B. Phase and amplitude recovery from bispectra // Applied Optics. 1984. Vol. 23. P. 3121–3129.

2. Iroshnikov N., Larichev A., Potyagalova A., Razgulin A. Tikhonov-regularized bispectral variational method for optical signal reconstruction // Computational Mathematics and Modeling. 2013. Vol. 24. № 4. P. 505–516.

3. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. М. : Наука, 1990.

О некоторых общих принципах для эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве

Тихонов Иван Владимирович

Кафедра математической физики, e-mail: `ivtikh@mail.ru`

В гильбертовом пространстве H на отрезке $[0,T] \subset \mathbb{R}$ задано линейное эволюционное уравнение

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1}$$

Предполагаем, что A — линейный замкнутый оператор в H с областью определения $D(A) \subset H$. Рассматриваем классические решения $u \in C^1([0,T], H)$, такие, что $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in [0,T]$, и уравнение (1) выполнено всюду на $[0,T]$. При естественных ограничениях на A некоторые вопросы, связанные с уравнением (1), получают полное разрешение.

Например, если A — симметрический оператор в H, удовлетворяющий условию $(Af, g) = (g, Af)$ для любых $f, g \in D(A)$, то верен принцип единственности: уравнение (1) может иметь не более одного решения, удовлетворяющего условию $u(t_0) = u_0$ в фиксированной точке $t_0 \in [0,T]$ с заданным элементом $u_0 \in D(A)$. Аналогичный принцип справедлив для уравнения (1) с симметрическим оператором A в случае нелокального условия

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt = u_1 \tag{2}$$

с заданным элементом $u_1 \in D(A)$. Более того, принцип единственности сохранится, если заменить (2) общим нелокальным условием с положительной мерой $d\mu(t)$ вместо простой меры dt (см. [1]).

При исследовании разрешимости нелокальных задач, подобных (1), (2), на оператор A обычно налагают ограничения, требующие корректность прямой или обратной задачи Коши для уравнения (1) (см. [2, 3]). Однако недавно автор совместно с Ю. С. Эйдельманом обнаружили, что такие ограничения не всегда актуальны. Пусть, например, оператор A является самосопряженным с дискретным спектром из собственных значений λ_k с собственными функциями f_k, образующими ортонормированный базис в H. Тогда для любого элемента $u_1 \in D(A^2)$ задача (1), (2) имеет и притом единственное классическое решение

$$u(t) = \sum_k \frac{\lambda_k T}{e^{\lambda_k T} - 1}\, e^{\lambda_k t}\,(u_1, f_k)\, f_k, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3}$$

Ряд, фигурирующий в (3), должным образом сходится на $[0, T]$, но вне отрезка может расходиться. Полуограниченность оператора A не предполагается, т. е. корректная разрешимость как прямой, так и обратной задач Коши не обязательны. Означенный принцип универсальной разрешимости переносится на самосопряженные операторы с непрерывным спектром и на близкую задачу с финальным переопределением. Проделанные исследования (совместные с Ю. С. Эйдельманом) подтверждают значительную автономию обратных и нелокальных задач по отношению к стандартной задаче Коши для эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве.

Литература

1. Тихонов И. В. Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных эволюционных уравнений // Известия РАН. Серия математическая. 2003. Т. 67. № 2. С. 133–166.

2. Тихонов И. В. О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для абстрактного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 6. С. 841–843.

3. Тихонов И. В. Нелокальная задача с “периодическим” интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюллетень. 2004. Т. 4. № 1. С. 49–69.

Анализ рассеивающих свойств шероховатости в поле неизлучающих волн

Лопушенко Владимир Васильевич

Лаборатория Математической физики, e-mail: `lopushnk@cs.msu.ru`

Метод Рэлея или метод малых возмущений является одним из наиболее популярных и известных аналитических методов изучения двумерных шероховатых поверхностей [1].

Однако с помощью данного метода в подавляющем большинстве работ исследуются лишь отражающие свойства поверхностей, т. е. изучается двулучевая функция отражательной способности BRDF (bidirectional reflectance distribution function), которая определяет угловое (θ_s, φ_s) распределение интенсивности при заданных длине волны λ, угле падения θ_i и поляризации [2]. Очевидно, что метод Рэлея может быть столь же успешно применен для изучения двулучевой функции пропускающей способности BTDF (bidirectional transmittance distribution function). Особый интерес представляет анализ BTDF в диапазоне неизлучающих волн при распространении волны, например, в воздух (ε_0) из оптически более плотной среды (ε_1). В данной работе показано, что в рамках теории Рэлея функция BTDF может быть представлена как

$$\mathrm{BTDF} = \frac{16\,\pi^2}{\lambda^4} cos\,\theta_i\, cos\,\theta_s \cdot Q \cdot PSD(f_x, f_y), \quad Q = \sum_{jk} |Q_{jk} e_j e_k|^2,$$

где PSD (power spectral density) — функция спектральной плотности шероховатой поверхности, которая зависит от пространственных частот

$$f_x = \sqrt{\varepsilon_0}\, \frac{sin\,\theta_s\, cos\,\varphi_s - sin\,\theta_i}{\lambda}, \quad f_y = \sqrt{\varepsilon_0}\, \frac{sin\,\theta_s\, sin\,\varphi_s}{\lambda},$$

а коэффициенты поляризации Q_{jk} определяются значениями вектора Джонса падающей e_j и прошедшей e_k волны и зависят от углов рассеяния, угла падения и диэлектрических проницаемостей среды и воздуха:

$$Q_{pp} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{cos\,\varphi_s \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_1 - sin^2\,\theta_s}\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0 - sin^2\,\theta_i} + \sin\theta_i \sin\theta_s}{(\varepsilon_1/\varepsilon_0 cos\,\theta_i + \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0 - sin^2\,\theta_i})(\varepsilon_0/\varepsilon_1\,|cos\,\theta_s| + \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_1 - sin^2\,\theta_s})},$$

$$Q_{ps} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \sin\varphi_s \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0 - sin^2\,\theta_i}}{(\varepsilon_1/\varepsilon_0 cos\,\theta_i + \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0 - sin^2\,\theta_i})(|cos\,\theta_s| + \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_1 - sin^2\,\theta_s})},$$

$$Q_{sp} = \frac{-(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \sin\varphi_s \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_1 - sin^2\,\theta_s}}{(cos\,\theta_i + \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0 - sin^2\,\theta_i})(\varepsilon_0/\varepsilon_1\,|cos\,\theta_s| + \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_1 - sin^2\,\theta_s})},$$

$$Q_{ss} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) cos\,\varphi_s}{(cos\,\theta_i + \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0 - sin^2\,\theta_i})(|cos\,\theta_s| + \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_1 - sin^2\,\theta_s})}.$$

С помощью предлагаемого варианта метода Рэлея были рассчитаны диаграммы рассеяния при различных углах падения и поляризациях плоской полны. В частности, проведено исследование функции BTDF в области неизлучающих волн.

Литература

1. Beckmann P., Spizzichino A. The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces. New York : Macmillan, 1963.
2. Stover J. C. Optical Scattering: Measurement and Analysis // SPIE Press. 2012.

СЕКЦИЯ V

Кафедра вычислительных технологий и моделирования

Исследование и численное решение задачи минимизации экономического ущерба от локальных источников

Новиков Иван Сергеевич, Агошков Валерий Иванович

ИВМ РАН, e-mail: `nissonsv@mail.ru, agoshkov@inm.ras.ru`

Задача оценки и минимизации экономического ущерба от загрязнений окружающей среды локальными источниками является актуальной проблемой в современном мире. Локальными источниками могут быть трубы промышленных предприятий, а также лесные и торфяные пожары, которые вносят ощутимый вклад в загрязнение атмосферы (примером служит лето 2010 года). От эффективности и своевременности решения этой задачи зависит объем государственных средств, необходимых на ликвидацию последствий загрязнений.

В настоящей работе исследуется задача минимизации экономического ущерба в Московском регионе от локальных источников, предлагается и обсуждается алгоритм ее решения (аналогичный тому, что предложен в [1]). Соотношение для оценки экономического ущерба получено на основе формул из [2]. В конце работы приводятся результаты численных экспериментов, которые иллюстрируют справедливость теоретических положений исследуемой задачи. При численном решении задачи используется монотонная схема первого порядка точности, построенная на основе результатов из монографии [3].

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 13-01-00753).

Литература

1. Агошков В. И., Асеев Н. А., Новиков И. С. Методы исследования и решения задач о локальных источниках при локальных или интегральных наблюдениях. М. : ИВМ РАН, 2012. 151 с.

2. Тарасова Н. П., Ермоленко Б. В., Зайцев В. А., Макаров С. В. Оценка воздействия промышленных предприятий на окружающую среду. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 230 с.

3. Самарский А. А. Теория разностных схем. 3-е изд., испр. М. : Наука, 1989. 616 с.

Решение задачи об управлении риском нефтяного загрязнения охраняемых зон Балтийского моря на основе метода блуждающих частиц

Асеев Никита Александрович[1], Агошков Валерий Иванович[2]

[1] МФТИ, e-mail: `aseev_nik@mail.ru`

[2] ИВМ РАН, e-mail: `agoshkov@inm.ras.ru`

Материальный ущерб — одно из последствий аварийного разлива нефти в морской акватории. В это понятие входят затраты на восстановление окружающей среды, штрафы за загрязнение, потери рыболовецких хозяйств и туристических фирм и т. д. Оценка материального ущерба от возможной катастрофы представляет собой непростую задачу ввиду того, что заранее неизвестны место и время аварийного разлива. Другими словами, ущерб есть величина вероятностная. Для учета вероятностного характера ущерба вводится понятие риска как математического ожидания материального ущерба.

Настоящая работа посвящена задаче об управлении риском нефтяного загрязнения охраняемых зон акватории Балтийского моря. Для решения такой задачи необходимо выбрать наиболее реалистичную модель движения нефтяного пятна. В работе [1] предполагалось, что нефтяное пятно не меняет своей формы, ее движение есть дрейф под действием течений, а процессы деградации нефти не действуют. На практике пятно, естественно, деформируется. В данной работе для учета изменения формы пятна предлагается моделировать его движение с помощью метода блуждающих частиц [2]. Согласно этому методу, пятно разбивается на маркеры, и для каждого маркера вычисляется траектория движения под действием течений и ветра. В качестве управлений выбирается масса каждого маркера.

Общая методология решения поставленной задачи схожа с методологией, описанной в [1]: она основывается на минимизации ущерба в каждый момент времени после появления пятна, место появления пятна также считается фиксированным (например, нефтедобывающая платформа). Однако “функционал стоимости” модифицирован с учетом того, что под управлениями подразумевается масса каждого маркера.

Таким образом, предлагается следующий алгоритм решения задачи: 1) разбиение пятна на маркеры; 2) расчет траектории движения каждого маркера; 3) определение управлений в явном виде из уравнений Эйлера для “функционала стоимости”, к которому применимо “двойственное представление”; 4) вычисление риска с учетом управлений.

Представленная работа может лечь в основу для более сложных задач об управлении риском нефтяного загрязнения морских акваторий или для разработки комплекса мер по устранению нефтяных загрязнений.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 13-01-00753).

Литература

1. Асеев Н.А., Агошков В.И. Исследование и численное решение одной задачи об управлении риском нефтяного загрязнения в Балтийском море. // Научная конференция Тихоновские чтения. — М.: МГУ, 2013. — 67 с.

2. Озмидов Р.В. Диффузия примесей в океане. — Л.: Гидрометеоиздат, 1986. — 280 с.

Исследование задачи об управляемости скорости ветра в прибрежной зоне Новороссийска при боре

Шелопут Татьяна Олеговна[1], **Агошков Валерий Иванович**[2]

[1] Кафедра математического моделирования физических процессов ФПФЭ МФТИ, e-mail: sheloput@phystech.edu

[2] Институт вычислительной математики РАН, e-mail: agoshkov@inm.ras.ru

Новороссийская бора — опасное стихийное бедствие, представляющее серьезную проблему для жителей г. Новороссийска, производственной деятельности и судоходства. В Новороссийске в среднем за год в течение 46 дней имеет место явление боры, при этом 10–20 дней в году скорость ветра достигает штормовой силы, превышая 20 м/с, а 5 дней в году — уровня урагана (более 33 м/с). Как правило, сильный ветер сопровождается понижением температуры на 10°–15°и обледенением городских и портовых сооружений. Примерно 1 раз в 10 лет в Новороссийске наблюдается катастрофическая бора, сопровождаемая порывами ветра более 45 м/с, что приводит к значительным разрушениям и человеческим жертвам и полностью парализует работу Новороссийского порта [1]. Вышеуказанное определяет актуальность задачи управления скоростью ветра в прибрежной зоне Новороссийска.

В настоящей работе исследуется вопрос о возможности управлять скоростью ветра в прибрежной зоне Новороссийска при боре. Для выявления параметров, от которых скорость ветра зависит в наибольшей степени, применяется общая теория чувствительности, изложенная в [2], и один из этих параметров используется далее как “управление”. В основе настоящей работы лежит общая методология исследования обратных задач и задач управления, которая изложена в [3], а также теория сопряженных уравнений, приведенная в [4]. В качестве модели боры используется двумерная термогидродинамическая модель [5]. В ходе данной работы предложены алгоритмы вычисления значений функций чувствительности, построены графики зависимости функций чувствительности от параметров модели и исследована одна из задач управления скоростью ветра с подветренной стороны хребта.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 13-01-00753).

