МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И

КИБЕРНЕТИКИ

Научная конференция

**Тихоновские чтения**

Тезисы докладов

Посвящается памяти академика

Андрея Николаевича Тихонова

27 октября – 31 октября 2014 года

**Заседания конференции проходят**

**на факультете ВМК во втором учебном корпусе**

Московского государственного университета

Москва 2014

ТЕЗИСЫ докладов

Секция: «Системное программирование и информационные технологии»

Председатель чл.-корр. РАН Королев Л.Н.

# Алгоритм построения расписания окон и уточнения приоритетов задач для систем, построенных на базе IMA

Балаханов В.А.1, Селецкий С.В.2

* + 1. МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АСВК,   
       e-mail: [baldis@lvk.cs.msu.su](mailto:baldis@lvk.cs.msu.su)
    2. МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АСВК,   
       e-mail: [leostas@lvk.cs.msu.su](mailto:leostas@lvk.cs.msu.su)

Задача построения статико-динамического расписания возникает при разработке вычислительных систем реального времени, построенных в соответствии с концепцией интегрированной модульной авионики (ИМА). В частности, для ОС, работающих по концепции ИМА, был разработан стандарт ARINC 653 [1], специфицирующий прикладной интерфейс ОС.

Исходными данными задачи является множество приложений (в стандарте: «разделов»), каждое из которых включает в себя несколько периодических задач. Для задач задаются зависимости, приоритеты и оценка времён выполнения.

Требуется построить статико-динамическое расписание, включающее:

1. привязку разделов к модулям и процессорам вычислительной системы;
2. расписание окон для каждого модуля;
3. привязку разделов к окнам;
4. уточнённые приоритеты задач.

В данной работе решаются подзадачи 2. - 4., то есть считается, что привязка разделов к модулям и процессорам вычислительной системы уже задана.

Существующие алгоритмы ([2], [3]) не учитывают ряд имеющихся в задаче ограничений. Поэтому был разработан жадный алгоритм построения расписания окон и уточнения приоритетов работ. Из списка незапланированных работ (экземпляров задач) выбираются и планируются по очереди те из них, зависимости которых были удовлетворены, а уточнённые директивные сроки (времена, после наступления которых гарантированно опоздают все зависящие от текущих работы) находятся максимально близко к точке планирования. Границы окон определяются на основе информации о точках переключения контекста. Приоритеты задач уточняются по временам первого запуска их работ.

Реализация алгоритма была апробирована на данных реальных вычислительных систем в рамках работы над разрабатываемым в ЛВК инструментальным средством САПР функциональных задач.

Литература

1. ARINC Specification 653. Airlines Electronic Engineering Committee. [PDF] (<http://www.arinc.com/>)
2. A. Easwaran, I. Lee, O. Sokolsky, S. Vestal A Compositional Framework for Avionics (ARINC-653) Systems // University of Pennsylvania, 2009
3. Y. Lee, M. Younis, J. Zhou Partition Scheduling in APEX Runtime Environment for Embedded Avionics Software // Proc. IEEE Real-Time Computing Systems and Applications, с. 103-109, Oct. 1998.

# ГИБРИДНЫЙ АЛГОРИТМ СИНХРОНИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ ДЛЯ СРЕДЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИАНА

Волканов Д.Ю.1, Глонина А.Б.2,Кибитова В.Н.3

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АСВК,  
 e-mail: [volkanov@lvk.cs.msu.su](mailto:volkanov@lvk.cs.msu.su)

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АСВК,   
e-mail: [alevtina@lvk.cs.msu.su](mailto:alevtina@lvk.cs.msu.su)

3) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АСВК,   
e-mail: [valeriakibitova@lvk.cs.msu.su](mailto:valeriakibitova@lvk.cs.msu.su)

В системах распределенного дискретно-событийного моделирования существенное влияние на скорость выполнения оказывает алгоритм синхронизации времени, использующийся в системе [1]. В лаборатории Вычислительных Комплексов была разработана распределенная система дискретно-событийного моделирования(РС ДСИМ) ДИАНА [2], поддерживающей стандарт HLA [3], в которой изначально был реализован один из простейших классических алгоритмов синхронизации времени. При использовании данного алгоритма возможны ситуации простоя вычислительных ресурсов системы, поэтому в РС ДСИМ ДИАНА необходимо реализовать гибридный алгоритм синхронизации времени, который способен бороться с недостатками присущими консервативным алгоритмам. Целью данной работы является разработка и реализация гибридного алгоритма синхронизации времени и его сравнение с классическим алгоритмом.

Для решения поставленной задачи были выполнены следующие шаги:

1. Выбор гибридного алгоритма, который подходит для реализации в РС ДСИМ DYANA и обеспечивает большую производительность в сравнении с консервативным алгоритмом.
2. Реализация выбранного алгоритма в РС ДСИМ DYANA.
3. Разработка метода экспериментального сравнения гибридного и классического алгоритма синхронизации времени.
4. Запуск экспериментов в РС ДСИМ DYANA, и статистическая оценка полученных результатов, определение типов моделей, на которых гибридный алгоритм показывает наибольшую эффективность.

Ключевой особенностью данной работы стала реализация гибридного алгоритма синхронизации времени в системе распределенного моделирования, написанной в соответствии со стандартом HLA, поддерживающей только классические схемы синхронизации. В ходе исследования гибридного алгоритма были выявлены типы моделей, на которых данный алгоритм показывает большую эффективность в сравнении с ранее использовавшимся классическим алгоритмом синхронизации.

Литература

1. Fujimoto R. M. Parallel and distributed simulation systems //A Wiley-Interscience publication, ISBN 0-471-18383-0,2000.
2. Бахмуров А.Г., Волканов Д.Ю., Смелянский Р.Л., Чемерицкий Е.В.. Интегрированная среда для анализа и разработки встроенных вычислительных систем реального времени. Программирование, N5 : с. 35–52, 2013.
3. Standart for Modeling and Simulation High Level Architecure – Framework and Rules// IEEE 1516-201051. С. 5–142.

# Метод систематического тестирования устойчивости к сбоям В ядре ОПЕРАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Хорошилов А.В.1, Цыварев А.В.2

1) МГУ им. М.В.Ломоносова, фак-т ВМК, кафедра СП, e-mail: [khoroshilov@ispras.ru](mailto:khoroshilov@ispras.ru)

2) Институт системного программирования РАН, e-mail: [tsyvarev@ispras.ru](mailto:tsyvarev@ispras.ru)

Ядро операционной системы лежит в основе функционирования любой компьютерной системы. Ошибки в ядре могут привести к потере работоспособности всей вычислительной системы, утрате или утечке важной информации и более печальным последствиям, в случаях, когда компьютерная система используется для управления инженерными, медицинскими или транспортными объектами.

Другой особенностью ядра является тот факт, что именно ему приходится первому реагировать на сбои в аппаратуре и уметь аккуратно выполнять свои задачи в условиях недостатка ресурсов. Как следствие, важной задачей для разработчиков ядра операционных систем является предотвращение ошибок при обработке сбоев в аппаратуре и нехватки ресурсов. Тем не менее, методы и средства тестирования устойчивости к сбоям в ядре операционных систем весьма ограничены. Единственным распространённым подходом является случайное внесение сбоев в ходе выполнения обычных тестов. Также в некоторых случаях применяется ручная разработка специализированных тестов, нацеленных на проверку устойчивости к конкретным сбоям. Однако, первый подход не эффективен при проведении тщательного тестирования, а второй слишком дорог при применении и в последующем сопровождении тестов для сколько-нибудь сложных компонентов.

В качестве альтернативы в докладе представлен метод систематического тестирования устойчивости к сбоям в ядре операционных системам. Идея метода заключается в выполнении обычного тестового набора, сопровождающегося сбором информации обо всех точках выполнения в коде ядра, в которых возможен сбой или отказ в выделении ресурсов, и автоматическом воспроизведении тестов, приводящих к достижению заданных точек выполнения, с последующей симуляцией сбоя или отказа в выделении ресурсов при одновременном контроле устойчивости системы при обработке этого сбоя. В результате, в предположении, что тесты обеспечивают детерминированный путь выполнения в коде ядра, предлагаемый метод позволяет систематически протестировать ядро на устойчивость к обработке сбоев во всех точках, достижимых при помощи данного тестового набора. Предлагаемый метод параметризован различными подходами к перебору точек выполнения, в которых симулируется сбой.

Результаты применения метода демонстрируются на примере тестирования драйверов файловых систем Linux. Приводятся данные серии экспериментов по случайной и систематической симуляции сбоев при тестировании драйвера файловой системы ext4. Для оценки качества тестирования используется измерение покрытия строк исходного кода ядра Linux. Поскольку даже для небольшого набора из 10 тестов количество потенциальных точек сбоев оказывается достаточно велико (более 270 тысяч), то рассматривается несколько подходов перебора точек сбоев с фильтрацией на основе стеков вызовов.

Эксперименты показали, что метод систематического тестирования позволяет добиться большего покрытия строк кода по сравнению со случайными методами при том же времени работы тестов. При этом не все строки кода, покрытые случайными методами, оказываются протестированными при применении систематического метода, что говорит о необходимости развития подходов к фильтрации точек сбоев.

# автоматическая генерация эволюционных алгоритмов под целевую архитектуру вычислительной системы

Ершов Н.М.1, Попова Н.Н.2

1)МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АНИ, e-mail: [ershovnm@mail.ru](mailto:ershovnm@mail.ru)

2)МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКИ, e-mail: [popova@cs.msu.su](mailto:popova@cs.msu.su)

В настоящей работе приводятся результаты анализа и предложенная на его основе классификация различных распределенных эволюционных моделей [1-4] и алгоритмов оптимизации [5-8] с точки зрения системы их внутренней организации. На основе проведенного анализа предлагается реализовать систему стандартных для данного типа моделей структур данных и программную систему для автоматической генерации параллельных алгоритмов машинного обучения и эволюционных вычислений, составляющими которой будут:

* специальный язык, предназначенный для описания распределенных эволюционных моделей и методов;
* подсистема автоматической трансляции заданного описания эволюционной модели в программу на языке C, ориентированная на применение различных технологий параллельного программирования и учитывающая аппаратные особенности целевой архитектуры суперкомпьютера;
* веб-сервис для автоматической генерации параллельных программ, реализующих стандартные эволюционные алгоритмы оптимизации;
* тестовая база задач для исследования эффективности разрабатываемых эволюционных алгоритмов оптимизации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №14-07-00628 А).

Литература

1. Дж. фон Нейман, Теория самовоспроизводящихся автоматов, М.: Мир, 1971.
2. Ф. Розенблатт, Принципы нейродинамики: Перцептроны и теория механизмов мозга, М.: Мир, 1965.
3. В. Котов, Сети Петри, М.: Наука, 1984.
4. P. Prusinkiewicz, A. Lindenmayer, The Algorithmic Beauty of Plants, Springer-Verlag, 1996.
5. J. H. Holland, Adaptation in Natural and Artificial Systems, University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1975.
6. M. Dorigo, M. Birattari, T. Stutzle, Ant Colony Optimization, Technical Report No. TR/IRIDIA/2006-023, September 2006.
7. J. Kennedy, R. C. Eberhart, Particle swarm optimization, Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, Piscataway, NJ, pp. 1942–1948, 1995.
8. K. M. Passino, Biomimicry of bacterial foraging for distributed optimization and control, IEEE Control Systems Magazine, 22, pp. 52–67, 2002.