Литература

1. Под ред. Гусев А. М. Новороссийская бора. Тр. Морского гидрофиз. ин-та. Т. 14. — М. : Изд-во АН СССР, 1959.
2. Томович Р., Вукобратович М. Общая теория чувствительности. — М. : Советское радио, 1972.
3. Агошков В. И. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. — М. : ИВМ РАН, 2003.
4. Марчук Г. И., Агошков В. И., Шутяев В. П. Сопряженные уравнения и методы возмущений в нелинейных задачах математической физики. — М. : Наука, 1993.
5. Гутман Л. Н., Франкаль Ф. И. Гидродинамическая модель боры. Докл. АН СССР, 1960. Т. 30, № 3. С. 23 — 37.

Усовершенствование процедуры построения составных полярных кодов

Замарашкин Николай Леонидович, Цагашек Илья Вадимович

Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: `bulldog_rider@mail.ru`

Было установлено, что полярные коды, предложенные Э. Ариканом в [1], несмотря на наличие быстрых алгоритмов кодирования и декодирования, проигрывают современным стандартам, так как допускают сравнительно большое количество ошибок декодирования. Используя составные коды, можно улучшить производительность полярных кодов. В работе [2] было предложено использовать алгоритма кодирования полярного кода для кодовых слов некоторых других кодов, таких как коды БЧХ и Рида-Маллера. В этой же работе был также описан алгоритм оптимального выбора кодов из заданного списка. Как показали эксперименты, данный подход является оправданным и позволяет снизить вероятность ошибки декодирования. Списочный SC декодер, предложенный в [3], существенно улучшил производительность полярных кодов, оставив неизменными асимптотические оценки на сложность алгоритма. Тем не менее, использование такой процедуры для кодов большой длины не предоставляется возможным, так как обладает большой сложностью (больше, например, декодера для LDPC кодов) и трудностями при параллельной реализации. В работе [4] был изложен новый подход к построению составного кода: использование только полярных кодов с применением различных алгоритмов декодирования: как классического SC-декодера, так и списочного SC декодера Tal, Vardy. Однако, численные эксперименты показали, что данная система требует анализа для более корректного выбора соответствующих парметров составного кода. В настоящей работе предлагается вариант решения данной задачи. Обнаружено, что построение полярных кодов, кодовые слова которых будут использоваться для последующего построения составных полярных кодов, а также выбор таких параметров, как размер списка и количество дополнительных CRC бит, необходимо производить для двупараметрических каналов особого вида. Ранее предполагалось, что построение производится для однопараметрических каналов, таких как BEC, BSC и AWGN. Целью работы является построение полярных кодов для двупараметрических каналов и создание оптимального составного кода на их основе.

Литература

1. Arikan E. Channel Polarization: A method for contructing capacity-achieving codes for symmetricbinary-input memoryless channels
2. Bonik G., Goreinov S., Zamarashkin N. Construction and analysis of polar and concatenated Polar Codes: practical approach
3. Tal I., Vardy A. List decoding of Polar Codes, University of California San Diego
4. Bonik G., Goreinov S., Zamarashkin N. A variant of list plus CRC concatanetad Polar Codes

Формулы и оценки для главного ранга тензоров

Стефонишин Даниил Александрович[1], Тыртышников Евгений Евгениевич[2]

[1] Кафедра общей математики, e-mail: stefonishin@gmail.com

[2] Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: eugene.tyrtyshnikov@gmail.com

Естественным обобщением понятия ранга матрицы является ранг тензора. Тензором ранга 1 называется ненулевой тензор вида

$$u_1(i_1) \otimes \ldots \otimes u_d(i_d)\,,$$

а рангом тензора называется минимально возможное число тензоров ранга 1, дающих в сумме заданный тензор. Ранг комплексного тензора можно найти за конечное число арифметических операций, но число их настолько велико, что делает вычисление ранга практически нереальным даже для “небольших” тензоров. Рассматривая комплекснозначные тензоры, можно ввести также понятие главного ранга, то есть такого ранга, который принимают почти все тензоры фиксированного размера. В отличие от ранга конкретных тензоров, главный ранг зависит исключительно от размера тензоров и может быть вычислен более или менее легко. В работе [1] на основании некоторых таких вычислений предложена гипотеза относительно ранга трехмерных тензоров размера (m, n, q):

$$grank\,(m,n,q) = \left\lceil \frac{mnq}{m+n+q-2} \right\rceil,$$

если $(m, n, q) \neq (2k-1, 2k-1, 3)$, $k \in \mathbb{N}$. В нашем докладе мы систематизируем отдельные известные исследования, которые, как нам кажется, необходимы для получения возможных доказательств этой гипотезы и связанных с ней результатов. Отправной точкой является работа [2], посвященная кубическим трехмерным тензорам. Мы предлагаем новое, более простое изложение результатов этой работы и некоторые их обобщения. При этом мы существенно опираемся на результаты Ф. Штрассена [3] и используем его построения в более явной и систематизированной форме.

Литература

1. Friedland S. On the generic and typical ranks of 3-tensors // Linear Algebra Appl. 436(3). 2012. P. 478–497.

2. Lickteig Th. Typical tensorial rank // Linear Algebra Appl. 69. 1985. P. 95–120.

3. Strassen W. Rank and optimal computation of generic tensors // Linear Algebra Appl. 52/53. 1983. P. 645–685.

О решении краевых задач для уравнения Лапласа со сносением граничного условия на приближенную границу

Писарев Игорь Викторович[1], **Сетуха Алексей Викторович**[2]

[1] Орловский государственный университет, физико-математический факультет, e-mail: demoruss@inbox.ru

[2] Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: setuhaav@rambler.ru

В работе рассмотрен вопрос об аппроксимации граничной поверхности, на которой ставится граничное условие в краевой задаче Неймана для уравнения Лапласа, некоторой другой поверхностью, допускающей эффективное численное решение задачи. Как примеры исследованы задача на бесконечном слабоизогнутом экране и задача вне тела, имеющего малую толщину.

В первой задаче предполагается, что экран совпадает с плоскостью вне некоторого шара. Для приближенного решения задачи решается краевая задача для уравнения Лапласа вне плоскости, аппроксимирующей экран, на которой ставится граничное условие, обеспечивающее приближенный учет неровности экрана. Разработанная численная модель может быть применена, в частности, при решении вихревыми методами задач об обтекании идеальной несжимаемой жидкостью объектов, расположенных на поверхности с рельефом для приближенного учета неровности рельефа.

В задаче вне тела, имеющего малую толщину, граничное условие сносится на срединную поверхность. При этом исходная задача заменяется задачей в области вне срединной поверхности (экрана), с приближенным учетом исходной формы тела за счет записи специальных граничных условий. Применением методов теории потенциала такая задача сведена к системе из двух двумерных интегро-дифференциальных уравнений на срединной поверхности с сильносингулярными интегралами. Построена численная схема решения указанных уравнений, основанная на методе коллокаций.

Предложенная математическая модель применена к решению краевой задачи для уравнения Лапласа, возникающей в линейной теории крыла конечного размаха. Проведено тестирование разработанного численного метода решения задачи на примере расчета распределения давления по поверхности крыла [1].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 13-01-12061).

Литература

1. Писарев И. В., Сетуха А. В. Снесение граничного условия на срединную поверхность при численном решении краевой задачи линейной теории крыла // Вычислительные методы и программирование. 2014. Т. 15. С. 109–120.

Быстрый метод решения кинетических уравнений агрегации и фрагментации

Матвеев Сергей Александрович, Тыртышников Евгений Евгеньевич

Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: `matseralex@gmail.com, tee@inm.ras.ru`

Процессы агрегации и фрагментации широко представлены в природе и нередко являются частью технологических процессов. Важными примерами таких процессов являются: процессы обратимой полимеризации в растворах, рост биологически важных биополимеров (например, прионов) [1], образование протопланет в пылевых облаках в межзвездном пространстве [2] и другие. Распределение по размерам частиц в таких системах определяется балансом процессов агрегации и фрагментации соударяющихся частиц. В случае однородных систем, рассматриваемых в данной работе, указанные выше процессы описываются системой уравнений, которая носит название “уравнения Смолуховского”. Эти уравнения определяют изменение размера частиц вследствие их объединения или распада. Образование крупных агрегатов из более мелких происходит при столкновении частиц, в то время как распад агрегатов на составляющие может происходить по различным сценариям.

Пусть n_k — концентрация (т. е. количество частиц в единице объема) агрегатов, состоящих из k “элементарных” частиц (мономеров). Уравнения Смолуховского описывают эволюцию концентраций n_k во времени. В процессе эволюции образуются всё большие и большие частицы, так что, система уравнений Смолуховского, строго говоря, бесконечна.

В данной работе была рассмотрена система кинетических уравнений, описывающих процессы агрегации и фрагментации в планетных кольцах, предложенная в работе [2]. В этой модели результат столкновения определяется величиной кинетической энергии относительного движения сталкивающихся частиц: при малых значениях энергии частицы сливаются, при больших — распадаются на осколки. В работе [2] показано, что в широком диапазоне параметров частота столкновений с агрегацией частиц пропорциональна частоте столкновений приводящих к разрушению частиц. В результате получается, что кинетические коэффициенты A_{ij}, отвечающие за динамику распада, и коэффициенты C_{ij}, отвечающие за динамику слияний частиц при столкновениях, отличаются мультипликативным сомножителем $\lambda > 0$, то есть, $A_{ij} = \lambda C_{ij}$.

Таким образом, уравнения модели для полимеров могут быть записаны в следующей форме:

$$\frac{dn_k}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} C_{i,j} n_i n_j - (1+\lambda) n_k \sum_{j \geq 1} C_{j,k} n_j \ , \ k = \overline{2, \infty} \, ,$$

а уравнение для мономеров с учетом рассматриваемых процессов примет вид:

$$\frac{dn_1}{dt} = -n_1 \sum_{j \geq 1} C_{1,j} n_j + \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j \geq 2} C_{i,j} (i+j) n_i n_j + \lambda n_1 \sum_{j \geq 2} j C_{1,j} n_j \, .$$

В качестве характеристики состояния системы в момент времени t введём полную концентрацию агрегатов: $N(t) = \sum_{j=1}^{\infty} n_j(t)$, а также общую массу вещества $M(t) = \sum_{j=1}^{\infty} j\ n_j(t)$. В случае $C_{ij} \equiv 1$ и $n_k(0) = \delta_{1k}$, можно получить аналитическое решение указанной системы уравнений [2].

В результате применения разностной схемы предиктор-корректор по времени к конечным системам дифференциальных уравнений, аппроксимирующих исходную бесконечную, можно показать, что основная вычислительная сложность схемы заключается в вычислении сумм, определяющих кинетику процессов агрегации и фрагментации на каждом шаге по времени, за $O(M^2)$ операций, где M — число уравнений в аппроксимирующей системе. В данной работе было показано, что данные суммы могут быть сведены к операциям умножения малоранговых матриц на векторы и вычислению дискретных нижнетреугольных свёрток с общей сложностью $O(MR\log M)$ арифметических операций, где R — максимальный из рангов используемых разложений. Для построения необходимых малоранговых матричных аппроксимаций в работе использовался крестовый алгоритм интерполяции [3]. Таким образом, в работе получен новый численный метод с более низкой арифметической сложностью.

Тестовые расчёты с ядром $C_{i,j} \equiv 1$ и $N(0) = 1$ для рассмотренной модели агрегации и фрагментации вещества в планетарных кольцах показали согласованность кластерной плотности численного решения с аналитической. Тестовые расчёты с баллистическим ядром подтвердили эффективность предложенной модификации численной схемы — при больших значениях M получено ускорение исходной схемы более, чем в 1000 раз при согласованных кластерных плотностях численных решений, полученных исходной и ускоренной схемами.

Литература

1. Poschel, Thorsten, Nikolai V. Brilliantov, and Cornelius Frommel Kinetics of prion growth // Biophysical journal. 2003. 85.6. P. 3460–3474.
2. Brilliantov N. V., Krapivsky P., Bodrova A. S., Spahn F., Hayakawa H., Stadnichuk V., Schmidt J. Particle size distribution in Saturn’s rings: Aggregation-fragmentation model (submitted) // Proceedings of the National Academy of Sciences, 2014.
3. Oseledets, Ivan, and Eugene Tyrtyshnikov TT-cross approximation for multidimensional arrays // Linear Algebra and its Applications. 2010. 432.1. P. 70–88.

Математическая модель ВИЧ инфекции: исследование чувствительности точки стабилизации вирусной нагрузки

Бочаров Геннадий Алексеевич, Азиатцева Валерия Валерьевна

Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: `bocharov@inm.ras.ru, valeryaaziattseva@yandex.ru`

При математическом моделировании инфекционных заболеваний особый интерес представляет исследование локальной и глобальной чувствительности модели. В данной работе была построена математическая модель ВИЧ-инфекции на основе модели инфекционного заболевания Марчука-Петрова [1], состоящая из девятнадцати ОДУ. Была проведена начальная калибровка модели на основе выборки клинических данных [2]. Для исследования чувствительности была выбрана вирусная нагрузка в точке стабилизации инфекции (численность вирусной популяции в крови на 300 сутки).

Для оценки локальной чувствительности значения всех параметров, кроме одного, фиксировались, а исследуемый параметр варьировался. В ходе этого исследования было выявлено, что не для всех параметров зависимости являются монотонными.

Исследование глобальной чувствительности проводилось в несколько шагов. В ходе исследования локальной чувствительности модели были выбраны несколько параметров, изменение которых вело к наибольшему колебанию вирусной нагрузки. Далее, исследовалась глобальная чувствительность к изменению всех этих параметров по методу латинского гиперкуба, затем выбирался тот, для которого коэффициент частичной корреляции был наибольшим по модулю, и далее этот параметр фиксировался и исключался из рассмотрения. Так была получена ранжированная совокупность параметров, изменение которых наиболее сильно сказывается на исследуемой величине.

Для расчетов использовались средства MATLAB и Statistics Toolbox, а также набор функций для исследования глобальной чувствительности [3].

В результате проведенного анализа было установлено, что наибольший вклад в изменение вирусной нагрузки в точке стабилизации вносят такие параметры, как скорость гибели инфицированных клеточных хелперов, а так же скорости заражения клеточных хелперов от инфицированных АПК и свободных вирусных частиц. Зависимость от скорости заражения АПК является нелинейной в силу их двойственной роли в развитии инфекционного процесса.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№ 14-01-00477а) и Программы Президиума РАН “Фундаментальные науки — медицине”.

Литература

1. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии: вычислительные методы и эксперименты. М.: Изд-во Наука, 1991.
2. Kaufmann G.R., Cunningham P., Kelleher A.D., et al. Patterns of viral dynamics during primary human immunodeficiency virus type 1 infection. //The Sydney Primary HIV Infection Study Group. J Infect Dis, 1998, 178:1812–1815
3. D. Kirschner, University of Michigan, 2008, набор скриптов и функций для исследования глобальной чувствительности: `http://malthus.micro.med.umich.edu/lab/usadata/`

Математическое моделирование индивидуальной динамики иммунных клеток

Бочаров Геннадий Алексеевич[1], **Гребенников Дмитрий Сергеевич**[2]

[1] Институт вычислительной математики РАН, e-mail: bocharov@inm.ras.ru
[2] Московский физико-технический институт, e-mail: dmitry.ew@gmail.com

Во многих иммунологических процессах важную роль играет динамика пространственного распределения клеток. Так, эффективность клеточного иммунного ответа определяется частотой контактов цитотоксических Т-лимфоцитов $CD8^+$ с дендритными клетками, которые презентируют специфичные антигенные пептиды на своей поверхности. До начала специфического иммунного ответа концентрация специфичных к вирусу Т-клеток мала, поэтому для эффективного привлечения Т-клеток дендритные клетки секретируют хемокины. Моделирование хемотаксиса является ключевым моментом для описания динамики миграции клеток в лимфоузле [1, 2].

Удачным балансом между непрерывными моделями среды и моделями одной клетки являются многоклеточные модели Поттса (Cellular Potts Model, CPM) [3]. В них клетки представляют собой естественный уровень абстракции в моделировании тканей и органов. Большинство клеток могут совершать определенный набор действий, который можно моделировать, не вдаваясь в подробности внутриклеточной динамики: клетки могут двигаться, делиться, гибнуть, изменять форму, производить давление на другие клетки, секретировать и поглощать хемокины, менять пространственное распределение [4].

Была программно реализована двумерная модель Поттса на гексагональной сетке (расчеты производились в среде MATLAB). Произведена начальная калибровка параметров модели для воспроизведения биологически адекватных сценариев динамики иммунных клеток. В дальнейшем планируется реализация трехмерной модели для включения ее в общую интегративную модель ВИЧ-инфекции для описания острой фазы специфического иммунного ответа. Также модели можно учесть геометрическую структуру лимфоидных органов.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№ 14-01-00477а) и Программы Президиума РАН “Фундаментальные науки — медицине”.

Литература

1. Цинкернагель Р. М. Основы иммунологии. Москва: Издательство «Мир», 2008, стр. 20–61.

2. Vroomans RMA, Maree AFM, de Boer R. J., Beltman J. B. Chemotactic Migration of T Cells towards Dendritic Cells Promotes the Detection of Rare Antigens. // PLoS Comput Biol 8(11), 2012, 1–12

3. Graner F, Glazier J .A. Simulation of biological cell sorting using a two-dimensional extended Potts model. // Phys Rev Lett 69, 1992, 2013–2016.

4. Savill N. J., Hogeweg P. Modelling morphogenesis: from single cells to crawling slugs. // J. Theor. Biol. 184, 1997, 229–235.

Трехмерное моделирование кинетики внутриклеточной репликации и распространения ВИЧ инфекции в органе-мишени

Кислицын Алексей Алексеевич, Бочаров Геннадий Алексеевич

Кафедра вычислительный технологий и моделирования, e-mail: kislitsyn@cs.msu.su, bocharov@inm.ras.ru

В работе рассматривается подход к моделированию процесса распространения инфекции вируса иммунодефицита человека (ВИЧ) в органе-мишени с использованием стохастической модели репликации вируса в клетке.

При моделировании процесса внутриклеточной репликации ВИЧ описываются следующие ключевые этапы: обратная транскрипция, процесс переноса вирусных частиц в ядро клетки, интеграция, активация [1], транскрипция, экспорт вирусной частицы в цитоплазму, трансляция, высвобождение вирусных частиц [2].

Пространственная структура клетки аппроксимируется в виде сферы разбитой на тетраэдры, центры которых являются узлами сетки в расчетной модели. В них случайным образом располагаются различные элементы этой клетки и компоненты вируса, участвующие в процессе репликации. Переменными состояния в двух-уровневой модели являются численности следующих характеристик [3]: клетка-мишень, клеточная ДНК, клеточная транспортная РНК, провирусная ДНК, вирусная РНК, интегрирующаяся в ядро провирусная ДНК, вирусная мРНК, вирусные белки. В алгоритме, реализующем агентную модель внутриклеточной репликации, на каждом шаге по времени происходит движение частиц (компонентов вируса и клетки, участвующих в процессе репликации) в случайном направлении на расчетной сетке, аппроксимирующей клетку. В результате этого перемещения происходит случайное столкновение частиц между собой и с ядром клетки, что определяет кинетику развития процесса вирусной репликации.

На данном этапе, для моделирования процесса распространения ВИЧ инфекции в органе-мишени рассматривается трехмерная регулярная сетка с отдельными клетками, расположенными в ее узлах.

На первом шаге, соответствующем началу инфекции, одна клетка инфицируется случайно выбранным числом вирусов (по распределению Пуассона). При окончании цикла репликации происходит высвобождение вирусов, заражающих соседние клетки.

Результаты двухуровневого (внутриклеточные и межклеточные процессы) моделирования пространственного распространения вирусной инфекции и внутриклеточной репликации, получены на основе реализации модели с использованием средств моделирования и визуализации в системах MATLAB, Ani3D, Gmsh.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (№ 14-01-00477а) и Программы Президиума РАН “Фундаментальные науки – медицине”.

Литература

1. Lipniaki T., Paszek P. Mathematical model of NF-kB regulatory module // Journal of Theoretical Biology, 2004. № 228. С. 195–215.

2. Zarrabi N. Modeling and Simulation of HIV-1 Intracellular Replication // Amsterdam Univ. Press, 2009.

3. Yin J., Reddy B. Quantitative intracellular kinetics of HIV type 1 // AIDS research and human retroviruses, 1999. Т. 3, № 15. С. 273–283.

ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ИММУННОГО ОТВЕТА НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВИЧ ИНФЕКЦИИ В ОРГАНЕ-МИШЕНИ

Савинков Ростислав Сергеевич, Бочаров Геннадий Алексеевич

Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: `dr.savinkov@gmail.com`, `bocharov@inm.ras.ru`

Работа посвящена разработке методов моделирования процессов распространения инфекции вирусами иммунодефицита человека (ВИЧ) и противовирусного иммунного ответа в органе-мишени на основе стохастического подхода к описанию перемещения вирусных частиц и специфических лимфоцитов. При моделировании процесса распространения ВИЧ описываются следующие ключевые этапы: заражение клеток-мишеней вирусом ВИЧ, процесс переноса вирусных частиц и лимфоцитов внутри органа, деление клеток и репликация вируса ВИЧ, поиск и уничтожение зараженных клеток-мишеней специфическими Т-лимфоцитами.

Пространственная структура органа-мишени аппроксимируется в виде трехмерной сетки, в узлах которой располагаются чувствительные к вирусу клетки-мишени (CD4+ Т лимфоциты). В модели рассматривается динамика следующих переменных: численности вирусных частиц (дикий и мутантный типы), CD8+ Т лимфоцитов (специфичных дикому и мутантному типу вируса, соответственно), и клеток-мишеней, различающихся состоянием (здоровая/инфицированная диким типом/инфицированная мутантным типом, неактивированная/делящаяся/погибшая). На данном этапе, для моделирования процесса распространения ВИЧ инфекции в органе-мишени рассматривается трехмерная сетка с отдельными клетками, расположенными в ее узлах. На первом шаге численного моделирования (начало инфекции) в один из узлов помещаются 10^3 вирусных частиц. В алгоритме, реализующем модель, на каждом шаге по времени происходит случайное движение вирусов и лимфоцитов по узлам сетки: вправо, влево, вверх, вниз, вперед, назад. В результате этого движения происходит случайное взаимодействие компонентов процесса ВИЧ инфекции, рассматриваемых в модели, что определяет развитие иммунного ответа. При делении инфицированной клетки-мишени происходит высвобождение вирусных частиц, заражающих соседние клетки.

Программная реализация модели выполнена на языке C++. Сложность модели $\sim O(n^3)$, где n — число узлов ребра трехмерного куба, в котором аппроксимируется моделируемая область.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№ 14-01-00477а) и Программы Президиума РАН “Фундаментальные науки — медицине”.

Литература

1. Bocharov G., Chereshnev V., Gainova I., et al. Human Immunodeficiency Virus Infection: from Biological Observations to Mechanistic Mathematical Modelling // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. 2012. T. 7, № 5, 2012, P. 78–104 .

2. Baldazzi V., Paci P., Bernachi M., et al. Modelling lymphocyte homing and encounters in lymph node // BMC Bioinformatics, 2009.

3. Perrin D., Ruskin H., Crane M. Model refinement through high-performance computing: an agent-based HIV example // Immunome Research, 2010.

СЕКЦИЯ VI

Кафедры системного анализа, нелинейных динамических систем и процессов управления

Эллипсоидальные методы для решения задачи синтеза управлений в системах с запаздыванием

Востриков Иван Васильевич

Кафедра системного анализа, e-mail: ivan_vostrikov@cs.msu.su

Рассматривается линейная управляемая система с запаздыванием:

$$\dot{x}(\tau) = A_0(\tau)x(\tau) + A_1(\tau)x(\tau - h) + B(\tau)u(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1],$$

которая аппроксимируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_0(t)u(t).$$

Матрицы $A(t) \in \mathbb{R}^{(m+1)n\times(m+1)n}$, а $B(t) \in \mathbb{R}^{(m+1)n\times n}$ определяются следующим образом

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_0(t) & \Theta & \Theta & ... & \Theta & A_1(t) \\ \frac{m}{h}I & -\frac{m}{h}I & \Theta & ... & \Theta & \Theta \\ \Theta & \frac{m}{h}I & -\frac{m}{h}I & ... & \Theta & \Theta \\ . & . & . & ... & . & . \\ \Theta & \Theta & \Theta & ... & \frac{m}{h}I & -\frac{m}{h}I, \end{pmatrix},$$

$$B_0(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ \Theta \\ ... \\ \Theta \end{pmatrix},$$

где Θ и I — соответственно нулевая и единичная квадратные матрицы размерности $n \times n$. Наложим на множество управления и целевое множество эллипсоидальные ограничения.

$$u(t) \in \mathcal{E}(p(t), P(t))$$

$$M = \mathcal{E}(x_1, X_1).$$

Для данной системы с помощью методов эллипсоидального исчисления строится синтез управления. Ключевым моментом полученного алгоритма является возможность параллельных вычислений, что позволяет решать задачи высоких размерностей.

Литература

1. Kurzhanski A. B., Varaiya P. Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis: internal approximation // System and Control Letters. 2000. V. 41. P. 201–211.

2. Востриков И. В., Дарьин А. Н., Куржанский А. Б. Успокоение многозвенной колебательной системы в условиях неопределённых возмущений // Дифференц. уравн. 2006. **42**. № 11. С. 1452–1463.

3. Куржанский А. Б. К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравн. 1967. **3**. № 12. С. 2094–2107.

Существование функции цены в задаче синтеза импульсного управления при неопределённости

Минаева Юлия Юрьевна

Кафедра системного анализа, e-mail: yminaeva@gmail.com

В работе исследуется задача синтеза импульсного управления для систем с неопределённостью. Такие задачи допускают использование в качестве управления обобщённых функций [1]. Задача синтеза может быть решена методом динамического программирования [2, 3]. Для построения синтеза используется функция цены, которая удовлетворяет уравнению типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса. В настоящей работе доказано существование функции цены как предела функций цены с коррекциями.