# алгоритм построения стереообраза в задаче эталонной оценки качества стереоизображений

Зипа К.С.1, Игнатенко А.В.2

1) МГУ им. Ломоносова, ф-т ВМК, каф. АСВК, e-mail: [kzipa@graphics.cs.msu.ru](mailto:kzipa@graphics.cs.msu.ru)

2) МГУ им. Ломоносова, ф-т ВМК, каф. АСВК, e-mail: [ignatenko@graphics.cs.msu](mailto:ignatenko@graphics.cs.msu).ru

Метрики качества изображений используют в киноиндустрии для получения качественного видеоряда, а также при разработке методов сжатия для контроля степени искажений. В последнее время распространение стерео-контента привело к необходимости создания метрик качества для стереоизображений.

Существует три основных типа метрик: эталонные (когда известно исходное изображение), неэталонные (когда такого изображения нет) и псевдоэталонные (когда отсутствует эталон, но есть информация о его характеристиках и содержании).

Впервые схема оценки стереоизображений на основе модели циклопического зрения была предложена в работе (1) для псевдоэталонной метрики оценки качества. Идея заключалась в построении циклопического изображения как среднего между левым и компенсированным правым ракурсом, которое затем оценивалось метрикой для одноракурсных изображений.

В работе (2) был представлен алгоритм вычисления эталонных метрик, основанный на построении циклопического изображения. Экспериментальная оценка производилась на искажениях двух типов: симметричных (одинаково выражены для каждого ракурса) и асимметричных (выражены в разной степени). Полученные авторами статьи результаты показали более высокий коэффициент корреляции с субъективными оценками по сравнению с не-циклопическими алгоритмами.

В результате проведенных исследований было установлено, что при использовании DoG-фильтров (3) можно повысить качество метрик на асимметрических искажениях в терминах коэффициента корреляции Пирсона с субъективными оценками базы LIVE3D (2). Простое усреднение работает лучше всего при симметричных искажениях. На основании этих наблюдений предлагается новый комбинированный алгоритм, применяющий различные модели стереозрения в зависимости от степени расхождений между ракурсами. В таблице приведены коэффициенты корреляции наиболее распространенных метрик при использовании предложенного алгоритма построения стереообраза и его аналогов.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Тип метрики** | **Симметричные искажения** | | | **Асимметричные искажения** | | |
| **Chen** | **Усреднение** | **Наш алгоритм** | **Chen** | **DoG** | **Наш алгоритм** |
| PSNR | 81.9% | 87.6% | 87.2% | 69.8% | 74.4% | 71.1% |
| SSIM | 85.0% | 89.4% | 89.0% | 82.7% | 85.7% | 84.4% |
| MSSIM | 92.9% | 93.0% | 92.7% | 85.4% | 88.2% | 85.2% |

Литература

1. Maalouf A., Larabi M.-C. CYCLOP: A stereo color image quality assessment metric // Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech Signal Process. - 2011, pp. 1161–1164.
2. Chen M.J et al. Full-reference quality assessment of stereopairs accounting for rivalry // Signal Processing: Image Communication – 2013, Vol. 28 (9), pp. 1143-1155
3. Young R. The Gaussian derivative model for spatial vision: I. Retinal mechanisms // Spatial Vision 2 (4) - 1987, pp. 273–293(21).

# ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ BLUETOOTH ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ДАННЫХ.

Намиот Д.Е.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, лаборатория ОИТ,  
e-mail: [dnamiot@gmail.com](mailto:dnamiot@gmail.com)

В статье рассматриваются вопросы создания мобильных сервисов, где информация о местоположении заменяется данными о сетевой близости. Использование элементов сетевой инфраструктуры для представления данных было рассмотрено, например, в работе [1]. В данной же работе рассматривается новая модель использования (применения) Core Bluetooth устройств. В этой модели Bluetooth устройства служат для определения контекстно-зависимых данных, доступных мобильным пользователям [2]. Целью создания такой модели являются возможность более глубокой, по сравнению с традиционным гео-позиционированием, локализации данных, а также возможность создания динамических сервисов. В последнем случае элементы сетевой инфраструктуры (Bluetooth узлы) могут перемещаться, обеспечивая тем самым и “перемещение” привязанных к ним данных.

В работе предложена схема представления связанных данных в виде хранилища с моделью данных key-value на базе системы Apache Accumulo, программные интерфейсы, а также модель кэширования данных.

Одним из основных достижением этой модели является то, что она охватывает все этапы жизненного цикла мобильных сервисов – представление тега (тегов), привязку к ним информационного наполнения и создание прикладных приложений на основе имеющихся тегов. В качестве тегов могут выступать как мобильные телефоны, так и уже существующие устройства с поддержкой Bluetooth. Возможные области прикладного применения: приложения для торговых и сервисных организаций, навигация в помещениях, контекстно-зависимые приложения для Smart Cities [3-4].

Литература

1. Namiot, D., & Sneps-Sneppe, M. (2012, April). Proximity as a service. In Future Internet Communications (BCFIC), 2012 2nd Baltic Congress on (pp. 199-205). IEEE.
2. Намиот Д. Е. Мобильные Bluetooth теги //International Journal of Open Information Technologies. – 2014. – Т. 2. – №. 5. – С. 17-23.
3. Namiot, D., & Sneps-Sneppe, M. (2013, March). Wireless Networks Sensors and Social Streams. In Advanced Information Networking and Applications Workshops (WAINA), 2013 27th International Conference on (pp. 413-418). IEEE..
4. Sneps-Sneppe, M., & Namiot, D. (2013). Spotique: A New Approach to Local Messaging. In Wired/Wireless Internet Communication (pp. 192-203). Springer Berlin Heidelberg.

# Стратегические информационные технологии воспроизводства кадров XXI века

ГромыкоВ.И.1, КазарянВ.П.2,ВасильевН.С.3,СимакинА.Г.4,АносовС.С.5

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, фак. ВМиК, каф. АЯ: [gromyko.vladimir@gmail.com](mailto:gromyko.vladimir@gmail.com)

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, философский факультет, каф. ФЕН: kazaryanvp@mail.ru

3) МГТУ им. Н.Э. Баумана, фак. фундаментальных наук, каф. ФН1: [nik8519@yandex.](mailto:nik8519@yandex.)ru

4) РУДН, фак. гуманитарных и социальных наук, каф. ОТП: [modus-as@mail.ru](mailto:modus-as@mail.ru)

5) Банк «Возрождение»: sanosov[@cs.msu.su](mailto:gromyko.vladimir@gmail.com)

В результате НТР-3 осуществилось системно-информационное преобразование культуры (**С-ИК**) и появилась революционная технология для деятельности человека в среде Интернета. Жизнь индивида среди инструментальных систем проходит в непрерывном познании и в междисциплинарной деятельности (**МежД**). Специальность, сознаваемая в границах гуманитарного восприятия жизни, требует надпредметного опознания на уровне ***метасмысл***а (второго сознания) – знания о познании [1,2].

***Бифуркация*** системы образования характерна завершением общеобразовательного обучения, деятельностью в динамике С-ИК,социальным проявлением– ***непрерывностью образования***, новым существованием индивида– ***жизнью в науке***. Уровень символической объективизация мысли нуждается в развитии ***познавательной*** естественнонаучной ***функции*** средством объективизации смысла [3] на основе языка категорий (**ЯК** [4]). Универсальное надпредметное обучение (**УО**) расширяет традиционное профессиональное обучение **(ТО**) посредством: 1) ***букваря смыслов*** абстракций ЯК для *стратегической интеграции* курсов образовательного пространства (**ОП**) в отношении цели – **самоорганизации подсознания** учащегося; 2) ***пропедевтических курсов*** для *тактической интеграции* курсов при изучении предмета в отношении самоорганизации учащегося, определяемой смыслами (**ОПС**); 3) ***личностного*** образовательного пространства смыслов (**ЛОПС**) для формирования *адаптивных путей* в предмете, наследующих ***целостность*** мировоззрения ОП.

Реализация УО [5] включает: 1) интеллектуальное компьютерное место учащегося (**ИКМУ**) на основе генетического метода обучения; 2) интеллектуальную обучающую систему (**ИОС**) в единстве с ЛОПС. База знаний (БЗ) ОП обретет онтологический статус сравнением курсов с их представлениями на ЯК. Применение онтологической БЗ (**ОнтБЗ**) посредством специализированного поисковика (ядро ИОС) как ЛОПС (сеансы в реальном времени) нуждается в **суперкомпьютере**.

Таков путь создания среды саморазвития для жизни в науке на основании языка систем (ЯК). Исследования соответствуют приоритетным направлениям в области образования и науки, объявленных ректором В.А. Садовничим в докладе «Современная университетская идея и будущее Московского университета» на Ученом Совете 12.05.2014г.

Литература

1. Поппер К.Р. Объективное знание. Эволюционный подход // М.: УРСС. – 2002.
2. Кэмпбелл Д.Т. Эволюционная эпистемология // – Сб. Эволюционная эпистемология и логика социальных наук. – М.: УРСС. – 2000. С. 92-146.
3. Кассирер Э. Философия символических форм. Феноменология познания // М., Спб.: Университетская книга. – 2002. – Т. 1-3.
4. Маклейн С. Категории для работающего математика // М.: Физматлит. – 2004.
5. Громыко В.И. и соавторы. Рациональное образование как технология сознания // Сложные системы. Междисциплинарный научный журнал. М.: Приятная Компания, №3(8). – 2013. С. 87-108.

Секция: «Нелинейная динамика: качественный анализ и управление»

Председатель профессор Фомичев В.В.

# Об одном обобщении относительного порядка для векторных систем

Краев А.В.1, Роговский А.И.2

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ,   
e-mail: [akraev@cs.msu.su](mailto:akraev@cs.msu.su)

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ,   
e-mail: [alexander.rogovskiy@gmail.com](mailto:alexander.rogovskiy@gmail.com)

Определение относительного порядка для системы с входами и выходами формулируется так:



**Определение 1** ([1, c.220]). Вектор называется вектором относительного порядка (ОП) для линейной динамической системы, заданной матрицами , если:



* 1. ;



* 1. строки линейно независимы (здесь - строки матрицы ).



**Замечание 1.** Если для вектора выполнено только первое требование определения 1, назовем его вектором неполного относительного порядка (НОП).



**Замечание 2.** Условия 1) и 2) могут быть несовместны (см. [2, стр. 72]).

**Замечание 3.** Некоторые системы (но не все) невырожденным преобразованием выходов могут быть приведены к виду с относительным порядком.

В силу замечания 2 и того факта, что выполнение определения 1 является необходимым условием применимости некоторых известных алгоритмов управления, целесообразной становится задача отыскания линейного преобразования T, приводящего систему к виду с ОП, либо доказательство его отсутствия.   
Для решения данной задачи рассматривается следующее обобщение определения 1:

**Определение 2.** Вектор называетcя главным неполным относительным порядком (ГНОП) для системы, заданной матрицами , если



1. ;



1. для любого набора индексов такого, что , строки линейно независимы.



**Определение 3.** Систему, заданную матрицами , назовем слабо приводимой, если система имеет вектор НОП .



Справедливы следующие утверждения:

**Лемма 1.** Любая слабо приводимая система невырожденным преобразованием выходов может быть приведена к виду с ГНОП.

**Теорема 1.** Слабоприводимая система не может быть приведена к виду с ОП тогда и только тогда, когда ее вектор ГНОП не является вектором ОП.



Данные утверждения позволяют решить поставленную выше задачу: достаточно привести систему к виду с ГНОП и проверить выполнение определения 1.

Литература

1. Isidori A. Nonlinear control systems. – London: Springer-Verlag, 1995.
2. А.В. Ильин, С.К. Коровин, В.В. Фомичёв. Методы робастного обращения динамических систем. - Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2009.
3. Краев А.В., Роговский А. И., Фомичев В.В. К обобщению относительного порядка // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 8. стр. 1128-1132.