Рассмотрим систему с импульсным управлением $U(\cdot)$ при неопределённости $v(\cdot)$

$$dx(s) = A(s)x(s)ds + B(s)dU(s) + C(s)v(s)ds, \quad x(t) = x, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовая переменная, время $s \in [t, t_1]$. Задан функционал

$$J(U(\cdot), v(\cdot)) = \operatorname*{Var}_{[t,\, t_1+0)} U(\cdot) + \varphi(x(t_1+0)). \tag{2}$$

Цель управления — минимизировать функционал (2) на траекториях системы (1). Помехи $v(t)$ рассматриваются из пространства измеримых, почти всюду ограниченных функций, $v(s) \in \mathcal{Q}(s)$ — непустому выпуклому компакту в $\mathbb{R}^q$. Управления U принадлежат классу функций ограниченной вариации $BV([t, t_1], \mathbb{R}^m)$.

Пусть $\mathcal{T} = \{\tau_k\}_{k=0}^N$ — разбиение отрезка $[t, t_1]$, такое что $t = \tau_N < \tau_{N-1} < \cdots < \tau_1 < \tau_0 = t_1$. Определим минимаксную функцию цены с коррекциями $V_\mathcal{T}(s, x)$:

$$\begin{gathered} V_\mathcal{T}(\tau_0, x) = V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot)), \\ V_\mathcal{T}(s, x) = V(s, x; \tau_{k-1}, V_\mathcal{T}(\tau_{k-1}, \cdot; t_1, \varphi(\cdot))), \quad s \in [\tau_k, \tau_{k-1}),\ k = 1 \dots N. \end{gathered}$$

Здесь $V(t_1, x; t_1, \varphi(\cdot))$ — минимаксная функция цены, соответствующая наилучшему значению функционала задачи в случае, когда реализуется худшее значение неопределённости. Она может быть представлена через параметры задачи [3].

В работе доказано, что существует $\mathcal{V}(t, x) = \inf\limits_{\mathcal{T}} V_\mathcal{T}(t, x)$. Для доказательства выполняется переход к сопряжённой функции, после чего используется представление сопряжённой функции цены в виде суперпозиции операций овыпукления и прибавления индикаторной функции множества, применённых к терминальному слагаемому функционала (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00261-а).

Литература

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщённых функций // Обобщённые функции. Т. 2. М.: Физматгиз, 1958.

2. Kurzhanski A. B., Daryin A. N. Dynamic programming for impulse controls // Annual Reviews in Control. 2008. V. 32. N. 2. P. 213–227.

3. Daryin A. N., Kurzhanski A. B., Minaeva Yu. Yu. On the Theory of Fast Controls under Disturbances // 18th IFAC World Congress. Milan, 2011.

О структуре информационного множества кусочно-линейной системы

Точилин Павел Александрович

Кафедра системного анализа, e-mail: `tochilin@cs.msu.ru`

В работе рассматривается задача гарантированного оценивания для кусочно-линейных управляемых систем, представляющих собой частный случай гибридных. Их динамика в каждый момент времени описывается при помощи одной из “стандартных” подсистем, заданных при помощи линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A^{(i)}(t)x + B^{(i)}(t)u(t) + C^{(i)}(t)v(t), \quad t \in [t_0, t_1],\ i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Здесь $u(t)$ — управляющий параметр, $v(t)$ — помеха (неопределенность), которая считается неизвестной априори. На указанные параметры наложены жесткие, по-точечные ограничения: $u(t) \in \mathcal{P}(t)$, $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$ с выпуклыми и компактными ограничивающими множествами. В каждый момент времени активной является лишь одна из подсистем. Мгновенные изменения активной подсистемы (*переключения*) происходят на гиперплоскостях $\mathcal{H}^{(k)} = \{x : \langle x, c^{(k)} \rangle = \gamma^{(k)}\}$ ($k \in \{1, \ldots, M\}$), задающих так называемые *зоны переключений*. Каждая смена активной подсистемы не сопровождается скачком вектора фазовых переменных. Переключения на $\mathcal{H}^{(k)}$ являются обязательными.

Наряду с уравнениями динамики рассматриваются уравнения наблюдений следующего вида:

$$y(t) = H(t)x + \xi(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

где $\xi(t) \in \mathcal{R}(t)$ — помеха измерения.

Для кусочно-линейной системы рассматривается задача гарантированного оценивания, состоящая в построении множественной оценки состояния системы (т. е. значения фазового вектора $x(t)$) в текущий момент времени на основании доступных результатов измерений $y(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$. Как известно, такая задача сводится к построению множества достижимости системы при известной функции $u(t)$ и неизвестных $v(t)$, $\xi(t)$. В случае кусочно-линейных систем данная задача осложняется нетривиальной структурой множеств достижимости. В связи с этим в работе предложен новый подход к выделению из невыпуклого информационного множества семейства выпуклых “ветвей” с более простой структурой. Такие множества могут быть найдены при помощи подходов динамического программирования и выпуклого анализа, а также подсчитаны численно за счет использования модификаций методов эллипсоидального исчисления. Выведены формулы, позволяющие строить как внутренние, так и внешние оценки информационного множества, которые, в частности, могут быть использованы для решения задачи управления кусочно-линейной системой на основании неполных и неточных данных.

Литература

1. Куржанский А. Б., Точилин П. А. Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. Т. 44. № 11. 2008. С. 1523–1533.

2. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977.

О методах численного исследования нелинейных эффектов в задачах поверхностной плазмоники

Магницкий Николай Александрович, Буров Дмитрий Анатольевич

Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: `nikmagn@mail.ru`, `gsarret@gmail.com`

Сформулирована и численно исследована двумерная задача распространения поверхностных плазмон-поляритонных резонансных волн на границе раздела металл-диэлектрик с применением различных моделей диэлектрической функции. Воспроизведен эффект самофокусировки [1] в конфигурации задачи с диэлектрической функцией, квадратично зависящей от напряженности поля (так называемый закон Керра [2]):

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_{\text{lin}} + \alpha|E|^2,$$

где ε_{lin} — линейная часть функции, α — нелинейный коэффициент, E — напряженность электромагнитного поля. Уравнения Максвелла моделировались конечно-разностной аппроксимацией по пространству-времени [3].

Благодарности

Авторы выражают благодарность Рябкову О. И. за ценные замечания и плодотворные дискуссии.

Литература

1. A. R. Davoyan, I. V. Shadrivov, Yu. S. Kivshar. Self-focusing and spatial plasmon-polariton solitons. Optics Express, Vol. 17, Issue 24, pp. 21732–21737, 2009.
2. T. A. Laine. Electromagnetic wave propagation in nonlinear Kerr media. — Stockholm, 2000.
3. D. Sarid, W. Challener. Modern introduction to surface plasmons: theory, mathematica modelling, and applications. — Cambridge University Press, 2010.

Сверхстабилизация линейных динамических объектов при наличии операторных возмущений

Фурсов Андрей Серафимович[1], Хусаинов Эльдар Фаридович[2]

[1] МГУ имени М. В. Ломоносова, ф-т ВМК, кафедра НДСиПУ, e-mail: `i.i.fursov@cs.msu.su`
[2] МГТУ имени Н. Э. Баумана, кафедра ФН-12, e-mail: `p.p.xluttiy@gmail.com`

Предметом исследования настоящей работы является проблема поиска регулятора в виде линейной обратной связи по состоянию, обеспечивающего устойчивость замкнутого объекта при наличии внешних операторных возмущений.

В работе рассматривается линейный стационарный скалярный по входу динамический объект, заданный с помощью системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + bu; \tag{1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ — матрицы параметров объекта, $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}$ — управляющий вход. Пусть $\Gamma = \{1, \dots, n\}$, $Q = \{Q_1, \dots, Q_l\}$, где $Q_j \subset \Gamma$. Будем говорить, что объект (1) находится в условиях действия на него (d, Q)*—возмущений*, если во время его функционирования, в некоторые заранее неизвестные моменты времени может скачком обнулиться подмножество его фазовых переменных с индексами из какого-либо множества $Q_i \in Q$. При этом математическая модель объекта меняется следующим образом: из системы (1) вычёркиваются строки, соответствующие этим фазовым переменным, а в остальных уравнениях соответствующие фазовые переменные приравниваются к нулю (таким образом, динамический порядок объекта уменьшается). Будем говорить, что объект (1) находится под действием (p, V)-возмущений, если в процессе функционирования могут скачком поменяться какие-либо его параметры, т. е. коэффициенты матриц A, b. Возможные изменения параметров задаются множеством $V = \{V_1, \dots, V_k\}$ пар матриц $V_j = \{\Delta A_j, \Delta b_j\}$, т.е. (p, V_j)-возмущение объекта (1) приводит к системе

$$\dot{x} = (A + \Delta A_j)x + (b + \Delta b_j)u.$$

Множества Q и V задают конечный набор из m объектов различных порядков

$$\dot{x}^j = A_j x^j + b^j u, \quad j = 1, \dots, m,$$

каждый из которых является результатом воздействия на него соответствующих (d, Q) и (p, V)-возмущений.

Постановка задачи. Построить стабилизирующую линейную стационарную обратную связь $u = \theta x$, обеспечивающую асимптотическую устойчивость замкнутого объекта (1) при действии на него (d, Q) и (p, V)-возмущений.

С помощью метода расширения динамического порядка [1] можно свести эту задачу к задаче одновременной стабилизации объектов одного порядка, а затем применить алгоритм поиска единого сверхстабилизирующего регулятора [2] для получившегося семейства объектов.

Литература

1. Емельянов С.В., Ильин А.В., Фомичев В.В., Фурсов А.С. Одновременная стабилизация объектов различных порядков // Дифференц. уравнения, 2013, Т. 49, N 5. С. 649-655.

2. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.

Приложение методов LMI к задачам стабилизации и наблюдения

Капалин Иван Владимирович

Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: `ikapalin@gmail.com`

На данный момент актуальным направлением исследований в теории автоматического управления является поиск эффективных численных процедур, для построения решения той или иной задачи управления: стабилизации, наблюдения, обращения и др. Это связано с тем, что некоторые задачи требуют для своего решения с ростом размерности огромного количества вычислительных мощностей, такие задачи в большинстве своем относятся к NP трудным задачам. Достаточно много работ, посвященных исследованию NP трудности задач теории автоматического управления [1-4], и есть работы [5], посвященные поиску численных процедур для таких задач.

В данной работе рассматриваются задачи синтеза наблюдателя и стабилизатора минимальной размерности [6] и задача синтез одновременно стабилизирующего регулятора [7, 8]. Эти задачи связаны и могут быть сведены к одной задаче, которая оказывается NP трудной. Решение последней задачи это пересечение двух множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$: множества устойчивых многочленов $\gamma(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i s^i$, которое обозначим+$S$, и линейного многообразия, описываемого уравнением $H\tilde{\gamma} = h$, где $\tilde{\gamma}$ — столбец коэффициентов полинома $\gamma(s)$ без старшего коэффициента.

Для решения задачи пересечения используется алгоритм предложенный в работе [5]. Предлагается аппроксимировать множество S некоторым LMI множеством M_c изнутри. Тогда задача становится выпуклой и, соответственно, простой для решения. Однако, в выборе множества M_c есть векторный параметр c, который можно выбирать достаточно в больших пределах, что дает возможность подбирать его, исходя, например, из соображений размеров множества M_c. Исследованию вопроса выбора этого полинома посвящена данная работа.

В данной работе проведено моделирование решения рассматриваемых задач синтеза теории автоматического управления, получены примеры, характеризующие алгоритм из работы [5].

Литература

1. Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автомат. и телемех. 2005. № 5, С. 7–46.

2. Blondel V., Tsitsiklis J. N. NP-hardness of some linear control design problems // SIAM J. Contr. Optim. 1997. V. 35. N. 6. P. 2118–2127.

3. Nemirovskii A. A. Several NP-hard problems arising in robust stability analysis // Math. Control, Signals, Systems. 1994. V. 6. P. 99–105.

4. Minyue F. Pole Placement via Static Output Feedback is NP-Hard // IEEE Trans. Autom. Contr. 2004. V. 49, N. 5, P. 855–857.

5. Henrion D., Arzelier D., Peaucelle D. Positive polynomial matrices and improved LMI robustness conditions // Automatica. 2003. V. 39, N. 8. P. 1479–1485.

6. Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В. Синтез минимальных линейных стабилизаторов // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 49. № 5. С. 675–685.

7. С. К. Коровин, А. С. Фурсов Одновременная стабилизация: синтез универсального регулятора // Автомат. и телемех. 2011. № 9. С. 61–73.