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКОГО ВАКУУМА (ЭФИРА)

Магницкий Н.А.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ; ООО «Нью Инфлоу»;  
e-mail: [nikmagn@gmail.com](mailto:nikmagn@gmail.com)

В докладе представлены математические основы единой фундаментальной физической теории объединительного характера, единственным постулатом которой является постулат о существовании эфира. Показано, что все основные уравнения и формулы классической электродинамики, квантовой механики, теории электромагнетизма и теории гравитации могут быть выведены из двух нелинейных уравнений динамики эфира как сплошной невязкой среды в трехмерном евклидовом пространстве, следующих из уравнений классической механики Ньютона. Используя характеристики эфира, которыми является его плотность и скорость распространения различных возмущений и колебаний этой плотности, даны совершенно ясные и согласующиеся со здравым смыслом определения таким физическим категориям, как материя и антиматерия, электрическое, магнитное и гравитационное поле, скорость света, фотон, электрон, протон, нейтрон, нейтрино, внутренняя энергия, масса, заряд, спин, квантованность и постоянная Планка, постоянная тонкой структуры и многие другие.

Выведены уравнения Максвелла, законы Кулона, Ампера, Био-Савара-Лапласа, Ньютона, уравнение Дирака, получены выражения для силы Ампера и силы Лоренца, получены асимптотически точные значения аномальных магнитных моментов протона, электрона и нейтрона. Построена эфирная модель атома водорода, доказано, что кроме основного и возбужденных состояний атом водорода может находиться в гидринном неизлучающем состоянии, что не описывается уравнением Шредингера и может объяснить происхождение темной материи во Вселенной.

Литература

1. Магницкий Н.А**.** К электродинамике физического вакуума. // - Сложные системы (2011), **1**, №1, с.83-91.
2. Магницкий Н.А**.** Физический вакуум и законы электромагнетизма // - Сложные системы (2012), **1**(2), с.80-96.
3. Magnitskii N.A. Mathematical Theory of Physical Vacuum // - Comm. Nonlin. Sci. and Numer. Simul., Elsevier (2011)**16,** p.2438-2444.
4. Magnitskii N.A**.** Theory of elementary particles based on Newtonian mechanics. In “Quantum Mechanics/Book 1”- InTech - 2012, p.107-126.
5. Зайцев Ф.С., Магницкий Н.А. О размерностях переменных и некоторых свойствах системы уравнений физического вакуума (эфира) // - Сложные системы (2012), **2**(2), с.93-97.

# Синтез регулятора стабилизации плазмы для ТОКАМАКа с учетом особенностей системы ввода тока

Гончаров О.И.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ,   
e-mail: goncharovoi@yandex.ru

В докладе рассматривается задача вертикальной стабилизации плазмы в ТОКАМАКе на основе модельной системы пониженной размерности. Основное внимание уделяется вопросу влияния системы ввода тока (исполнительного устройства) на работу всей системы управления, предлагается алгоритм управления, учитывающий особенности системы ввода тока.

Задаче вертикальной стабилизации и контроля формы плазмы посвящено довольно много работ (небольшой обзор различных подходов приведен в [1]). Обычно рассматривается линейная непрерывная модель поведения плазмы, для которой синтезируется непрерывный регулятор. При моделировании влияния системы ввода тока добавляются транспортные задержки, ограничения на амплитуду и модуль производной управляющего сигнала. В части работ в качестве модели ввода тока используется широтно-импульсная модуляция (ШИМ) [2-3], однако при этом синтез по-прежнему обычно проводится для непрерывной модели. В реальных установках для ввода тока используются тиристорные преобразователи [4] (некоторые обмотки могут быть оборудованы «быстрыми» преобразователями на основе ШИМ). Работа тиристорного преобразователя может быть формализована как ШИМ с перекрывающимися импульсами непрямоугольной формы. При этом длительность импульсов (она связана с частотой промышленной сети питания, и не может быть изменена) сравнима с временем протекания отдельных процессов в магнитной системе ТОКАМАКа. Основная цель работы состоит в разработке алгоритма управления, учитывающего особенности системы ввода тока.

Модель тиристорного преобразователя в совокупности с моделью твердого сдвига плазмы может быть представлена в виде автономной аффинной нестационарной системы с внешне управляемыми переключениями. Системы такого типа являются подклассом гибридных систем. У них отсутствует непрерывное управление, но есть возможность выбирать моменты переключения. Основная идея алгоритма управления состоит в выборе моментов переключения для оптимального приближения поведения непрерывной модели системы управления (метод приближения фазовых траекторий). Для решения задачи оптимизации применяется стандартный подход [5] (скорейший спуск). Использование метода фазового приближения позволяет значительно сократить размерность задачи оптимизации и использовать для построения непрерывной модели системы управления имеющиеся алгоритмы синтеза непрерывных регуляторов вертикальной стабилизации плазмы.

Литература

1. Синтез и моделирование двухуровневой системы магнитного управления плазмой токамака-реактора / Ю. Митришкин, А. Коростелев, В. Докука, Р. Хайрутдинов // Физика плазмы. — 2011. — Т. 37, № 4. — С. 307–349.
2. Завадский С.В. Совместная оптимизация совокупности регуляторов в системе управления плазмой в ТОКАМАке // XII Всероссийское совещание по проблемам управления. – Москва, 2014. – С. 4297-4302.
3. Linear and Impulse Control Systems for Plasma Unstable Vertical Position in Elongated Tokamak / Mitrishkin Y.V., Zenckov S.M., Kartsev N.M., Efremov A.A., Dokuka V.N., Khayrudinov R.R. // IEEE CDC – Maui, Hawaii, USA, December 10-13, 2012. – Pp. 1697-1702.
4. Качин А.Г., Павлов В.М. Информационное и алгоритмическое обеспечение блока диагностики системы управления источниками питания обмоток полоидального поля токамака КТМ // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 314, № 5 – С. 58-62
5. Egerstedt M., Wardi Y., Delmotte F. Optimal control of switching times in switched dynamical systems. // Proceedings 42nd IEEE CDC – 2003. – Vol 3. – Pp. 2138–2143

# Приложение LQR-методов к задаче стабилизации вертикальных движений плазмы в ТОКАМАКах

Капалин И.В.1

1. МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ,   
   e-mail:: [ikapalin@gmail.com](mailto:ikapalin@gmail.com)

Рассматривается задача вертикальной стабилизации плазмы в установке ТОКАМАКе. Во многих работах эта задача рассматривается для непрерывной модели, описывающей объект управления (плазма в установке), и опускается исполнительное устройство (система ввода тока), которая не описывается непрерывной моделью. В некоторых работах (например, [1]), рассматриваются исполнительные устройства типа реле или ШИМ, в установке Т-15 и исследуется их влияние на работу системы управления, полученной по определенному стандартному алгоритму синтеза управления. В данной работе сделано аналогичное исследование со следующими отличиями:

1. в качестве исполнительного устройства взята модель Synchronized 6-Pulse Generator тиристорного преобразователя из системы Matlab тулбокса Simscape/SimPowerSystems;
2. синтез и моделирование проводится для ТОКАМАКА КТМ, на плазмо-коде отличном от кода DINA, используемом в проекте ITER;
3. в качестве метода синтеза управления используется LQR-метод.

Для решения задачи стабилизации плазмы, как это обычно делается, проводится линеаризация нелинейной системы, описывающей поведение плазмы в ТОКАМАКе, при этом линеаризация проводится в точках заранее заданного развития сценария разряда плазмы. После чего приходят к рассмотрению линеаризованной системы в отклонениях от заданного сценария, для которой предлагается построить управление вида , где  – вектор отклонений напряжений, который должен быть отработан системой ввода тока,  – оценкаf отклонений токов и вертикального положения центра шнура плазмы и K – постоянная матрица коэффициентов обратной связи, подлежащая определению. Оценку вектора дает наблюдатель состояния объекта управления по входу  и выходу , содержащему отклонения токов в катушках и отклонение центра шнура по вертикали.

В работе LQR методом была получена матрица K и соответствующая стабилизирующая обратная связь u(x). Проведен сравнительный анализ, показывающий степень влияния системы ввода тока на систему управления в целом.

Литература

1. Mitrishkin, Y.V., Zenckov, S.M., Kartsev, N.M., et al., Linear and Impulse Control Systems for Plasma Unstable Vertical Position in Elongated Tokamak, in Proc. 51st IEEE Conf. Decision Control, Maui, Hawaii, USA, 2012, pp. 1697–1702.

Секция: «Системный анализ»

Председатель академик РАН Куржанский А.Б.

# ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК КОШИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Егоров И.Е.1

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра системного анализа,  
e-mail: [ivanyegorov@g](mailto:email@1)mail.com

Известно, что задача синтеза оптимального управления, т.е. отыскания оптимального закона обратной связи (позиционного, не программного управления), сводится к глобальному построению в фазовом или расширенном фазовом пространстве обобщенного решения задачи Коши для, вообще говоря, нелинейного уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (коротко — уравнения ГЯБ) в частных производных первого порядка. Применение методов сугубо вычислительного характера для решения таких задач имеет ряд существенных ограничений. С другой стороны, если для определенного (возможно, достаточно узкого) класса задач удается задать все поверхности переключений оптимального позиционного управления, то глобальная геометрическая картина синтеза естественным образом выявляется без возникновения указанных трудностей. Работа посвящена разработке численно-аналитических методов исследования и построения указанных поверхностей переключений в конкретных классах задач без фазовых ограничений и с одномерным линейно входящим управлением. В основу этих методов положено обобщение классического метода характеристик Коши для уравнений в частных производных первого порядка, восходящее к работам Н.Н. Субботиной и А.А. Меликяна. Описанный в работе подход сочетает в себе одновременное использование необходимых и достаточных условий оптимальности – принципа максимума Понтрягина и метода динамического программирования соответственно. Точнее, при построении оптимального синтеза задействованы как результаты исследования участков постоянства и особых участков оптимальных управлений с помощью принципа максимума Понтрягина, так и аналитические представления, определяющие локальные решения задачи Коши для уравнения ГЯБ и находящиеся с помощью первых интегралов расширенной системы уравнений динамики. Применение разработанных методов глобального синтеза оптимального управления продемонстрировано на ряде многомерных и нелинейных моделей математической биологии и медицины. В каждой из них динамика терапевтического агента описывается фармакокинетическим уравнением, которое вместо абсолютного значения дозировки лекарства оперирует величиной концентрации, что более корректно и естественно с медицинской точки зрения.

Литература

1. Bratus A., Todorov Y., Yegorov I., Yurchenko D. Solution of the feedback control problem in the mathematical model of leukaemia therapy // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2013. – V. 159 – N. 3. – P. 590–605.
2. Егоров И.Е. Оптимальное позиционное управление в математической модели терапии злокачественной опухоли с учетом реакции иммунной системы // – Математическая биология и биоинформатика (2014) 9, №1, с.257–272.
3. Егоров И.Е. Обобщение метода характеристик Коши для построения гладких решений уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана в задачах оптимального управления с особыми режимами // – Вестник Московского университета: Вычислительная математика и кибернетика (2014) 38, №3, с.30–40.

# Обобщённый непараметрический метод обработки бюджетной статистики

Клемашев Н.И.1, Шананин А.А.2

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра системного анализа,  
e-mail: [niko.klemashev@gmail.com](mailto:niko.klemashev@gmail.com)

2) Московский физико-технический институт, факультет управления и прикладной математики, e-mail: [alexshan@yandex.ru](mailto:alexshan@yandex.ru)

Доклад посвящён подходу к обработке бюджетной статистики с помощью обобщённого непараметрического метода, в основе которого лежит понятие рационализируемости торговой статистики в классе  неотрицательных, ненасыщаемых, монотонных, непрерывных, вогнутых и положительно-однородных первой степени функций полезности. Бюджетная статистика это множество , где  – вектор цен в периоде ,  – объёмы потребления социальной группы  в периоде ,  – количество периодов наблюдения,  – количество социальных групп, на которые разделено общество.