8. Blondel V. Simultaneous stabilization of linear systems. London : Springer, 1995.

СЕКЦИЯ VII

Кафедра алгоритмических языков, лаборатории троичной информатики, открытых информационных технологий, вычислительного практикума и информационных систем

Об одном возможном подходе к созданию универсального языка программирования

Столяров Андрей Викторович, Французов Олег Георгиевич

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: `avst@cs.msu.ru, franoleg@intelib.org`

Под универсальным языком программирования мы намерены понимать ЯП, подходящий для реализации абсолютно любого проекта, причем настолько, чтобы аргументы против использования такого ЯП были заведомо лишены объективного технического наполнения. Очевидно, что в настоящее время такого ЯП не существует; из опыта развития ЯП обычно делается вывод, что создание такого языка невозможно, т. е., каков бы ни был ЯП, найдётся такая сфера применения, в которой этот язык будет отвергнут в пользу другого в соответствии с объективными критериями. В частности, языки со встроенной сборкой мусора заведомо не подходят для создания систем реального времени; интерпретируемые языки во многих задачах отвергаются из-за необходимости наличия интерпретатора, что не всегда приемлемо, а также из-за неизбежных потерь в эффективности исполнения; более того, многие ЯП высокого уровня и даже ЯП, “всего лишь” предполагающие заведомо ненулевой размер библиотеки времени исполнения, приходится отвергнуть при программировании микроконтроллеров и ядер операционных систем. С другой стороны, низкоуровневое программирование с применением языков ассемблера и даже языка Си оказывается слишком трудоёмким. Более того, для многих задач лучше подходят альтернативные стили и парадигмы программирования, такие как функциональное или логическое программирование, не говоря уже о суперпопулярной парадигме ООП.

Язык Си++ на начальных этапах своего развития удачно сочетал достоинства языков низкого уровня с возможностью синтеза абстракций уровня сколь угодно высокого; более того, проект InteLib [1] и некоторые другие аналогичные разработки показывают, что возможностей Си++ достаточно для эффективного применения едва ли не любых парадигм программирования. Однако целый ряд встроенных возможностей Си++, включённых в него позже, таких как RTTI, обработка исключений и т. п., требует достаточно сложной библиотеки времени исполнения, что делает этот язык в его современном виде непригодным для ряда предметных областей. Кроме того, для современного Си++ чрезвычайно высок барьер вхождения, язык сам по себе довольно сложен, а с учетом его “стандартной библиотеки” Си++ приходится окончательно забраковать в качестве кандидата в “универсальные ЯП”.

Опыт Си++ позволяет представить себе язык программирования низкого уровня, совместимый с Си по объектному коду, но не обязательно Си-подобный по синтаксису, при этом имеющий средства генерации высокоуровневых абстракций (классы, подобные Си++, вкупе с возможностью переопределения символов арифметических операций). Если при этом любые возможности, требующие нетривиальной реализации, будут вытеснены в библиотеки, а сами библиотеки будут исходно предполагаться сменными (то есть никакая библиотека не будет иметь статуса “стандартной”), такой язык сможет претендовать на роль универсального; современное многообразие языков программирования может быть при этом заменено многообразием библиотек.

Литература

1. Головин И., Столяров А. Объектно-ориентированный подход к мультипарадигмальному программированию // Вестник Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. № 1. 2002. С. 46–50.

Коррекция ошибок сочетаемости слов на основе статистики синтаксических связей

Большакова Елена Игоревна, Азимов Александр Евгеньевич

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: `mitradir@gmail.com, eibolshakova@gmail.com`

Одна из существенных особенностей естественных языков — исторически сложившаяся в каждом конкретном языке сочетаемость слов. Лексические ошибки, нарушающие сложившуюся сочетаемость (например, “дать значение” вместо “иметь значение”), нередко допускаются людьми даже в родном языке, а в случае иностранного языка они возникают гораздо чаще. Современные системы редактирования тестов выявляют орфографические и, частично, синтаксические ошибки, однако пока не распознают и не корректируют ошибки сочетаемости слов.

В последние годы появились работы, в которых исследуются методы поиска и исправления ошибок сочетаемости слов, основанные на использовании статистики (частот) встречаемости слов, например [1]. В настоящей работе описывается предложенный метод автоматической коррекции ошибок сочетаемости, возникающих в результате перевода с помощью словаря или с использованием машинного перевода. Предполагается, что основной причиной возникновения ошибок сочетаемости является применяемая стратегия пословного перевода — по этой причине ошибки зависят не только от целевого языка, но и от исходного языка переводчика. Разработанный метод основан на данных переводного словаря и на статистике синтаксических связей слов целевого языка. В отличие от разработанных ранее методов, предложенный метод не имеет ограничений на виды и количество исправляемых словосочетаний в предложении.

Для поиска и исправления ошибок последовательно рассматриваются предложения обрабатываемого текста. Для каждого предложения осуществляется синтаксический разбор с получением синтаксического дерева зависимостей. Указанное дерево, а также все деревья, получаемые путем замены в нем слов в узлах дерева на их слова-замены, оцениваются с использованием статистики синтаксических связей слов. Набор слов-замен для каждого узла дерева строится по переводному словарю с использование словаря синонимов. Процесс перебора деревьев и определения наиболее вероятного дерева-замены реализован с использованием методов динамического программирования, что значительно снижает алгоритмическую сложность метода. Если полученное наиболее вероятное дерево-замена отлично от дерева исходного предложения, то оно представляет собой его исправление.

Разработанный метод был реализован для исправления ошибок сочетаемости слов в английских текстах, написанных русскоязычными авторами. Для создания базы статистики синтаксических связей английских слов был проведен автоматический синтаксический разбор предложений из обширной коллекции текстов (более 200 млн слов) с использованием синтаксического анализатора Stanford Parser. Проведенное тестирование метода показало его перспективность: в тестовом наборе было выявлено 80% ошибок сочетаемости, причем 87% предложенных вариантов коррекции совпали с лингвистически верным вариантом исправления.

Литература

1. Brockett C., Dolan W., Gamon M. Correcting ESL Errors Using Phrasal SMT Techniques // Proc. of the 21st Int. Conference on Computational Linguistics and the 44th annual meeting of the ACL, 2006.

Троичная схемотехника — устройства с памятью

Маслов Сергей Петрович

Лаборатория троичной информатики ВМК, e-mail: `spmaslov@gmail.com`

Троичная Схемотехника (ТС) — результат переосмысления опыта, полученного более 50-и лет тому назад при разработке троичных ЭВМ “Сетунь” [6]. Логические элементы этих машин, реализующие Троичную Пороговую Логику [6], основывались на электромагнитной технике. В ходе эволюции компьютеров интегральные полупроводниковые схемотехники вытеснили электромагнитную технику.

В 2009–2012 гг. автором запатентованы функциональные аналоги элементов “Сетуни”, реализуемые средствами интегральных технологий: группы изобретений “Пороговый Элемент Троичной Логики” (ПЭТЛ) [1] и “Устройство Троичной Схемотехники” (УТС) [2]. Разработку троичных устройств на ПЭТЛ и УТС поддерживает специально созданная Троичная Схемотехника (ТС) [4].

На основе ТС осуществлены различные троичные комбинационные схемы: полусумматор, дешифраторы, мультиплексоры и демультиплексоры [1, 2]. В 2013 г. запатентована группа изобретений “Троичный D триггер (варианты)” [3], в котором описаны четыре разновидности D триггера: две — с записью по уровню синхросигнала, и две — с записью по его фронту. Тем самым, ассортимент средств ТС пополнился схемами с памятью — компонентами, наличие которых обязательно для создания всего спектра троичных устройств.

В настоящее время подготовлена и подана заявка на патентование группы изобретений, основанных на использовании Троичных D-триггеров — “Троичный Т триггер и троичный реверсивный счетчик на его основе”.

Литература

1. Маслов С. П. Пороговый элемент троичной логики и устройства на его основе. Патент РФ на изобретение: RU № 2278469 C1.

2. Маслов С. П. Узел троичной схемотехники и дешифраторы-переключатели на его основе. Патент РФ на изобретение: RU № 2461122 C1.

3. Маслов С. П. Троичный D-триггер (варианты). Патент РФ на изобретение. (имеется решение ФИПС о выдаче патента по заявке № 2012140688).
4. Маслов С. П. Троичная схемотехника // Программные системы и инструменты. Тематический сборник. № 13. М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2012.
5. Брусенцов Н. П., Жоголев Е. А., Маслов С. П., Рамиль Альварес Х. Опыт создания троичных цифровых машин // Компьютеры в Европе. Прошлое, настоящее и будущее. Киев: Феникс, 1998. С. 67–71.
6. Брусенцов Н. П. Пороговая реализация трехзначной логики электромагнитными средствами // Вычислительная техника и вопросы кибернетики. Вып. 9. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1972. С. 3–35.

Алгоритм деления по модулю в симметричных системах счисления

Владимирова Юлия Сергеевна, Рамиль Альварес Хосе

Лаборатория троичной информатики ВМК, e-mail: `vladimirova@cs.msu.ru, ramil@cs.msu.ru`

Рассматриваются особенности алгоритма деления целых чисел по модулю, известного как деление “в столбик” или “цифра за цифрой”, в симметричных системах счисления с произвольным основанием.

В симметричных системах счисления делением числа a на число d по модулю остатком называется представление a в виде:

$$a = b \cdot d + r, \tag{1}$$

где b — неполное частное, r — остаток, который удовлетворяет неравенству:

$$-|d|/2 \leqslant r \leqslant |d|/2. \tag{2}$$

Алгоритм деления в симметричных системах счисления отличается от аналогичного алгоритма в системах счисления с неотрицательными цифрами следующим:

1. При d четном, количество чисел, удовлетворяющих (2), составляет $|d| + 1$. При $|r| = |d|/2$ допустимы два представления числа a:

$$a = b \cdot d + |d|/2 \quad \text{или} \quad a = (b+1) \cdot d - |d|/2.$$

2. В некоторых случаях очередная цифра частного и остаток определяются не только соотношением очередного делимого и делителя, но и знаком необработанной части делимого.
3. При нечетных d вычисление $|d|/2$ в симметричных системах счисления затруднено. В предлагаемом алгоритме используется прием, позволяющий избежать вычисления $|d|/2$.

Литература

1. Брусенцов Н. П. Алгоритмы деления для троичного кода с цифрами 0, 1, –1 // Вычислительная техника и вопросы кибернетики. Вып. 10. Л.: Изд во ЛГУ, 1974. С. 39–44.

2. Рамиль Альварес Х. Троичное деление целых чисел // Алгоритмы троичной арифметики. М., Фонд “Новое тысячелетие”, 2012. С. 7–13.

3. Кнут Д. Искусство программирования. Т. 2. Получисленные алгоритмы. 3-е изд. М.: “Вильямс”, 2007.

4. Владимирова Ю. С., Рамиль Альварес Х. Алгоритм деления по модулю в симметричных системах счисления // Программные системы и инструменты. № 14. Под ред. Л. Н. Королева. М.: Издательский отдел ВМиК МГУ, 2013. С. 199–208.

Выделение групп пользователей в данных мобильного мониторинга

Намиот Дмитрий Евгеньевич

Лаборатория открытых информационных технологий ВМК, e-mail: `dnamiot@gmail.com`

В работе рассматривается задача анализа данных о присутствии мобильных пользователей (мобильных телефонов) в некоторой выделенной области. В качестве основы (технической базы) для сбора таких данных используется информация доступная из анализа беспроводных протоколов (Wi-Fi, Bluetooth) [1]. Массив собранных данных является аналогом системы веб-статистики, оперирующей с реальными мобильными абонентами вместо посещений (хитов) для веб-страниц [2].

В результате анализа подобного рода информации можно получить данные о посещаемости, определять и анализировать тренды в пользовательском трафике, определять ядро (постоянных посетителей), раскрывать его динамику и т. д. Вместе с тем, технические аспекты измерений (сбора данных) влекут за собой некоторые принципиальные отличия от систем веб-статистики. Это также позволяет проводить новые исследования, которые не проводились (не проводятся) для традиционных систем анализа веб-логов [3–5].

Из анализа различных шаблонов, выделяемых при анализе веб-логов, мы определили одно направление, которое остается практически не охваченным — это поиск и выделение групп пользователей. Группа — это мобильные устройства, которые регистрировались совместно каждый выделенный квант измерений на протяжении некоторого заданного временного интервала. По сути, вопрос состоит в поиске некоторой связи между мобильными пользователями, на основании факта их совместной регистрации системой мониторинга в течение некоторого времени. Именно это и является предметом рассмотрения данной работы.

Литература

1. Namiot D. Mining Relationships in Proximity Movements // Applied Mathematical Sciences. 2013. Т. 7. № 144. С. 7173–7177.

2. Namiot D., Sneps-Sneppe M. Wireless Networks Sensors and Social Streams // Advanced Information Networking and Applications Workshops (WAINA), 27th International Conference on. IEEE, 2013. С. 413–418.

3. Namiot D., Shneps-Shneppe M. Analysis of trajectories in mobile networks based on data about the network proximity // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. Т. 47. № 3. С. 147–155.

4. Namiot D., Sneps–Sneppe M. Social streams based on network proximity // International Journal of Space-Based and Situated Computing. 2013. Т. 3. № 4. С. 234–242.

5. Namiot D. Network Proximity on Practice: Context-aware Applications and Wi-Fi Proximity // International Journal of Open Information Technologies. 2013. Т. 1. № 3. С. 1–4.

Федеративная база данных по дореволюционным студентам Московского университета

Леонов Михаил Васильевич, Козырев Василий Викторович

Лаборатория вычислительного практикума и информационных систем факультета ВМК, e-mail: `LeonowMW@cs.msu.su, VVKozyrev@gmail.com`

Сообщается о междисциплинарном проекте создания базы данных (БД) по имматрикуляции студентов Московского университета до 1917 года. Вводится понятие конфедеративной базы данных как наиболее удобного инструмента решения поставленной задачи.