Используя такую структуру данных, можно исследовать вопрос о возможности описания поведения социальных групп моделью рационального репрезентативного потребителя с функцией полезности из . Необходимым и достаточным условием этого является выполнение однородной сильной аксиомы выявленного предпочтения для торговых статистик . Если торговая статистика для социальной группы  удовлетворяет однородной сильной аксиоме, то существуют экономические индексы цен  и индексы спроса . Эти индексы называются индексами Конюса-Дивизиа. В случае, если торговая статистика , где , , рационализируема в классе , то существует функция Бергсона, которая порождает наблюдаемое распределение доходов по социальным группам. Теоретической основой данного подхода является работа [1].

В докладе приводятся результаты применения данного подхода на примере статистики потребления домашних хозяйств в Великобритании в период с 1975 по 1999 годы. Проводится сравнение трёх способов построения индексов Конюса-Дивизиа для всех товаров – без предварительного агрегирования в товарные группы, с предварительным агрегированием в товарные группы, с предварительным агрегированием в социальные группы. Товарная группа, состоящая из всех товаров, оказывается нерационализируемой в классе . Однако, удалось разбить домашние хозяйства на две социальные группы по уровню дохода, поведение каждой из которых описывается моделью репрезентативного потребителя с функцией полезности из класса . Следует отметить, что структуры потребления этих социальных групп существенно различны.

Литература

1. Petrov A.A., Shananin A.A. Integrability Conditions, Income Distribution, and Social Structures // in: Tangian A., Gruber J., eds., *Constructing Scalar-Valued Objective Functions*. 1997. Pages 271-288.

# вычисление константы накрывания линейного оператора на конусе

Жуковский С.Е.1, Мингалеева З.Т.2

1) Российский университет дружбы народов, факультет физико-математических и естественных наук, кафедра нелинейного анализа и оптимизации,   
e-mail: [s-e-zhuk@yandex.ru](mailto:s-e-zhuk@yandex.ru)

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра системного анализа,   
e-mail: [zyxra2@yandex.ru](mailto:zyxra2@yandex.ru)

Пусть задан линейный оператор . Для произвольного выпуклого замкнутого конуса  через  обозначим сужение оператора  на конус . Для векторов  через  будем обозначать их скалярное произведение.

Напомним определение понятия накрывания из [1,2]. Пусть ,  – метрические пространства. Через  обозначим замкнутый шар в пространстве  с центром в точке  радиуса . Пусть задано число .

**Определение.** Отображение  называется условно -накрывающим, если имеет место включение

** , .**

Число  называется константой условного накрывания отображения . Точную верхнюю границу всех констант условного накрывания отображения  будем обозначать .

Пусть определены векторы . Положим

.

В [2] было показано, что . Авторами исследована задача вычисления константы накрывания отображения . Приведен алгоритм, позволяющий за конечное число шагов свести исходную задачу к задаче о вычислении собственных значений некоторых матриц. Показана корректность приведенного алгоритма. Доказано также, что алгоритм выполняется за конечное число шагов для любых входных данных .

Литература

1. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук – 2007. – Т. 416. №2. С.151-155.
2. Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения – 2009. – Т. 45. №5. С.613-634.
3. Жуковский С.Е. О накрывающих свойствах сужений отображений метрических пространств // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки – 2012. – Т. 17. №3. С.852-856.

# Об Оценках информационных множеств в задаче гарантированного оценивания для билинейных систем

Синяков В.В.

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, e-mail: [vladimir.siniakov@gmail.com](mailto:vladimir.siniakov@gmail.com)

Рассматривается билинейная система вида

   
в которой  – состояние системы, а  – неизвестные возмущения, . Такие системы, в частности, могут представлять собой линейные системы с ограниченной неопределенностью в коэффициентах матрицы [1, 4]. Кроме того, достаточно широкий класс нелинейных управляемых систем может быть представлен с помощью таких билинейных систем путем применения процедуры глобальной билинеаризации [3]. Задан эллипсоид , в котором содержится неизвестное начальное состояние системы. В уравнении измерений присутствует помеха, не имеющая статистического описания, но ограниченная эллипсоидом . Задача заключается в построении внешних оценок информационных множеств  для этой системы при заданных измерениях .

Решение этой задачи осуществляется методом динамического программирования. А именно, информационные множества в данном случае могут быть выражены через множества достижимости и фазовые ограничения, поступающие в реальном времени. Эти множества достижимости, в свою очередь, являются множествами уровня некоторых функций, представляющих собой функции цены для определенных задач оптимизации и удовлетворяющих соответствующему уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ). Оценки информационных множеств, таким образом, строятся с помощью вязкостных субрешений соответствующего уравнения ГЯБ.

Приводятся результаты численного моделирования, которые иллюстрируют решение поставленной задачи фильтрации.

Литература

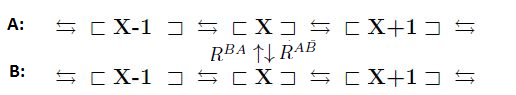
1. Kurzhanski A.B., Filippova T.F. On the theory of trajectory tubes – a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // Advances in Nonlinear Dynamics and Control. Boston: Birkhauser, 1993, pp. 122-188.
2. Kurzhanski A.B., Varaiya P.A. Comparison Principle for Equations of the Hamilton-Jacobi Type in Set-Membership Filtering // Communications in Informatics and Systems, Vol. 6, №3, pp. 179-192, 2006.
3. Pardalos P.M., Yatsenko V. Optimization and Control of Bilinear Systems // Springer, 2008.
4. Мазуренко С.С. Дифференциальное уравнение на калибровочную функцию Минковского звездного множества достижимости дифференциального включения. // – Доклады Академии Наук. 2012. Т. 445, №2, с. 139-142.
5. Синяков В.В. О внешних и внутренних аппроксимациях множеств достижимости билинейных систем // – Доклады Академии Наук, 2014, т. 458, №1, с. 1-5.

# Исследование моделей биологической эволюции в рамках теории гамильтона-якоби

Якушкина Т.С.1

1)Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
Факультет бизнес-информатики, кафедра моделирования и оптимизации бизнес-процессов; e-mail: [tyakushkina@hse.ru](mailto:tyakushkina@hse.ru)

В данной работе рассматриваются задачи эволюционной теории игр с двумя режимами (каждому соответствует постоянная матрица A или B), описывающими изменение состояния популяции с общей численностью N. Система характеризуется численностью X вида, использующего заданную игровую стратегию. Схематически динамика системы может быть изображена в виде двух цепочек преобразований с возможностью переключения между цепочками.



Вводя веротности нахождения системы в состоянии X в момент времени t (P(X,t) и Q(X,t) в зависимости от цепочки), получаем систему уравнений вида:



Здесь неотрицательные интенсивности перехода обозначаются R: нижний индекс соответствует направлению перехода, верхний – используемой матрице.

Следуя методу **[7]**, позволяющему перейти от основных кинетических уравнений к уравнениям Гамильтона-Якоби, рассматриваем систему:



Анализ данной системы позволяет вывести уравнения динамики максимума и дисперсии распределения при произвольном начальном распределении и постоянных интенсивностях перехода между цепочками. Полученные аналитически выражения подтверждаются сравнением с численным решением.

Отдельно рассматриваются возможные комбинации матриц выплат размерности 2x2, сравниваются два типа задания интенсивности перехода внутри цепочки (процесс Морана и механизм локального регулирования).

Литература

1. R.Cressman, Evolutionary Dynamics and Extensive Form Games // MIT Press -2003.
2. M.A.Nowak, A.Sasaki, C.Taylor, D.Fudenberg, Emergence of cooperation and evolutionary stability in finite populations // Nature 428 – 2004 - 646.
3. K.Sato, K.Kaneko, Evolution Equation of Phentype Distribution: General Formulation and Application to Error Catastroph// Phys. Rev. E, 75 – 2007 - 061909.
4. A.Traulsen, J.C.Claussen, C.Hauert, Coevolutionary dynamics: From finite to infinite populations // Phys. Rev.Lett. 95 – 2005 - 238701.
5. V.Galstyan, D.B.Saakian, [Dynamics of the chemical master equation, a strip of chains of equations in d-dimensional space // Phys. Rev. E. 86 – 2012 -11125.](http://pre.aps.org.nthulib-oc.nthu.edu.tw/pdf/PRE/v86/i1/e011125)
6. R. Axelrod, W. D. Hamilton. The Evolution of Cooperation // Science 211 – 1981 -1390.
7. D.B.Saakian, [A new method for the solution of models of biological evolution: Derivation of exact steady-state distributions](http://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=en&user=65CC6g4AAAAJ&citation_for_view=65CC6g4AAAAJ:2osOgNQ5qMEC) // Journal of Stat. Physics,128 – 2007 -781.
8. P.Schuster, Nonlinear Dynamics from Physics to Biology. Complexity, 12, (2007)9.
9. L.C. Evans, Partial Differential Equations, AMS (1998).
10. D.B.Saakian, O.Rozanova, A.Akmetzhanov, [Dynamics of the Eigen and the Crow-Kimura models for molecular evolution](http://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=en&user=65CC6g4AAAAJ&citation_for_view=65CC6g4AAAAJ:UeHWp8X0CEIC) // Phys. Review E 78 – 2008 - 041908.
11. A.Melikyan, Generalized Characteristics of First Order PDEs // Birkhauser, Boston -1998.

Секция: «Теория дифференциальных уравнений»

Председатель академик РАН Моисеев Е.И.

# Оптимизация граничного управления силой колебаниями струны при наличии наклоной производной в граничном условии

Моисеев Е.И., Холомеева А.А.

Факультет ВМК МГУ, кафедра функционального анализа и его применений,  
e-mail: [dekanat@cs.msu.ru](mailto:dekanat@cs.msu.ru)

Изучена задача граничного управления колебаниями одномерной упругой струны, которые описываются волновым уравнением

 (1)

Требуется перевести систему из произвольного начального состояния

 (2)

в произвольное финальное состояние

 (3)

воздействуя силой на левый конец струны

 (4)

На другом конце струны задано граничное условие, содержащее наклонную производную

 (5)

которое можно трактовать ([1]) как условие торможения правого конца стержня, условие погружения его в вязкую среду и т. п. При нулевом значении параметра  задача переходит в известную ([2]) задачу управления силой на одном конце струны при свободном втором конце. Прежде аналогичная задача управления смещением изучалась в работах [3], [4].

Изучена начально-краевая задача (1), (2), (4), (5) в смысле обобщенного решения из пространства Соболева , доказаны теоремы существования и единственности решения.

Далее была изучена задача оптимизации найденного граничного управления в смысле минимизации граничной энергии, оптимальное граничное управление было построено в явном аналитическом виде.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики // М. 2004.
2. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // – Успехи мат. наук – 2005. Т. 60. Вып. 6, с. 89-114.
3. Моисеев Е.И., Холомеева А.А. Об одной задаче оптимального граничного управления с динамическим граничным условием // – Дифференц. уравнения – 2013. Т. 49. № 5, с. 667-671.
4. Моисеев Е.И., Холомеева А.А. Оптимальное граничное управление смещением на одном конце струны при наличии сопротивления среды на другом конце // – Дифференц. уравнения – 2013. Т. 49. № 10.

# ЗАДАЧА ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ

Хорошилова Е.В.1

МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра общей математики,  
 e-mail: [khorelena@gmail.com](mailto:khorelena@gmail.com)

В гильбертовом пространстве на конечном отрезке времени  рассматривается задача терминального управления с линейной динамикой, квадратичным целевым функционалом, фиксированным левым  и подвижным правым  концами траектории  [1], [2]:



Отметим, что в данной постановке задачи: 1) целевой функционал (критерий качества) представляет собой сумму терминальной и интегральной компонент квадратичного вида; 2) задача оптимизации решается при дополнительных терминальных ограничениях ; 3) фазовые траектории  предполагаются непрерывными функциями из ; 4) управления  ограничены по норме  (интегрально); 5) множество достижимости образует все  или его подпространство.