Практически все значимые университеты мира ведут и хранят имматрикуляционные списки своих студентов. До 1917 года Московский университет выпускал ежегодные “Алфавитные списки студентов...”, которые стали теперь библиографической редкостью. Актуальность задачи вовлечения этих данных в научный и общественный оборот ни у кого не вызывает сомнений.

После анализа предметной области стало ясно, что создание единой БД по стандартным канонам технологии баз данных нереально по ряду причин. Информация по студентам в различных списках (от 1834 до 1916 года) имеет сильно отличающийся “репертуар”, и приводить набор атрибутов к единому знаменателю нецелесообразно. В списках присутствует много сокращений, непонятных иногда и историкам, и вообще подготовка данных для компьютерного ввода без потерь значимой информации требует большого объема технического, но квалифицированного труда.

Наиболее адекватным методом решения задачи нам представляется реализации концепции конфедеративной БД, которую можно определить следующим образом. Есть совокупность независимых (в нашем случае годичных) БД, каждая со своим набором таблиц. Кроме того, есть пользовательская программная оболочка, позволяющая по некоторому набору атрибутов получать ответы на запросы по всем БД “конфедерации”, а также набор процедур и утилит, обеспечивающих обновлять интегрированный список основных данных (из годичных БД), который и служит источником для запросов пользователя.

В настоящий момент конфедеративная БД состоит из БД по 1901–02 году [1] под управлением MySQL, а также БД по 1834–35, 1886–87 и 1913–14 гг. под управлением sqlite. Оболочка и утилиты написаны на языке Object Pascal в среде Lazarus. Подробнее проект представлен в работе [2].

Благодарности

Кроме авторов сообщения, над проектом работали С. А. Пенкин, А. Д. Чекмарев, М. А. Егоренкова, А. А. Ледовский. Наша искренняя благодарность за помощь и поддержку чл-корр. РАН Л. Н. Королеву, директору музея истории МГУ А. С. Орлову, заведующей Отделом редких книг и рукописей научной библиотеки МГУ И. Л. Великодной, заведующей отделом записи информации Е. А. Илясовой.

Литература

1. Леонов М. В., Пенкин С. А., Егоренкова М. А. Информационная система по студентам Московского университета 1901–02 учебного года // Программные системы и инструменты. № 13. М. : Изд-во факультета ВМК МГУ, 2012. С. 147–151.

2. Леонов М. В., Орлов А. С. Опыт создания баз данных по истории Московского университета // Актуальные проблемы Российской цивилизации и методики преподавания истории... Саратов : Издательский Центр “Наука”, 2013. С. 216–224.

Подход к реализации междисциплинарной библиотеки на основе личностного знания

Громыко Владимир Иванович[1], Казарян Валентина Павловна[2], Васильев Николай Семенович[3], Симакин Александр Георгиевич[4], Аносов Станислав Сергеевич[5]

[1] Кафедра Алгоритмические языки, e-mail: gromyko.vladimir@gmail.com

[2] Философский факультет, e-mail: vp.kazaryan@mtu-net.ru

[3] Кафедра высшей математики МГТУ им. Н. Э. Баумана, e-mail: nik8519@yandex.ru

[4] Факультет гуманитарных и социальных наук РУДН, e-mail: modus-as@mail.ru

[5] Банк “Возрождение”, e-mail: SAnosov@cs.msu.su

1. Наукоемкая системная культура требует обеспечения вхождения и существования в ней учащегося (школьник, студент, специалист). Этому предназначен проект по формированию элекронной междисциплинарной библиотеки (МЭБ). *Личностное знание* является мерой рассогласования (невежества, [1]) состояния учащегося в отношении образовательного пространства (ОП формируется на непрерывном всем пути обучения), которое факторизуется отображением на определяющий смысл системной культуры — *язык категорий* [2, 3]. Необходимая трансформация учащегося вызвана новым качеством культуры: *третий мир* документов преобразуется от фактов-данных к синтезирующему знанию [4]; соответственно возникшее состояние рода — *когногенез* — фиксирует (требует обрести) новые средства объективизации за счет врастания (соответствия) в междисциплинарное образовательное пространство (МОП — уровень теорий). *Надпредметность* становится уловимым принципом образования. Возможность и способность к *личностному росту научного знания* в отношении синтезирующего знания становится в инфосфере показателем образованности.

2. Универсальное обучение — синтезирующие мотивы — присутствуют в реформировании образования. Болонская система, урезанные предметы (математика, физика, ...) на основе неверных доводов о необходимости специализации, сокрушительные проекции предметов через надуманные потребности в них и недопустимые формы приобщения к ним ВСЕХ являются псевдо-деятельностью, т. к. не заняты главным отношением обучения *учитель-ученик*. Следствия неутешительны: факты вместо знания и насаждаемое отключение мышления через ЕГЭ в средней школе; тогда в высшей школе возникают необходимость пропедевтических курсов и плодятся методисты не по обучению, а шкалированию несостоятельности студента. Задача образования — развитие учащегося — не разрешается, т. к. не преодолевается его *профессиональная ориентированность* — приобщение учащегося к существованию в теории. Это даже при максимальном успехе в образовании означает только приведение мышления к уровню *познания* (понимание знания). Но в системной культуре планка выше — требуется деятельность в межпредметности, существование в разнообразных теориях (системах). Фактически учащийся обворован в праве соответствовать системной культуре [4], т. е. никак не допущен к становлению *сознания*, соответствующего возникшим средствах объективизации в филогенезе.

3. Математика XX в. не утратила определенности [5], а была занята определенностью по расширению *границ объективизации* в отношении систем (сложных компьютерных), превращением категоричности *аксиоматического метода* (АМ) в *системный аксиоматический метод* (САМ). Гений Гильберта расширил традицию Пифагора, обеспечив переход к *объективизации символом*, дополнив прежнюю объективизации числом [6]. *Рациональный протокол* стал еще более наукоемким, обогатившись надстройкой системных понятий: открытые (некатегоричные) теории и вложения (наследование); абстрактный тип данных (АТД) и примитивные классы (с аксиоматизирующими технологиями подалгебр, морфизмов, прямых сумм); формализация вычислимости; формализация выразимости средствами многообразий, квазимногообразий, исчислениями предикатов разных порядков. Эти расширения и их компьютерные воплощения определили САМ.

4. Учащийся в системной культуре нуждается, в первую очередь, в представлениях об устройстве инструментов с точки зрения их конструктивного покрытия теорий. Тем самым учащийся нуждается во владении современными математическими средствами объективизации: в отображениях, согласованных с алгебраическими системами; в аксиоматизации как средстве предъявления смыслов теорий; в формализации как средстве символьной основы интеллектуального моделирования. Согласно *позитивной дидактике Колмогорова* [7] кажущаяся неподъемная трудность представления САМ для изучения преодолеваются *естественностью* их возникновения на необходимом пути концептуальных обобщений в филогенезе (интеллектуальные прорывы гениев) и добываемой в культуре *очевидностью* приобщения к ним онтогенеза. Достижения в теории искусственного интеллекта (ИИ, [8]) позволяют спосбствововать тесному взаимодействию естественности и очевидности, нагружая **мыслекод** (АТД мышления) дополнительно к гуманитарному языку затребованной новой реальностью (данными мышления) — **рациональным языком**.

5. МЭБ является развитием проекта “Интеллектуальное компьютерное место учащегося”, реализуемого на факультете ВМК в рамках семинара “Обучающие системы” [9]. Продвижение состоит в конструктивной разработке представлений САМ с точки зрения возможности приобщения к ним учащегося с использованием МОП и его факторизации на уровне смыслов теорий. Очевидность-естественность их предъявления становится задачей конструирования МЭБ как среды существования учащегося вида адаптивной *личностной базы данных* (ЛБД) для деятельности на уровне теорий (личностная МОП, т. е. ЛМОП как *адаптивная среда знаний*). Необходимы:

- для учащегося разнообразные документы (учебники): индуктивные, проективные, дополнительные, связывающие крайности; **протокол погружения документов** в МЭБ предполагает: наличие фильтров из золотого фонда учебников филогенеза; все документы образуют иерархию, являясь наследниками цели МЭБ — языка категорий;

- сформированная **структура сложности** рационального языка объективизации, которая должна служить основой *системы поиска* учебных материалов для формируемого самим учащимся требуемой **рациональной надстройки сознания**; этим определяется взаимодействие *прямого* (индуктивные материалы) и *обратного* (проективные материалы) *путей обучения*; взаимодействие должно адаптироваться к личностной несостоятельности учащегося в отношении полного отсутствия навыков деятельности на уровне главных смыслов теории (как представляется, исследуется, доказывается);

- **суперкомпьютер** для организации МЭБ как открытой среды непрерывного существования в ней учащегося, обеспечивающего работу учащегося на его ЛМОП в режиме адаптивного поисковика в сеансе работы.

6. Преподаватель, работающий в условиях существования учащегося с ЛМОП, обретает ресурс управления развитием учащегося и тем самым соответствует делу, достойному звания учителя. Без подобной реанимации связки учитель-ученик невозможно разрешить проблему достойного существования человека в системной культуре.

Литература

1. Громыко В. И. и соавторы. Интеллектуальные обучающие системы: проблема развития мышления в системно-информационной культуре // Юбилейные Ломоносовские чтения. МГУ, ноябрь 2011. С. 61–63.

2. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. М.: Мир, 1983. 488 с.

3. Громыко В. И. и соавторы. Синтез курсов обучения в интеллектуальной обучающей системе // Ломоносовские чтения. МГУ, апрель 2013. С. 92.

4. Громыко В. И. и соавторы. Рациональное образование как технология сознания // The complex systems. Interdisciplinary Scientific Journal. № 3(8). М.: ООО “Приятная кампания”, 2013. С. 87–107.

5. Клайн М. Математика. Утрата определенности. М.: Мир, 1984. 434 с.

6. Энгелер Э. Метаматематика элементарной математики. М.: Мир, 1987. 128 с.

7. Успенский В. А. Апология математики. С-Пт.: Амфора, 2009.

8. Пинкер С. Субстанция мышления. Язык как окно в человеческую природу. М.: КД “Либроком”, 2013. 560 с.

9. Громыко В. И., Аносов С. С., Ельцин А. В., Леонов М. И. Обучение в системно-информационной культуре — на пути реализации // Программные системы и инструменты. Тематический сборник. Вып. 11. М.: МГУ ВМК, 2010.

СЕКЦИЯ VIII

Кафедры вычислительных методов, суперкомпьютеров и квантовой информатики и автоматизации научных исследований

Об устойчивости нелокальных разностных схем в подпространствах

Гулин Алексей Владимирович[1], **Морозова Валентина Алексеевна**[2]

[1] Кафедра вычислительных методов, e-mail: vmgul@cs.msu.su

[2] Кафедра математической физики, e-mail: moroz@cs.msu.su

Рассматривается разностная схема

$$\begin{aligned} &y^n_{t,i} - y^{(\sigma)}_{\bar{x}x,i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad n = 0, 1, \ldots, \\ &y^0_i = u_0(x_i), \quad y^{n+1}_0 = 0, \quad \frac{h}{2} y^n_{t,N} + y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} - \gamma y^{(\sigma)}_{x,0} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

с параметром γ, $\gamma > 1$. Основной разностный оператор A обладает базисной системой $\left\{\mu^{(k)}\right\}_{k=0}^{N-1}$ собственных векторов, так что $A\mu^{(k)} = \lambda_k \mu^{(k)}$ (см. [1]). Введем матрицу $M = \left[\mu^{(0)}\,\mu^{(1)}\,\cdots\,\mu^{(N-1)}\right]$, столбцами которой являются векторы $\mu^{(k)}$ с компонентами $\mu^{(k)}_i = \mu^{(k)}(x_i)$. Пусть для определенности число N — четное. Зададим целое число l такое, что $1 \leqslant l \leqslant N/2$, и положим $H = \tilde{H}_1 \oplus \tilde{H}_2$, где $\tilde{H}_1 = \operatorname{span}\left\{\mu^{(0)},\, \mu^{(1)},\, \ldots,\, \mu^{(2l-2)}\right\}$, $\tilde{H}_2 = \operatorname{span}\left\{\mu^{(2l-1)},\, \mu^{(2l)},\, \ldots,\, \mu^{(N-1)}\right\}$. Подпространство $\tilde{H}_1$ является линейной оболочкой неустойчивых гармоник, для которых $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$. Напротив, все гармоники, образующие подпространство $\tilde{H}_2$ — устойчивые. С увеличением параметра γ число $2l-1$ неустойчивых гармоник возрастает.

Пусть s_k — собственные значения оператора перехода разностной схемы (1). Назовем схему (1) спектрально устойчивой на гармониках $\mu^{(2l-1)}, \mu^{(2l)}, \ldots, \mu^{(N-1)}$, если выполнены неравенства $|s_k| \leqslant 1$, $k = 2l-1, 2l, \ldots, N-1$. Критерий спектральной устойчивости найден в работе [2]. Следующая теорема говорит о том, что следствием спектральной устойчивости является устойчивость в некоторой гильбертовой норме.

Теорема 1. Если разностная схема (1) спектрально устойчива на гармониках $\mu^{(2l-1)}, \mu^{(2l)}, \ldots, \mu^{(N-1)}$, то для ее решения $y^{(2)}_n = \left(0\,0\,\cdots\,0\,y^n_{2l}\,y^n_{2l+1}\,\cdots\,y^n_N\right)^{\mathrm{T}}$ справедлива оценка $(D_{22}y^{(2)}_{n+1}, y^{(2)}_{n+1})_2 \leqslant (D_{22}y^{(2)}_n, y^{(2)}_n)_2$, $D_{22} = (hM_{22}M^*_{22})^{-1}$, выражающая устойчивость в подпространстве $\tilde{H}_{2.D_{22}}$. Здесь

$$(y^{(2)}, v^{(2)})_2 = \sum_{i=2l}^{N} h y^{(2)}_i \bar{v}^{(2)}_i \quad M_{22} = \begin{bmatrix} \mu^{(2l-1)}_{2l} & \mu^{(2l)}_{2l} & \cdots & \mu^{(N-1)}_{2l} \\ \mu^{(2l-1)}_{2l+1} & \mu^{(2l)}_{2l+1} & \cdots & \mu^{(N-1)}_{2l+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu^{(2l-1)}_{N} & \mu^{(2l)}_{N} & \cdots & \mu^{(N-1)}_{N} \end{bmatrix}, \quad M^*_{22} = \bar{M}^{\mathrm{T}}_{22}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00908).

Литература

1. Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В. А. Разностные схемы для нестационарных нелокальных задач. М. : Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, 2010.

2. Гулин А. В. О спектральной устойчивости в подпространствах разностных схем с нелокальными граничными условиями // Дифференц. уравнения. 2013. Т 49. № 7. С. 844–852.

Совместная релаксация электронных оболочек пары двух-уровневых атомов в кубитовом представлении

Ожигов Юрий Игоревич, Сковорода Никита Андреевич

Кафедра суперкомпьюетров и квантовой информатики, e-mail: `ozhigov@cs.msu.su`

Цель работы — моделирование процесса взаимодействия двух двух-уровневых атомов через обмен фотонами. Используется язык кубитов для возможного применения нашей модели при построении квантовых процессоров на взаимодействии нескольких атомов с единичными фотонами. Мы использовали кубитовую форму модели Джейнса-Каммингса-Хаббарда (JCH), ограниченную двух-фотонными возбуждениями, а также ее сжатую модификацию, не учитывающую перемещение фотонов между резонаторами. Релаксация представлялась в виде уравнения Коссовского-Линдблада на матрицу плотности состояний электронов и фотонов. Указаны точные варианты семантики кубитов в обоих разновидностях модели, и построена проекция JCH на сжатую модель. Получены зависимости времени релаксации от вероятности перелета фотона между атомами и амплитуды взаимодействия фотона с атомом, а также вычислена степень согласия матриц плотности в обоих вариантах модели. Описан также артефакт неполной релаксации в сверх-сжатом варианте такой модели, когда мы не различаем пространственного положения фотона в случае, когда он единственный.

Решение шестимерных кинетических уравнений с оператором Кулоновских столкновений методом сглаженных частиц

Зайцев Федор Сергеевич, Аникеев Федор Александрович

Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: `zaitsev@cs.msu.su, snowfed@gmail.com`

В настоящее время ведутся интенсивные исследования по поиску новых источников энергии. Одним из наиболее перспективных направлений является управляемый термоядерный синтез (УТС). Международным сообществом с участием России реализуется проект строительства реактора-токамака ITER, который призван показать экономическую целесообразность использования термоядерной энергии в промышленных масштабах.

Одной из важных задач проблемы УТС является моделирование поведения частиц высоких энергий, так как именно такие частицы определяют энергобаланс плазмы и эффективность термоядерной электростанции [1]. В частности, с быстрыми частицами связан процесс термоядерного синтеза, эффект нагрева плазмы высокочастотным магнитным полем, а также повышенные тепловые и радиационные нагрузки на элементы конструкции установки.

Из общей модели динамики заряженных частиц в полностью ионизированной плазме путем перехода к описанию каждого сорта частиц с помощью функции распределения строится кинетическая модель, состоящая из системы уравнений в частных производных с оператором Кулоновских столкновений Ландау. Каждому сорту частиц соответствует одно уравнение. В кинетической модели функция распределения зависит от времени и шести фазовых переменных: трех геометрических и трех скоростных. Кинетическое уравнение является шестимерным, т. к. в него входят производные по всем шести фазовым переменным. Оператор Кулоновских столкновений — трехмерным, т. к. действует только в пространстве скоростей.

В последние годы для решения задач механики сплошной среды широкое распространение получает метод SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics). Достаточно полные обзоры метода с развернутым анализом различных аспектов алгоритма представлены, например, в [2, 3]. Метод SPH имеет ряд преимуществ перед традиционными сеточными методами и методами Монте-Карло. Широкое применение метода SPH, которому уже более 30-и лет, в основном, сдерживалось отсутствием оценок погрешности аппроксимации метода. В конце 2013 г. такая оценка получена Ф. С. Зайцевым.

В докладе будет сформулирована математическая задача, представлен численный алгоритм решения шестимерного кинетического уравнения методом SPH, обсуждены результаты расчетов.

Литература

1. Ф. С. Зайцев. Математическое моделирование эволюции тороидальной плазмы. 2-е издание. — Москва: МАКС Пресс, 2011, 640 с.
2. Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics. // Rep. Prog. Phys. 2005, v. 68, p. 1703-1759.
3. M.B. Liu, G.R. Liu. Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments. // Arch. Comput. Methods. Eng. 2010, v. 17, p. 25-76.

Управление границей плазмы на основе решения обратной задачи методом эпсилон-сетей

Зайцев Федор Сергеевич, Сучков Егор Петрович

Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: `zaitsev@cs.msu.su`, `suchkov.egor@gmail.com`

Ведущие страны мира, включая Россию, предполагают переход к термоядерной энергетике, основанной на безопасном, практически неисчерпаемом источнике энергии. С участием России строится международный термоядерный реактор-токамак ITER. В Японии международное сообщество будет сооружать первую термоядерную электростанцию DEMO. Центральной проблемой, определяющей сроки перехода к термоядерной энергетики, является проблема управления плазмой в реальном времени с обратной связью на основе развитых теоретических представлений.

Наибольшую значимость имеют задачи управления формой и положением границы плазмы и управления динамикой внутренних параметров плазмы. Однако методы решения данных задач остаются слабо развитыми из-за необходимости использования комплексных математических моделей, решения сложных некорректных обратных задач диагностики плазмы, разработки объёмного наукоёмкого программного обеспечения и применения высокопроизводительной вычислительной техники. Лишь недавно в рамках проекта International Tokamak Physics Activity удалось собрать группу по управлению плазмой для обобщения мирового опыта и его применением в ITER.

На практике при построении контроллеров обычно применяются полуэмпирические, сильно упрощенные модели плазмы или используется предписанный (программный) режим управления, что приводит к объёмной дорогостоящей работе по экспериментальному подбору параметров систем управления и большому количеству преждевременных срывов разряда во время научно-исследовательских компаний.

Математические модели плазмы разного уровня детализации, обратные задачи диагностики плазмы, реализующее их численные методы и программное обеспечение систематически представлены в книге [1]. Там же математически точно сформулированы основные задачи управления и приведены некоторые методы и результаты их исследования. Ряд работ, например [2], посвящён задачам управления плазмой на временах порядка сотых и тысячных долей времени протекания разряда. Однако ни один из имеющийся сейчас в мире результатов не воплощён в виде полноценного программно-аппаратного макета, готового для применения в исполнительных устройствах токамака. Более того, численные методы и вычислительная техника, позволяющие решать в реальном времени с заданной точностью необходимые для управления обратные задачи диагностики плазмы появились лишь недавно.

Доклад посвящён обсуждению построения алгоритмической части системы автоматического управления с обратной связью в реальном времени на основе метода эпсилон-сетей.

Литература

1. Зайцев Ф. С. Математическое моделирование эволюции тороидальной плазмы. 2-е издание. — Москва: МАКС Пресс, 2011. 640 с.

2. Kostomarov D. P., Zaitsev F. S., Shishkin A. G., Matejcik S., Anikeev F. A., Dontsov E. V. Toroidal Current Control in the Problem of Plasma Equilibrium Evolution // 2013 IFAC Conference. 2013. Saint Petersburg, Russia, FrA7.4. P. 1–6.

Применение адаптивных технологий для определения подлинности произведений живописи по цифровым изображениям

Шишкин Алексей Геннадиевич, Лукьяница Андрей Александрович

Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: `shishkin@cs.msu.su, luk@ic.msu.su`

Определение авторства живописи по изображению картины является очень сложной задачей, над которой работают различные научные группы в разных странах. Помимо различных математических аспектов, сложность данной задачи обусловлена также существенными трудностями получения оцифрованных изображений высокого разрешения большого числа картин одного и того же автора, а также существующей вероятностью исследования подделок вместо подлинника.

Наша цель состояла в определении того, какие признаки не являются уникальными для автора, а характеризуют лишь стиль работы. В нашем распоряжении оказалось около 200 цифровых снимков работ Малевича, про которого известно, что в его творчестве было 3 основных периода. Используя эту информацию, мы провели цифровую обработку изображений и провели автоматическую классификацию этих работ. Если автоматическая классификация давала неверные результаты, мы находили признаки, которые приводили к ошибке, и этот процесс повторяли до достижения правильных ответов. В результате нами была выделена группа признаков, которая “отвечает за стиль работы”. В качестве характерных признаков мы использовали большую группу характеристик, полученных в результате вейвлет-фильтрации и фрактального анализа.

Оптимизация параметров автостереоскопических устройств

Лукьяница Андрей Александрович

Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: `luk@ic.msu.su`

Автостереоскопическими называются устройства, на которых наблюдатель может видеть стереоизображение естественным образом, без использования каких-либо дополнительных приспособлений типа стереоочков.

В настоящей работе рассматриваются два устройства — стереодисплей [1, 2] и проекционная система [3], предложенные автором совместно с сотрудником ФИАН А. Путилиным. Стереодисплей состоит из двух жидкокристаллических (ЖК) панелей, между которыми помещен диффузор. На панели выводятся специальным образом рассчитанные изображения, которые являются масками для источника света, расположенного за дисплеем. Диффузор выполняет двойную функцию: он устраняет муар, который возникает из-за периодической структуры ЖК панелей, а также позволяет увеличить угол обзора. Для стереодисплея существует три основных параметра, которые определяют качество получаемого стереоэффекта: апертура пикселей, расстояние между панелями и параметр, характеризующий рассеяние диффузора.

Проекционная система [3] состоит из двух (или более) стандартных проекторов и ретрорефлекторного экрана, который обладает способностью отражать свет в некоторый телесный угол относительно направления источника, с экспоненциальным затуханием на периферии. Это свойство может быть использовано для создания объемного светового поля в достаточно широкой зоне. Качество получаемого стереоизображения определяется тремя параметрами: расстоянием между проекторами, удаленностью проекторов от экрана, и параметром, характеризующим рассеяние экрана.

В настоящей работе описаны численные эксперименты по определению размера области, в которой зритель может наблюдать стереоэффект с заданным уровнем качества. На основе проведенных численных расчетов удалось построить аппроксимационные формулы для функционалов, которые количественно описывают площадь стереозоны для дисплея и проекционной системы в зависимости от их основных параметров. Из этих формул получены оптимальные соотношения для параметров изучаемых систем, при которых зритель может видеть стереоизображение в максимально обширной зоне.

Литература

1. Лукьяница А., Путилин А. Способ воспроизведения изображения объекта. — Российское агентство по патентам и товарным знакам, RU 2158949 C1, 1999. 16 с.

2. Lukyanitsa A. A., Putilin A. N. Visualization of three dimensional images and multi aspect imaging. — United States Patent 6985290 B2, 2006.

3. Lukyanitsa A. A., Putilin A. N. Three-dimensional image projection employing retro-reflective screens. — United States Patent 6843564 B2, 2005.

СЕКЦИЯ IX

Кафедры математической статистики, математической кибернетики и математических методов прогнозирования

Асимптотическая нормальность оценки риска при вейвлет и вейвлет-вейглет разложениях функции сигнала в моделях с коррелированным шумом

Ерошенко Александр Андреевич, Шестаков Олег Владимирович

Кафедра математической статистики, e-mail: aeroshik@gmail.com, oshestakov@cs.msu.su

Статистические методы вейвлет-анализа широко применяются при анализе и обработке зашумленных сигналов и изображений, обычно задаваемых на практике в дискретных точках отсчета i: $Y_i = f_i + e_i$. Вейвлет-разложение функции $f \in L^2(\mathbb{R})$, описывающей сигнал, представляет собой ряд $f = \sum_{j,k\in Z}\langle f, \psi_{jk}\rangle\psi_{jk}$, где $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$, а $\psi(t)$ — материнская вейвлет-функция, которую можно выбрать так, чтобы она обладала некоторыми свойствами (см. [1]). Также функция сигнала $f \in L^2(\mathbb{R})$ должна быть задана на конечном отрезке, равномерно регулярна по Липшицу с $\gamma > 0$. В нашей работе рассматривается модель с коррелированных шумом: $\{e_i, i \in \mathbb{Z}\}$ — стационарный гауссовский процесс с ковариационной последовательностью $r_k = \mathbf{cov}(e_i, e_{i+k})$, нулевым средним и дисперсией σ^2.