Требуется найти управление  такое, чтобы отвечающая ему траектория , подчиняясь линейной динамике и удовлетворяя терминальным ограничениям, соединила начальную точку  с точкой минимума  целевого функционала на правом конце ( заранее неизвестна и находится в процессе решения).

В отличие от традиционного подхода, задача терминального управления рассматривается не как задача оптимизации, а как седловая задача. Ее решением является седловая точка лагранжиана с компонентами: управление, фазовая и сопряженная к ней траектории, терминальные переменные. Для решения задачи предлагается седловой итеративный метод, доказывается его сходимость по всем компонентам седлового решения.

Литература

1. Антипин А.С., Хорошилова Е.В. О краевой задаче терминального управления с квадратичным критерием качества // Известия ИГУ. Серия «Математика». – 2014. – Т. 8, с. 7–28.
2. Khoroshilova E.V. Linear-quadratic optimal control problem: saddle-point approach // XVI Baikal International School-seminar «Optimization Methods and their Applications». Olkhon Island, Baikal. Abstracts. Irkutsk, Melentiev Energy Systems Institute SB RAS. – 2014. – p. 127.

# О НЕПРОДОЛЖАЕМЫХ РЕШЕНИЯХ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И АБСТРАКТНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

Панин А.А.1

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики,   
e-mail: [a-panin@yandex.ru](mailto:a-panin@yandex.ru)

Мы обобщили классическую теорему существования и единственности непродолжаемого решения задачи Коши для ОДУ (см., напр., [1]) на случай уравнений в банаховом пространстве с ограниченно липшиц-непрерывной по функциональной переменной правой частью и на случай интегрального уравнения.

**Теорема 1.** Пусть  — банахово пространство. Пусть функция  непрерывна «по совокупности переменных» , , и пусть существует такая функция , ограниченная на каждом прямоугольнике , что .

Тогда существует такое решение , , задачи Коши

, (1)

что либо , либо  и  при . Оно единственно. Всякое другое решение задачи Коши (1) может быть лишь ограничением этого решения.

Этот результат обобщён нами на случай интегральных уравнений Вольтерра.

**Теорема 2.** Существует и единственно непродолжаемое решение , , уравнения , где отображение  удовлетворяет сформулированным в теореме 1 условиям, а  — непрерывная по совокупности переменных оператор-функция. При этом всякое другое решение этого уравнения есть ограничение решения . Кроме того, либо , либо  и  при .

Существенно, что для интегрального уравнения соотношение  нельзя заменить на . Подобный вопрос был поставлен в [2] и впервые решён в [3]. Однако наш пример отличается от данного в [3] более простой конструктивной формой и принадлежностью более узкому классу уравнений. Наше уравнение:



и  при  и , . Решение: .

Литература

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения // М.: Мир – 1970.
2. Miller R.K. Nonlinear Volterra integral equations. Menlo Park: W. A. Benjamin – 1971.
3. Artstein Z. Continuous dependence of solutions of Volterra integral equations. // – SIAM Jour. Math. Anal. (1975) **6**, p. 446—456.

# свойства базисности для операторов дирака потенциалом.

Савчук А.М.1, Садовничая И.В.2

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра ТФФА,  
e-mail: [artem\_savchuk@mail.ru](mailto:artem_savchuk@mail.ru)

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра общей математики,  
e-mail: [ivsad@yandex.ru](mailto:ivsad@yandex.ru)

Рассматривается оператор Дирака , порожденный в пространстве  дифференциальным выражением , где

, , .

Функции , предполагаются суммируемыми на отрезке  и комплекснозначными.

Изучается асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций оператора . Рассматривается вопрос о полноте и минимальности системы собственных и присоединенных функций оператора, а также вопрос о базисности Рисса и базисности Рисса из подпространств.

Краевые условия будем задавать в виде , где . Обозначим через  определитель, составленный из -го и -го столбцов матрицы краевых условий. Краевые условия называются *регулярными*(по Биркгофу), если . Будем называть краевые условия *сильно регулярными*, если они регулярны и к тому же .

**Теорема 1.** *Для любого сильно регулярного оператора Дирака с потенциалом  собственные значения и собственные функции асимптотически просты и система собственных и присоединенных функций образует базис Рисса в пространстве .*

В случае, когда краевые условия регулярны, но не сильно регулярны, собственные значения асимптотически двукратны и система корневых функций может, вообще говоря, не образовывать базис Рисса. Справедлива, однако, следующая

**Теорема 2.** *Пусть оператор* *регулярен, но не сильно регулярен. Тогда система его корневых подпространств образует базис Рисса из подпространств в пространстве .*

# Об особенностях одной нелокальной задачи для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией

Крицков Л.В.1, Сарсенби А.М.2

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМиК, кафедра ОМ, e-mail[: kritskov@cs.msu.ru](mailto::%20kritskov@cs.msu.ru)

2) ЮКГУ (Шымкент, Казахстан), ф-т ИТ, e-mail: [abzhahan@mail.ru](mailto:abzhahan@mail.ru)

Исследованы спектральные свойства нелокальной задачи (типа Самарского-Ионкина) для дифференциального оператора с инволюцией вида

 (1)

В случае отсутствия инволюции (т.е. при ) задача (1) является примером несамосопряженной задачи, множество корневых функций которой содержит наряду с собственными функциями бесконечно много присоединенных функций. Такие задачи В.А.Ильин назвал существенно несамосопряженными [1] и отметил их характерную неустойчивость как к выбору присоединенных функций, так и к малым возмущениям оператора (подробнее см. [2]).

Как выяснилось, задача (1) с инволюцией (при ) также является существенно несамосопряженной и обладает схожими свойствами.

Пусть  и положим . Справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** 1) Спектром (1) является множество .

2) Если , то система корневых функций задачи (1) содержит лишь собственные функции; она полна и минимальна в , но не образует базиса.

3) Если , то спектр (1) распадается на две последовательности:  так, что для  имеется только собственная функция, а для  - и собственная, и присоединенная функция 1-го порядка; указан способ выбора присоединенных функций, при котором система корневых функций задачи (1) образует безусловный базис в .

Приложения, а также алгебраическая и аналитическая теория дифференциальных уравнений с инволюцией обсуждаются в [3,4].

Литература

1. Ильин В.А. // Дифференц. уравнения. – 1994. Т.30, №9. С.1516-1529.
2. Ильин В.А., Крицков Л.В. *Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным дифференциальным операторам* / В кн.: Функциональный анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., т.96. – М.: ВИНИТИ, 2006. – С.190-231.
3. Przeworska-Rolewicz D., *Equations with transformed argument. An algebraic approach*. – Elsevier-PWN, Amsterdam-Warszawa, 1973.
4. Wiener J., *Generalized solutions of functional differential equations*. – World Sc. Pub., Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1993.

# о дестабилизации решений параболических уравнений

Денисов В.Н.1

1)МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Общей математики,  
e-mail: [vdenisov2008@yandex.ru](mailto:vdenisov2008@yandex.ru)

Рассмотрим модельную задачу Коши

, в  (1)

 (2)

где



 начальная функция из класса единственности решений задачи Коши (1), (2).

Будем говорить, что решение задачи (1), (2) дестабилизируется, если существует предел

 (3)

равномерно по  на каждом компакте в .

Обзор работ по стабилизации решений см. в [1]. Дестабилизация рассмотрена в [2].

**Теорема 1.** Если  и ограниченный коэффициент  удовлетворяет условию



при  то для любой непрерывной, ограниченной, положительной функции , решение задачи (1), (2) дестабилизируется.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-000-58).

Литература

1. Денисов В.Н. О проведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // – УМН (2005) **60**, №4, с.145–212.
2. Денисов В.Н. О дестабилизации решений параболических уравнений. // Труды Матем. Центра имени Н.И. Лобачевского: материалы межд. научн. конф. «Краевые задачи для дифференц. уравн. и аналит. функций» Казань (2014) **49**, с.149–152.

# АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И МЕТОД ПОВТОРНОГО КВАНТОВАНИЯ.

Коровина М.В.

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра общей математики,  
e-mail: [betelgeuser@](mailto:betelgeuser@)yandex.ru

Целью работы является описание метода повторного квантования, с помощью которого исследуются асимптотики уравнений с голоморфными коэффициентами.

Метод повторного квантования применяется для построения асимптотических разложений решений уравнений с вырождением, а именно, уравнений вида

 (1)

где и  – дифференциальный оператор с коэффициентами, голоморфными в некоторой окрестности нуля.



Здесь  – функции голоморфные в окрестности нуля. Заметим, что к уравнению вида (1) сводится задача о построении асимптотики решений уравнений вида

 (2)

на бесконечности, путем замены . Здесь  – функции голоморфные в некоторой окрестности бесконечности.

При применении оператора Лапласа-Бореля к уравнению (1) оператору умножения на  ставится в соответствие оператор . Это соответствие называется квантованием. Метод повторного квантования заключается в том, что квантование проводится два раза. При этом оператору интегрирования в двойственном пространстве ставится в соответствие оператор умножения. Пусть , тогда уравнение (2) можно записать в виде



Основной символ дифференциального оператора равен . Пусть он имеет корни порядка не выше второго, а именно числа являются корнями кратности один, а  – корнями кратности два. Тогда справедлива

Теорема. Асимптотика решения представима в виде



Здесь при условии, что 



А при условии 

.

Здесь через  обозначены голоморфные функции,  – некоторые константы.

Секция: «Обратные задачи управления»

Председатель академик РАН Осипов Ю.С.

# СопряженныЕ ПеременныЕ И Межвременные цены в Экономических задачах оптимального управления на бесконечном интервале времени.

Асеев С.М.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, e-mail: [aseev@mi.ras.ru](mailto:aseev@mi.ras.ru)

Доклад посвящен свойствам сопряженных переменных в соотношениях принципа максимума Понтрягина для одного класса задач оптимального управления на бесконечном интервале времени, возникающих в экономических приложениях. Рассматриваемый класс задач характеризуется фиксированным начальным состоянием и отсутствием каких-либо ограничений на поведение траекторий системы на бесконечности. Функционал полезности задается при помощи несобственного интеграла на бесконечном интервале времени. Как известно, бесконечный интервал планирования вносит в задачи данного класса особенность, что является источником различных патологических эффектов в соотношениях принципа максимума Понтрягина. В частности, принцип максимума для этих задачах может выполняться не обязательно в нормальной форме, а стандартные условия трансверсальности на бесконечности могут оказаться несовместными с основными соотношениями принципа максимума (сопряженной системой и условием максимума).

Сначала в докладе обсуждается недавно полученный в совместной с В.М. Вельовым работе [4] вариант принципа максимума Понтрягина в нормальной форме с сопряженной переменной определенной при помощи явной формулы, аналогичной формуле Коши для решений линейных дифференциальных систем. По форме данный результат аналогичен варианту принципа максимума, полученному ранее с совместных с А.В. Кряжимским работах [2], [3] в случае выполнения условия доминирования дисконтирующего множителя. Однако, в работе [4] не предполагается какой-либо сходимости интегрального функционала полезности, а условия регулярности оптимального процесса существенно ослаблены. Доказательство принципа максимума в работе [4] основано на использовании классического метода игольчатых вариаций.

Затем обсуждается предложенная в работе [1] новая экономическая интерпретация сопряженных переменных, как агрегированных межвременных цен. Данная интерпретация сопряженных переменных основана на их однозначной характеризации при помощи аналога формулы Коши.

Рассматривается ряд иллюстрирующих примеров.

Литература

1. Асеев С.М. О некоторых свойствах сопряженной переменной в соотношениях принципа максимума Понтрягина для задач оптимального экономического роста // – Тр. ИММ УрО РАН (2013), т. 19, № 4, с. 15–24.
2. Aseev S.M., Kryazhimskiy A.V. The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons // – SIAM J. Control Optim. (2004), v. 43, № 3, p. 1094–1119.
3. Асеев С.М., Кряжимский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // – Тр. МИАН (2007), т. 257, с. 3–271.
4. Aseev S.M., Veliov V.M. Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions // – Тр. ИММ УрО РАН (2014), т. 19, № 3, с. 41–57.

# О ПОЛЕЗНОСТИ КООПЕРАЦИИ В ИГРАХ ДВУХ ЛИЦ

Никольский М.С.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,  
e-mail: [mni@mi.ras.ru](mailto:mni@mi.ras.ru)

В теории игр (см., например, [1]) большое внимание уделяется кооперативной теории игр N лиц. В докладе рассматриваются игры двух лиц с точки зрения полезности объединения игроков в союз, для которого в качестве максимизируемого критерия выступает сумма выигрышей обоих игроков.

Пусть первый игрок максимизирует непрерывную функцию выигрыша f(x,y) по х, второй игрок максимизирует свою непрерывную функцию выигрыша g(x,y) по y, где вектор x выбирается из компакта X, а вектор y выбирается из компакта Y. Компакты X, Y принадлежат некоторым конечномерным евклидовым пространствам. Оба игрока стремятся к максимизации своего выигрыша за счет выбора своих стратегий x, y соответственно. Выбор стратегий осуществляется независимо друг от друга. Из теории игр известно, что первый игрок может гарантировать себе выигрыш

а второй игрок может гарантировать себе выигрыш

здесь векторы x, y принадлежат соответственно X, Y. Если выигрыши игроков измеряются в одних и тех же физических единицах, то можно рассматриваемой игре сопоставить величину

где максимизация производится по (x,y), принадлежащих прямому произведению множеств . При

игрокам стоит объединиться в союз, чтобы иметь возможность перераспределить величину

между собой для увеличения своего выигрыша. Как фактически можно произвести такое перераспределение, см., например, в [2].

В докладе выделены классы игр двух лиц, в которых удается гарантировать неравенство (\*). Также разработан некоторый способ обобщения этих результатов на линейные дифференциальные игры в программных стратегиях с терминальной платой.

Отмечу, что часть результатов была получена совместно с моим учеником М. Абубакаром (Нигер, Ниамей).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-00175-а, 12-01-00506, 13-01-00685, 13-01-12446 офи м2, 14-00-90408 Укр\_а и НАН Украины 03-01-14).

Приношу благодарность А.В.Кряжимскому и В.И.Жуковскому за внимание к моей работе и ценные советы.

Литература.

1. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков.М. : Наука, 1985.
2. Жуковский В.И. Кооперативные игры при неопределенности и их приложения. М.:URSS, 2010 ( изд. 2).

# ДОБРОЖЕЛАТЕЛЬНЫЙ «ХАРАКТЕР» РАВНОВЕСИЯ ПО БЕРЖУ

Жуковский В.И.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,  
e-mail: [zhkvlad@yandex.ru](mailto:zhkvlad@yandex.ru)

Для бескоалиционной игры трех лиц

Г = 〈{1, 2, 3}, {*Х i*}*i* = 1, 2, 3 *,* {*f i* (*x*)}*i* = 1, 2, 3 〉

ситуация *равновесна по Нэшу* в Г, если

 (1)

и  *равновесна по Бержу* в Г, если

 (2)

Отличие в том, что в (2) каждый игрок, «забывая о своих интересах, помогает остальным» (в отличие от «эгоистического характера» ).

**Теорема.**

 в смешанных стратегиях.

Доказательство основывается на [1 - 3].

**Замечание.** «Доброжелательный» способ (2) уравновешивания конфликтов существует при тех же ограничениях, что и «эгоистический» (1), однако нацелен он на «мирное урегулирование конфликта» (на взаимопомощь участников конфликта в достижении status quo).

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-00-90408 Укр\_а и НАН Украины № 03-01-14.

Литература

1. Zhukovskiy V., Topchishvili A. and Sachkov S. Application of probality measures to the existence problem of Berge-Vaisman guaranted equilibrium // Model Assisted Statistics and Applications (MASA). – 2014. – V. 9, № 3. P. 223–240.
2. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки // – Математическая теория игр и ее приложения. – 2013. Т. 5, Вып. 1. С. 27–44.
3. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. II. Аналог максимина // – Математическая теория игр и ее приложения. – 2013. Т. 5, Вып. 2. С. 3–45.

# ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В ДВУХСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ ТИПА CES

Киселёв Ю.Н.1, Аввакумов С.Н.2, Орлов М.В.3

1) ВМК МГУ, кафедра оптимального управления, Москва, e-mail: [kiselev@cs.msu.su](mailto:kiselev@cs.msu.su)

2) ВМК МГУ, кафедра оптимального управления, Москва, e-mail: [asn@cs.msu.su](mailto:asn@cs.msu.su)

3) ВМК МГУ, кафедра оптимального управления, Москва, e-mail: [orlov@cs.msu.su](mailto:orlov@cs.msu.su)

Рассматривается задача оптимального управления

 (1)

где  – фазовые координаты,  – скалярное управление,  –– «*достаточно большой*» горизонт планирования. Производственная функция



типа CES (положительно однородная измерения 1, вогнутая в ) – частный случай производственной функции CES , , , , , при , . Возможный особый режим в задаче (1) характеризуется соотношениями   – особый луч. Рассматриваются три случая: 1): начальное состояние , 2) :  выше , 3) :  ниже . Схема решения задачи содержит следующие этапы: вычисление возможных особых ре­жимов, составление краевой задачи принципа максимума, нахождение экстремальной тройки, обоснование оптимальности экстремального решения на основе специального интегрального представления приращения функционала [1-3]. При построении экстремального решения привлекается специальная функция  (). Для начальных состояний, не лежащих на особом луче , оптимальный режим содержит участки: *начальный* – движение к  (при  в случае ,  в случае ), *особый* – движение вдоль , *финальный* – движение с управлением . При  оптимальный режим состоит из *особого* и *финального* участков. Длительность каждого участка описана конструктивно.

Литература

1. Киселёв Ю.Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Мат. модели в экономике и биологии: Материалы научного семинара. Планерное Моск. обл. М: МАКС Пресс, 2003. C. 57–67.
2. Киселёв Ю.Н., Орлов М.В. Оптимальная программа распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией Кобба-Дугласа // Дифф. уравнения. 2010. Т. 46, № 12. C. 1749–1765.
3. Киселёв Ю.Н., Орлов М.В. Оптимальная программа распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией Кобба-Дуг­ла­са при различных коэффициентах амортизации // Дифф. уравнения. 2012. Т. 47, № 11. C. 1603–1611.

# УПРОЩЁННАЯ МОДЕЛЬ РАМСЕЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ЭЛАСТИЧНОСТЬЮ ПРОИЗВОДСТВА

Киселёв Ю.Н.1, Орлов С.М.2

1) ВМК МГУ, Москва, Ленинские горы, МГУ, факультет ВМК, [kiselev@](mailto:email@1)cs.msu.su

2) ВМК МГУ, Москва, Ленинские горы, МГУ, факультет ВМК, [sergey.orlov@cs.msu.su](mailto:sergey.orlov@cs.msu.su)

В докладе рассматривается нелинейная задача оптимального управления на бесконечном горизонте планирования

, (1)  
где одномерная фазовая переменная играет роль фондовооружённости, управление – доля капиталовложений от производственного выпуска, параметр – коэффициент амортизации производственных фондов, функция – коэффициент эластичности по производственным фондам (производства). Функционал качества описывает общее удельное потребление (на душу населения) на бесконечном интервале времени с дисконтированием . Задача (1) с постоянной функцией эластичности, , на конечном горизонте, , рассмотрена в книге [2].

Идея о рассмотрении задачи (1) с переменной эластичностью связана с изучением материалов конференции [3] и работы [4].

Задача (1) исследуется при различных типах переменной эластичности, а именно, при постоянной, кусочно-постоянной и кусочно-дифференцируемой функции . Поиск экстремальных решений осуществляется с помощью принципа максимума Понтрягина [3], а также при помощи специального интегрального представления функционала . Обоснование оптимальности найденного решения проводится прямым сравнением функционалов.

В случаях постоянной и кусочно-дифференцируемой функции оптимальное управление единственно. В случае кусочно-постоянной функции имеет место неединственность оптимального решения. Во всех случаях оптимальное решение содержит особые участки управления.

Литература

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. M.: Наука, 1961.
2. Ашманов С. А. Математические модели и методы в экономике. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1980.
3. Кряжимский А. В., Тарасьев А. М. Краткосрочная адаптация и долгосрочная инвестиционная политика в моделях экономического роста // Тихоновские чтения – 2013. Материалы конференции.
4. Ulveling, E. F., Fletcher, L. B., A Cobb-Douglas Production Function with Variable Returns to Scale // Am. J. Agr. Econ. (1970) 52 (2):322-326.doi: 10.2307/1237508

# оптимальныЕ траекториИ в МОДИФИКАЦИИ ЗАДАЧИ ГОДДАРДА в случае ПЛОСКОГО ПОЛЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И обобщенной силы сопротивления среды.

Самыловский И.А.1, Дмитрук А.В.2

1)МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,  
e-mail: [ivan.samylovskiy@cs.msu.ru](mailto:ivan.samylovskiy@cs.msu.ru)

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,  
e-mail: [avdmi@cemi.rssi.ru](mailto:avdmi@cemi.rssi.ru)

Рассматривается следующая задача оптимального управления:

 (1)

являющаяся обобщением задачи, изученной в работе [2], на случай вертикального движения в плоском постоянном гравитационном поле с ускорением свободного падения. Переменные  соответствуют высоте подъема, вертикальной скорости и массе объекта («метеорологической ракеты») в момент времени , функция сопротивления среды модифицирована с учетом вертикального направления движения и является выпуклой при и вогнутой при . Исследуется вопрос о наличии и количестве особых режимов вдоль оптимальной траектории.

В работе выделяются все типы траекторий, подозрительных на оптимальность, производится их классификация в зависимости от начальных условий задачи и производится численный поиск границ особых режимов для соотношений между верхней границей «ускорения»  и «ускорением свободного падения»на основе открытых данных о параметрах ракет-носителей семейств «Diamant», «Ariane», «Союз» и «Saturn».

Литература

1. Bonnans J.F., Martinon P., Trelat E. Singular arcs in the generalized Goddard’s Problem // – J .Optimization Theory and Applications (2008) 139, №2, pp. 439–461.
2. Andrei Dmitruk, Ivan Samylovskiy A simple trolley-like model in the presence of a nonlinear friction and a bounded fuel expenditure // – Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, control and optimization (2013) 33, №2, pp. 135–147.
3. Дмитрук А.В., Самыловский И.А. Исследование оптимальных траекторий в некоторых модификациях простейшей задачи о движении материальной точки с нелинейным сопротивлением и ограниченным расходом топлива // Сборник трудов XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014), Москва, 16–19 июня 2014 г.

# Решение задачи наведения на целевое множество при наличии неопределенности

Камзолкин Д.В.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,  
e-mail: [kamzolkin@cs.msu.ru](mailto:email@1)

Многие процессы, происходящие в современном мире, можно описать дифференциальными играми со смешанными стратегиями. Примером может являться следующая ситуация в рыночной экономике. Пусть один игрок - это фирма Икс, продающая некий товар, а другой - так называемая "окружающая среда", то есть все остальные фирмы, продающие тот же товар. Фирма Икс самостоятельно решает, сколько продукции ей производить (это будет управление первого игрока). Естественно, чтобы продать товар и получить прибыль, фирма Икс вынуждена считаться с ценой, установленной на рынке (это управление второго игрока). Допустим, "окружающая среда" назначает цену по некоторому вероятностному закону. Для описания такого закона уместно использовать цепи Маркова и условную вероятность. Тогда динамику развития фирмы Икс можно описать дифференциальной игрой со смешанными стратегиями.