После применения дискретного вейвлет-преобразвания к сигналу мы получаем две модели в зависимости от скорости убывания ковариационной последовательности: краткосрочной и долгосрочной зависимости. Причем первая эквивалентна моделям с некоррелированным шумом, исследованным в работах [2, 3].

Используя механизм мягкой пороговой обработки вейвлет-коэффициентов (см. [2]), можно строить оценки для зашумленных данных (сигналов, изображений и т. д.). Наличие шума приводит к погрешностям в этих оценках. Вычислить эти погрешности нельзя, поскольку они зависят от неизвестных незашумленных вейвлет-коэффициентов, но их можно оценить.

В рамках модели с долгосрочной зависимостью мы показали, что при мягкой пороговой обработке с "универсальным" порогом и определенных условиях на гладкость функции данная оценка асимптотически нормальна и состоятельна.

Также интерес представляют прикладные задачи, в которых зашумленные данные наблюдаются косвенно, например, анализ телекоммуникационного трафика, физика плазмы, компьютерная томография. Они описываются моделью: $Y_i = (Kf)_i + e_i$, где i — номер отсчета измеряемого сигнала, K — однородный линейный оператор с параметром β в $\mathbb{L}^2$, f — искомая функция, e_i — коррелированный гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием. Существуют "вейвлетоподобные" функции $\{\xi_{jk}\}$ (вейглеты, см. [4]), такие что $[Kf, \xi_{jk}] = \langle f, \psi_{jk}\rangle$. Переходя к дискретному вейглет-преобразованию, можно получить модель эмпирических дискретных вейглет-коэффициентов.

Для данной модели нами показана асимптотическая нормальность оценки риска при пороговой обработке с “универсальным” порогом и определенных условиях на функцию и линейный оператор.

Литература

1. Johnstone I. M. Wavelet shrinkage for correlated data and inverse problems: adaptivity results // Statistica Sinica. 1999. Vol. 9. No. 1. P. 51–83.

2. Donoho D. Johnstone I. M. Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage // J. Amer. Stat. Assoc., 1995. Vol. 90. P. 1200–1224.

3. Donoho D. Johnstone I. M. Ideal Spatial Adaptation via Wavelet Shrinkage // Biometrika, 1994. Vol. 81. No. 3. P. 425–455.

4. Donoho D. Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition // Applied and computational harmonic analysis. 1995. No. 2. P. 101–126.

О тривиальных пересечениях предполных классов пятизначной логики, сохраняющих разбиения

Нагорный Александр Степанович

Кафедра математической кибернетики, e-mail: `anagorny@list.ru`

Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, где $k \geqslant 2$ и пусть P_k есть множество всех конечноместных функций на E_k (такие функции мы будем называть *функциями k-значной логики*).

Замкнутый (относительно операции суперпозиции) класс H функций k-значной логики назовем *предполным в* P_k, если $H \neq P_k$, однако для любой функции $f \in P_k \setminus H$ замыкание множества $H \cup \{f\}$ совпадает с P_k.

Известно [1], что все классы функций из P_k, сохраняющих нетривиальные разбиения множества E_k, являются попарно различными, замкнутыми и предполными в P_k при любом $k \geq 3$. Обозначим через U^5 семейство всех таких классов для $k = 5$.

Введем необходимые обозначения для элементов множества U^5. А именно, обозначим классы функций пятизначной логики, сохраняющие разбиения $\{\{0\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$, $\{\{0, 1\}, \{2, 3, 4\}\}$, $\{\{0\}, \{1\}, \{2, 3, 4\}\}$, $\{\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ и $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$ множества E_5, через $U_{0\{1234\}}$, $U_{\{01\}\{234\}}$, $U_{01\{234\}}$, $U_{0\{12\}\{34\}}$ и $U_{012\{34\}}$, соответственно. Аналогично обозначаются все остальные классы семейства U^5 (легко видеть, что все они получаются из перечисленных классов с помощью некоторой подстановки индексов на E_5, такие классы будем называть *двойственными*). Семейство U^5 содержит ровно 50 классов.

Селекторной функцией назовем функцию из P_k, равную одной из своих переменных. Класс функций из P_k назовем *тривиальным*, если он содержит только все константные и все селекторные функции из P_k.

Изучим вопрос о том, пересечение каких классов из U^5 является тривиальным.

Теорема 1. *Ни одно пересечение двух классов из семейства U^5 не является тривиальным.*

Теорема 2. *Все тривиальные пересечения трех классов из семейства U^5 суть пересечения двух видов $U_{\{ab\}\{cde\}} \cap U_{c\{da\}\{eb\}} \cap U_{d\{ea\}\{bc\}}$ (60 троек) и $U_{a\{bd\}\{ce\}} \cap U_{b\{cd\}\{ea\}} \cap U_{c\{eb\}\{ad\}}$ (20 троек).*

Ясно, что имеет смысл искать только те пересечения, которые являются *неприводимыми*, т. е., из которых ни один класс нельзя удалить.

Автором найдены все неприводимые тривиальные пересечения предполных в P_5 классов из семейства U^5.

Теорема 3. *Всего имеется* $6\,860$ *четверок,* $117\,489$ *пятерок,* $138\,795$ *шестерок и* $8\,105$ *семерок классов из семейства* U^5 *(из них попарно недвойственных* 77, $1\,091$, $1\,285$ *и* 81, *соответственно), пересечения которых являются неприводимыми и тривиальными.*

Благодарности

Автор выражает благодарность Вороненко А. А. за постановку задачи и Марченкову С. С. за ценные замечания.

Литература

1. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.

Мультипликативная сложность некоторых булевых функций

Селезнева Светлана Николаевна

Кафедра математической кибернетики, e-mail: `selezn@cs.msu.su`

В настоящей работе найдено точное значение мультипликативной сложности булевых функций, которые можно представить в виде $x_1 \dots x_n \oplus q(x_1, \dots, x_n)$, где булева функция $q(x_1, \dots, x_n)$ имеет степень два; а также булевых функций $f(x_1, \dots, x_n)$ степени n, которые можно представить в виде суммы по модулю два двух мульти-аффинных булевых функций.

Мультипликативной (или *конъюнктивной*) сложностью $\mu(f)$ булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ называется минимальное число элементов конъюнкции в схемах из функциональных элементов в базисе $\{x\&y, x \oplus y, 1\}$, которые реализуют функцию f. В [1–4] изучалась мультипликативная сложность некоторых булевых функций. В [1, 2] было найдено точное значение $\lfloor n/2 \rfloor$ функции Шеннона мультипликативной сложности булевых функций степени два, зависящих от n переменных. В [1] доказано, что мультипликативная сложность произвольной булевой функции всегда не меньше, чем степень этой функции минус единица. В [3] доказано, что мультипликативная сложность произвольной симметрической булевой функции, зависящей от n переменных, не превосходит $n + O(\sqrt{n})$. В [4] найдено точное значение мультипликативной сложности пороговых булевых функций с порогом два.

Пусть $B = \{0, 1\}$. Отображение $f : B^n \to B$ называется булевой функцией, зависящей от n переменных, $n = 0, 1, 2, \dots$. Каждая булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ может быть однозначно задана полиномом Жегалкина, т. е. в виде суммы по модулю два монотонных элементарных конъюнкций. *Степенью* $\deg(f)$ булевой функции f назовем максимальное число сомножителей в слагаемых ее полинома Жегалкина. Булева функция f называется *аффинной*, если $\deg(f) \leqslant 1$. Булева функция называется *мульти-аффинной*, если она может быть представлена в виде произведения аффинных функций.

Теорема 1. *Если* $n \geqslant 3$, *и булева функция* $f(x_1, \dots, x_n)$ *может быть представлена в виде* $x_1 \dots x_n \oplus q(x_1, \dots, x_n)$, *где* $\deg(q) = 2$, *то* $\mu(f) = n - 1$.

Теорема 2. *Если булева функция* $f(x_1, \dots, x_n)$ *может быть представлена в виде суммы по модулю два двух мульти-аффинных функций, и* $\deg(f) = n$, *то* $\mu(f) = n - 1$.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, гранты № 12-01-00786-а, № 13-01-00684-а, № 13-01-00958-а.

Литература

1. Schnorr C. P. The multiplicative complexity of Boolean functions // Proc. 1st Internat. Joint Conf of ISSAC ‘88 and AAECC-6, Rome (1988). Lecture Notes in Computer Science. **357**. 1989. P. 45–58.

2. Mirwald R., Schnorr C. P. The multiplicative complexity of quadratic boolean forms // Theoretical Computer Science. **102**. 1992. P. 307–328.

3. Boyar J., Peralta R., Pochuev D. On the Multiplicative Complexity of Boolean Functions over the Basis $\{\wedge, \oplus, 1\}$ // Theor. Comp. Sci. **235**. 2000. P. 43–57.

4. Краснова Т. И. О конъюнктивной сложности схем в базисе Жегалкина для одной последовательности булевых функций // Материалы XI Международного семинара “Дискретная математика и ее приложения”. М. : Из-во мех-мат. ф-та МГУ, 2012. С. 138–141

О проверяющих тестах для некоторого класса функций, реализованных контактными схемами

Романов Дмитрий Сергеевич

Кафедра математической кибернетики, e-mail: `romanov@cs.msu.ru`

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция, отличная от констант и зависящая от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($f \in P_2(n)$), а S — двухполюсная контактная схема, реализующая функцию f. Пусть на схему S действует источник неисправностей U, способный вызывать размыкания и замыкания контактов. Схема S называется *тестопригодной (относительно обнаружения неисправностей для источника неисправностей U)* тогда и только тогда, когда при любой неисправности схемы S, вызванной действием на нее источника U, полученная вследствие этой неисправности схема S' реализует функцию $f'(\tilde{x}^n)$, не равную f. Обозначим через W множество всех попарно неравных функций, каждая из которых может быть реализована в результате действия на схему S источника неисправностей U (в частности, $f \in W$). Множество T наборов значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *проверяющим тестом* для схемы S относительно источника неисправностей U тогда и только тогда, когда для любой функции $f' \in W$ такой, что f' не равна f, найдется набор $\tilde{\alpha}$ из T, для которого выполнено неравенство $f'(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\alpha})$. Количество различных наборов в тесте T называется его *длиной* и обозначается через $l(T)$ или через $|T|$. Тест минимальной длины называется *минимальным*. Тест называется полным, если источник неисправностей может повреждать произвольное количество контактов в схеме, и единичным, если в схеме может быть поврежден не более чем один контакт. Обозначим через $D_U(S)$ длину минимального проверяющего теста относительно источника неисправностей U в схеме S, через $D_U(f(\tilde{x}^n))$ — минимум величины $D_U(S)$ по всем тестопригодным (относительно обнаружения неисправностей для источника неисправностей U) реализующим $f(\tilde{x}^n)$ контактным схемам S.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть источник неисправностей U способен вызывать а) только размыкания контактов, б) только замыкания контактов. Тогда доля тех булевых функций $f(\tilde{x}^n)$, для которых $D_U(f(\tilde{x}^n)) \leqslant 2n + 2$, стремится к единице при неограниченном росте n к бесконечности.*

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность профессору Сергею Андреевичу Ложкину за обсуждение работы и ценные замечания. Работа поддержана РФФИ (проекты № 12-01-00964-а и № 13-01-00958-а).

Методы решения задач классификации на два класса с категориальными признаками

Дьяконов Александр Геннадьевич[1], **Головина Анастасия Михайловна**[2]

[1] Кафедра математических методов прогнозирования, e-mail: djakonov@mail.ru

[2] МГТУ им. Н. Э. Баумана, e-mail: nastya_gm@mail.ru

В докладе дается обзор методов решения задач классификации и регрессии с категориальными признаками. Категориальный (факторный, номинальный) признак — это признак, значения которого обозначают принадлежность объекта к какой-то категории (например, национальность, профессия, идентификационный номер, тарифный план, издательство и т. п.). В последние годы появились задачи, в которых почти все или даже все признаки категориальные. Одна из таких задач используется как тестовая для алгоритмов из обзора: задача Международного соревнования “Amazon.com — Employee Access Challenge” о построении рекомендательной системы для службы безопасности.

В докладе рассматриваются следующие модели алгоритмов. *Линейные алгоритмы*, в которых ответ выражается в виде функции от линейной комбинации признаков нового (вещественного) признакового пространства. *Обобщения байесовских алгоритмов*, основанные на кодировании категорий оценками вероятностей принадлежности к классам объектов категорий. *Сингулярное разложение матрицы бинарных признаков*, которая является матрицей характеристических векторов принадлежностей к категориям. *Алгоритмы, основанные на близости*, которые обобщают модель ближайших соседей kNN и алгоритмов вычисления оценок (АВО). *Тензорные разложения*, в которых номера категорий интерпретируются как индексы многомерной матрицы. *Кодировки категориальных признаков в вещественные*, которые позволяют применять стандартные алгоритмы, например, случайные леса (random forest).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-07-00965.

Литература

1. Дьяконов А.Г. Методы решения задач классификации с категориальными признаками // Прикладная математика и информатика. 2014 (в печати).

Указатель по авторам