В данном случае решить задачу - значит понять, как себя вести фирме Икс, чтобы получить гарантированную прибыль, если известно, по какому закону назначает цену "окружающая среда", а также рассчитать, с какой вероятностью она может "добиться успеха" (попасть на целевое множество в игре) в зависимости от начальных данных.

Тема оценки рисков в экономике актуальна, поэтому решение подобных задач весьма интересно в практическом смысле.

В докладе исследована конфликтно-управляемая система, описываемая обыкновенными дифференциальными уравнениями с двумя управляющими параметрами: первого и второго игроков соответственно:

с дискретными областями допустимых управлений  и 

Рассматривалась задача приведения системы на заданное целевое множество в конечный момент времени при наличии неопределенности в выборе управления второго игрока и известных вероятностях выбора этим игроком того или иного значения управления в текущий момент времени. Задача решалась с использованием метода динамического программирования. По ходу решения строятся множества достижимости целевого множества с заданными вероятностями и управление, решающее поставленную задачу с указанной вероятностью. Рассмотрен модельный пример.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-00-90408 Укр\_а и НАН Украины (проект № 03-01-14).

Литература

1. Kamzolkin D.V., Grigorenko N.L., PivovarchukD.G. Optimization of Two-Step Investment in a Production Process.// - Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics - Vol. 262 - 2008.
2. Камзолкин Д.В., Григоренко Н.Л., Лукьянова Л.Н., Пивоварчук Д.Г. Об одном классе задач управления в условиях неопределенности. // - Труды института математики и механики УрО РАН. - Том 17, № 2 - 2011.

# МЕТОДЫ СТРЕЛЬБЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАВНОВЕСНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Будак Б.А.1

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,  
e-mail: [babudak@gmail.com](mailto:email@1)

Основная постановка задачи равновесного программирования выглядит следующим образом: найти точку такую, что

 (1)

К этой постановке сводится большое количество классов задач, например, задачи минимизации, задачи поиска седловой точки, вариационные неравенства, задачи поиска равновесия по Нэшу и пр. В докладе обсуждаются модификации метода стрельбы для решения задач равновесного программирования, предложенного автором в статье [1]. Для случая, когда функция недифференцируема, рассматривается проксимальный аналог метода

 (2)

 (3)

 (4)

 (5)

где - фиксированная точка из множества W. Показывается, что при классических условиях этот аналог обладает сходимостью к множеству решений рассматриваемой задачи. Для случая, когда входные данные задачи известны неточно, предлагается регуляризованный аналог метода (2)-(5).

Литература

1. Будак Б.А. Метод стрельбы для решения задач равновесного программирования // ЖВМиМФ – 2013. Т.53. №12 С.2008–2013.

# Терминальное управление системой второго порядка при наличии фазовых ограничений

Лукьянова Л.Н.1, Анисимов А.В.2

*1)МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, Лаборатория обратных задач,   
e-mail: lln*[*@cs.msu.su*](mailto:email@1)

2)МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, Кафедра Оптимального управления,  
e-mail: [alexx91@mail.ru](mailto:alexx91@mail.ru)

Рассматривается задача терминального управления при наличии фазовых ограничений и дополнительных ограничений на качественный характер терминальной траектории для системы второго прядка в двумерном евклидовом пространстве при геометрических ограничениях на параметры управления. Предложен класс управляющих функций, решающий такую задачу управления. Приведены результаты численных расчетов задачи управления для модельных параметров системы. Задачи приведения траектории системы линейных дифференциальных уравнений с управлением на терминальное множество и задачи уклонения от встречи с препятствием, по отдельности изучались в работах [1]-[6]. Управление, совмещающее эти две функции, построено для игровой задачи управления с простыми движениями игроков в работе [4]. В настоящей работе, для системы второго порядка, приведен способ построения управления, совмещающий эти функции и позволяющий получить траекторию, удовлетворяющую ряду дополнительных ограничений на качественный характер терминальной траектории, например, условия "гамма" обхода траекторией заданного множества. Решение задачи терминального управления, для рассматриваемой в данной работе управляемой системы, ищется в классе квазимногочленов. Выбор управления в виде многочлена мотивирован тем фактом, что управляющая функция в виде многочлена, для ряда управляемых систем, переводит объект из начального фазового состояния в конечное и является оптимальной по критерию «расход топлива» при числе конечных условий, равных порядку системы. Рассмотрение управления в виде квазимногочлена для рассматриваемой в данной работе управляемой системы, позволяет записать явный вид управлений в компактной форме и выделить коэффициенты определяющие выполнение краевых условий и коэффициенты отвечающие за выполнение фазовых ограничений. Рассматриваемая в докладе динамическая управляемая система встречается в задачах управления мобильными роботами и задачах управления параметрами экономических процессов [6].

Литература

1. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. 1971. Т.7, № 3.
2. Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. К теории дифференциальных игр с неполной информацией, Докл.АН СССР, 1974, Т.215, № 4, с.780-783
3. Куржанский А.Б. Дифференциальные игры сближения при ограниченных фазовых координатах // ДАН СССР,1970,т.192, №4.
4. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска // М.: Наука, 1978.
5. Никольский М.С. Некоторые линейные задачи управления // Вестн.моск.ун-та. сер.15. Вычисл.матем. и киберн. №1, 2010.
6. Лукьянова Л.Н. Задача уклонения от столкновения // Изд-во МАКС Пресс, Москва, 2009.

# Численное решение задачи управления для нелинейной модели высокой размерности

Григоренко Н.Л.1, Горьков В.П.2

1)МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Оптимального управления,  
e-mail: [grigor@cs.msu.su](mailto:grigor@cs.msu.su)

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, лаборатория Обратных задач),  
e-mail: [v-p-gorkov@yandex.ru](mailto:v-p-gorkov@yandex.ru)

Доклад посвящен изложению способов решения задачи терминального управления для модели движения вертолета в вертикальной плоскости [1], при наличии ограничений на управления и фазовых ограничений. Изучаемая нелинейная модель имеет вид:

– заданные функции, - положительные константы, (u,θ) – параметры управления, – заданное фазовое ограничение. Вектор управления модели содержит компонентами переменный шаг несущего винта, угол отклонения его оси и должен удовлетворять ограничениям. Начальные и конечные условия фиксированы. Момент окончания процесса управления не фиксирован. Траектория системы должна удовлетворять фазовому ограничению. Для решения задачи предложены модифицированные варианты метода синтеза терминального управления в заданном классе непрерывных функций [1] и метода синтеза терминальных управлений, реализующих заданное движение [1], гарантирующие решение задачи терминального управления и настраиваемые на выполнение ограничений на управления и фазовые ограничения. Модифицированные варианты методов содержат параметры, для нахождения которых сформулированы соответствующие критерии и экстремальные задачи для этих критериев. Решение задачи терминального управления получено в классах программных и позиционных управлений [2]-[4]. Позиционные управления сконструированы в соответствии с правилом экстремального прицеливания и обеспечивают устойчивое движение фазовой точки по траектории при неточных заданиях параметров управляемого объекта [2]-[5]. Приведены результаты численных расчетов этапов решения экстремальных задач и полученный вид управлений и траекторий удовлетворяющих ограничениям.

Литература

1. Батенко А.П. Системы терминального управления. М.: Радио и связь, 1984.
2. Куржанский А.Б. Избранные труды — М.: Издательство МГУ, 2009.
3. Осипов Ю.С. Избранные труды — М.: Издательство МГУ, 2009.
4. Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко B.C. Экстремальное прицеливание в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 4.
5. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. Изд-во МГУ, Москва, 1990.

# О разрешимости ЗАДАЧИ ГАРАНТИРОВАННОГО ПОЗИЦИОННОГО НАВЕДЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ К МОМЕНТУ ВРЕМЕНИ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Стрелковский Н.В.1

1)МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Оптимального управления  
e-mail: [forlan@me.com](mailto:forlan@me.com)

Настоящая работа продолжает развивать предложенный А.В. Кряжимским и Ю.С. Осиповым новый подход к решению задач оптимального управления с неполной информацией, направленный на соединение задач позиционного управления с неполной информацией как объекта исследования с неупреждающими программными операторами как средством анализа.

В данной работе рассматривается задача гарантированного позиционного наведения линейной управляемой системы вида



на заданное целевое множество к заданному моменту времени при неполной информации. Исследование опирается на метод пакетов программ [1], представляющий собой программный инструмент для решение рассматриваемой задачи. В случае рассматриваемого конечного множества X0 допустимых начальных состояний пакет программ представляет собой произвольное множество программных управлений, удовлетворяющее условию неупреждаемости. Задача рассматривается на конечном множестве допустимых моментов наведения и состоит в поиске наводящего пакета программ с некоторым семейством допустимых моментов наведения.

В данной работе множество X0 разбивается на «кластеры» точек X0(g(·),τ), при движении из которых наблюдаемые однородные сигналы совпадают с заданным однородным сигналом g(·) до некоторого момента времени τ ∈ [t0, θ]. Таким образом, производится параметризация исходной системы начальными состояниями, для которых наблюдаемые однородные сигналы совпадают на отрезке времени [t0,θ]. Строится расширенная система, каждый экземпляр которой параметризуется соответствующим начальным состоянием из множества X0 и для неё ставится расширенная задача программного наведения, эквивалентная исходной задаче [3]. В работе описаны условия разрешимости данной задачи в терминах ограничений на опорные функционалы геометрических ресурсов управления на отрезках.

Литература

1. Осипов Ю. С. Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // УМН. 2006. Т. 61, No 4. C. 25–76.
2. Кряжимский А.В., Осипов Ю. С. Идеализированные пакеты программ и задачи позиционного управления с неполной информацией // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15, No 3. С. 139–157.
3. Кряжимский А.В, Стрелковский. Н.В Программный критерий разрешимости за- дачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы, Труды Института математики и механики УрО РАН, 2014, т. 20, No3, с. 132-147.

Секция: «Математическая кибернетика и исследование операций»

подсекция кафедры математической кибернетики

Председатель профессор Алексеев В.Б.

# О сложности функций двузначной и трехзначной логик в классах поляризованных полиномиальных форм

Селезнева С.Н.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Ф-т ВМК, e-mail: [selezn@cs.msu.su](mailto:selezn@cs.msu.su)

Поляризованная полиномиальная форма (ППФ) (по модулю ) – это сумма по модулю произведений переменных или их отрицаний, причем в каждой ППФ каждая переменная встречается с определенным числом отрицаний, которое указано в векторе поляризации этой ППФ.

Длиной ППФ называется число ее попарно различных слагаемых. Длиной функции -значной логики в классе ППФ называется минимальная длина среди всех ППФ, реализующих эту функцию. Н.А. Перязев доказал достижимую верхнюю оценку максимальной длины функций двузначной логики, зависящих от переменных, в классе ППФ [1]. С.Н. Селезнева и Н.К. Маркелов нашли верхнюю и нижнюю оценку максимальной длины функций трехзначной логики, зависящих от переменных, в классе ППФ [2-3].

В этой работе построена такая последовательность симметрических функций трехзначной логики , что длина каждой из функций в классе ППФ не меньше, чем , где обозначает наибольшее целое число, не превосходящее число .

Сложностью системы ППФ, имеющих один и тот же вектор поляризации, называется число попарно различных слагаемых, встречающихся во всех этих ППФ. Сложностью системы функций -значной логики, зависящих от переменных , в классе ППФ называется минимальная сложность среди всех таких систем ППФ , что все ППФ имеют один и тот же вектор поляризации, и ППФ реализует функцию , . Понятно, что при простых для произвольной системы верно, что .

В этой работе доказано, что для каждого и каждого найдется такая система из симметрических функций двузначной логики, зависящих от переменных , и система из симметрических функций трехзначной логики, зависящих от переменных , что и .

Работа поддержана РФФИ, гранты 13-01-00684-а, 13-01-00958-а.

Литература

1. Перязев Н.А. Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм // Алгебра и логика. 1995. 34. № 3. С. 323-326.
2. Селезнева С.Н. О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами // Дискретная математика. 2002. 14. № 2. С. 48-53.
3. Маркелов Н.К. Нижняя оценка сложности функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2012. № 3. С. 40-45.

# О СВОЙСТВАХ МОНОТОННЫХ САМОДВОЙСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЧЕТЫРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Нагорный А.С.1

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической кибернетики,  
e-mail: [anagorny@list.ru](mailto:anagorny@list.ru)

Пусть  и  — класс всех конечноместных функций на . Элементы множества  будем называть функциями четырехзначной логики.

Все необходимые определения основных понятий можно найти в [1]. Пусть  суть предполные классы в  из семейства ***M4*** классов монотонных (относительно ограниченных частичных порядков) функций и семейства ***S4*** классов самодвойственных функций четырехзначной логики.

**Определение**. Пересечение  (1) назовем *неприводимым*, если после удаления любого  получается класс функций, не равный классу функций, задаваемому исходным пересечением; и *тривиальным*, если оно содержит только все селекторные функции.

Целью данной работы является исследование неприводимых пересечений вида (1) на тривиальность. В случае, если речь идет только о классах монотонных функций, задача решена автором ранее [2]. Поэтому в данной работе будем считать, что хотя бы один из классов  берется из семейства ***S4***.

Пусть *a, b, c, d* — попарно различные элементы множества . Обозначим через  и  классы функций из , монотонных относительно линейного порядка () и частичного порядка (), соответственно. Очевидно, семейство ***M4*** состоитиз таких и только таких классов. Далее, обозначим через  класс функций, сохраняющих двуместный предикат . Такие классы формируют семейство ***S4*** самодвойственных функций в .

**Лемма**. .

**Теорема 1**. Следующие пересечения классов являются неприводимыми и тривиальными:

, , ,

, .

**Теорема 2**. Следующие пересечения классов являются неприводимыми и нетривиальными:

, , , ,

, , .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00958-a).

Литература

1. Марченков С.С. Функциональные системы с операцией суперпозиции // М.: Физматлит – 2004.
2. Нагорный А.С. О пересечениях классов монотонных функций многозначной логики // XI международный семинар «Дискретная математика и ее приложения», (Москва, 18-23 июня 2012 г.). М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, С.207-209.

# ПолиномиальнОСТЬ задачи проверки совпадения множества единиц полинома Жегалкина с образцом

Бухман А.В.1, Селезнева С.Н.2

1) Ф-т ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: [antvbx@gmail.com](mailto:antvbx@gmail.com)

2) Ф-т ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: [selezn@cs.msu.su](mailto:selezn@cs.msu.su)

Известно, что задачи определения по списку мономов в полиноме Жегалкина функции алгебры логики , верно ли, что функция обращается в единицу на наборах и, соответственно, более, чем на наборах, являются NP-трудными [1]. В настоящей работе мы исследуем алгоритмическую сложность решения следующей задачи.

**Вход**: полином Жегалкина функции алгебры логики в виде списка мономов; множество (образец) наборов из нулей и единиц.

**Вопрос**: верно ли, что множество наборов, на которых функция обращается в единицу, в точности совпадает с множеством ?

Ведем некоторые определения. Пусть . Функцией алгебры логики называется отображение , . Пусть . Каждая функция алгебры логики может быть однозначно представлена полиномом Жегалкина, т.е. в виде суммы по модулю два попарно различных произведений переменных [2].

Мы доказываем следующую теорему.

**Теорема.** *Можно построить полиномиальный алгоритм, который получает на вход список мономов полинома Жегалкина функции алгебры логики и множество и выдает «да», в том случае, когда , и «нет», в случае, когда .*

Доказательство теоремы проводится сведением рассматриваемой задачи к задаче распознавания 1-инвариантности функции алгебры логики, для решения которой известен полиномиальный алгоритм [3].

Работа поддержана РФФИ, грант 13-01-00684-а.

Литература

1. Eherenfeucht A., Karpinski M. The computational complexity of (XOR, AND) counting problems: Preprint. Bonn: Univ., 1989.
2. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
3. Bukhman A.V. Recognition of functions invariant under Moebius transformation and even functions defined in polynomial form // Computational Mathematics and Modeling. 2013. 24. 4. P. 552-557.

# Проблема выполнимости для систем функциональных уравнений счетнозначной логики

Калинина И.С.1

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, МК, e-mail: [isenilova@gmail.com](mailto:isenilova@gmail.com)

Пусть ,  - множество всех функций на  (множество функций счетнозначной логики). Пусть каждая функция из  имеет индивидуальное обозначение. Для обозначения -местных функций из  используем символы , которые называем функциональными константами. Наряду с функциональными константами рассматриваем функциональные переменные  со значениями в области  и предметные переменные  с областью значений . Пусть . Определим понятие терма над Q. Всякая предметная переменная есть терм над , если  - термы над ,  - функциональная константа,  - функциональная переменная, то выражения - термы над .

Равенством (функциональным уравнением) над *Q* называем любое выражение вида , где  - термы над . Пусть  - все функциональные переменные, входящие в уравнение . Решением уравнения  называем систему  функций из , которая после замены каждой переменной  соответствующей функциональной константой  превращает уравнение  в тождество относительно всех входящих в уравнение предметных переменных. Решением системы уравнений  называем систему функций из , которая является решением каждого уравнения из системы  (см. [1]). Проблемой выполнимости для системы функциональных уравнений назовем проблему существования хотя бы одного решения для данной системы уравнений.

Доказано, что проблема выполнимости для систем функциональных уравнений с функциональной константой *p* (см. [2]) алгоритмически неразрешима и является *m*-полной проблемой в классе  арифметической иерархии Клини-Мостовского (см. [3]). Этот факт оказывается верным и для функциональных уравнений над множеством , где - константы. Предложен метод построения решения системы функциональных уравнений над множеством , сложность которого определяется классом . С помощью этого метода можно также построить множество, включающее в себя все решения данной системы уравнений.

Литература

1. Марченков С.С., Калинина И.С. Оператор FE-замыкания в счетнозначной логике // Вест. МГУ. 15 (3), Вычисл. математика и кибернетика, С. 42-47 (2013).
2. Марченков С.С. Однородные алгебры // Проблемы кибернетики, С. 85-106 (1982).
3. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость // М.: Мир, 1972.

# Тесты для булевых функций относительно линейных и монотонных симметрических слипаний переменных.

Морозов Е.В.1

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, e-mail: [morozov\_msu@mail.ru](mailto:morozov_msu@mail.ru)

Будем говорить, что произошло -слипание переменных в булевой функции , если вместо исходной функции реализуется функция неисправности, полученная из подстановкой функции вместо слипающихся переменных. Число называется кратностью -слипания. Если – подряд идущие числа, то -слипание называется локальным. -слипание множественное, если произошло несколько непересекающихся слипаний переменных. Источник неисправностей, связанный с -слипаниями, обозначим через . Если слипание локальное, обозначим это префиксом , если оно имеет кратность , то это будет выражено в нижнем индексе. Все результаты верны как для множественных, так и для единичных -слипаний, поэтому далее не будем делать между ними различий. В качестве множества рассматриваются линейные функции и монотонные симметрические функции Для этих неисправностей изучаются проверяющие и диагностические тесты. Длину минимального проверяющего (диагностического) теста для относительно источника неисправностей обозначим через (). Определим функции Шеннона длин тестов: , . Также изучается функционал , аналогичный , где рассматриваются функции без фиктивных переменных. Получены результаты:



**Теорема 1.** Для почти всех булевых функций верны верхние оценки: , , где – сколь угодно малое положительное число.



**Теорема 2.** При верны следующие оценки для функций Шеннона: , .При , нечетном верна следующая оценка: , а при четном .



**Теорема 3.** При верна следующая оценка: .



При доказательстве первых двух теорем используется метод проверяющих пар [1], а при доказательстве третьей теоремы – свойства таблицы неисправностей.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-01-00964-а.

Литература

1. Морозов Е.В. О тестах относительно множественных линейных слипаний переменных в булевых функций // Вестник Московского Университета. Серия 15. Вычислительная Математика и Кибернетика – 2014. № 1. С. 22-25.

# Об одном алгоритме порождения матриц Адамара 12 порядка

Борисов А.В.1

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, каф. информационной безопасности,   
e-mail: [prazo@ya.ru](mailto:email@1)

В докладе предлагается алгоритм классификации матриц Адамара 12 порядка который позволяет порождать матрицы без повторений и тем самым предложен единый алгоритм формирования матриц Адамара 12 порядка, при этом каждая матрица однозначно задается по 3-м параметрам.

Предложенная в [1] эквивалентность матриц по М.Холлу не дает однозначного пути поиска матриц, которые принадлежат разным классам эквивалентности. Нетривиальные преобразования матрицы H приводят к той же матрице H, порождая т. н. «повторы» матриц, например для :



Поэтому представляет интерес задача поиска множества преобразований матриц Адамара, мощность которого совпадает с числом всех матриц Адамара соответствующего порядка.

Экспериментальным путем установлено, что множество матриц Адамара 12 порядка разбивается на 16 классов эквивалентности по операциям отличным от М.Холла и представитель класса, матрица порядка 12, имеет следующий вид:

где ABCD – блоки 3x9 элементов:



где это инверсия блока .

В дальнейшем предложенный подход предлагается распространить на 16 и другие порядки.

Литература

1. Холл М. Комбинаторика, // – М.:Мир (1970), С. 283–307.

# ИССЛЕДОВАНИЕ КРИПТОСИСТЕМЫ MST3 НА ОСНОВЕ 2-группы СУДЗУКИ

Рыбкин А.С.1

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра информационной безопасности,  
e-mail: [randserg@mail.ru](mailto:randserg@mail.ru)

В последние годы ассиметричная криптография становится неотъемлемой частью многих информационных систем. Стойкость большинства существующих криптосистем с открытым ключом основывается на некоторых предположительно трудноразрешимых математических задачах, таких как задача факторизации целых чисел или задача дискретного логарифмирования. Однако ввиду существования квантовых алгоритмов Шора для решения этих задач становится актуальным поиск новых трудноразрешимых математических задач и последующее построение криптосистем на их основе.

Одно из таких направлений поиска привело к рассмотрению задачи факторизации элементов в конечной группе. В данной работе исследуется предложенная в [1] криптосистема с открытым ключом MST3, основанная на данной задаче. В качестве базовой для данной криптосистемы конечной группы рассматривается рекомендованная в [1] для этой цели 2-группа Судзуки.

В первой части работы исследуется атака на криптосистему MST3 на основе 2-группы Судзуки, предложенная в [2]. Для частных параметров криптосистемы приводится теоретическое обоснование полученной в [2] экспериментальным путем оценки на сложность данной атаки. В общем случае демонстрируется, что сложность атаки существенно зависит от выбора автоморфизма, с помощью которого задается 2-группа Судзуки, лежащая в основе криптосистемы. Это позволяет утверждать, что исследуемая атака при определенных значениях данного автоморфизма может иметь достаточно большую сложность, что, в свою очередь, ограничивает условия ее применения.

Во второй части работы исследуется ключевое пространство криптосистемы MST3. В связи с тем, что основную часть секретного ключа данной криптосистемы составляет простая логарифмическая сигнатура для центра 2-группы Судзуки, проводится оценивание размера множества различных простых логарифмических сигнатур. В частности, приводятся точные оценки количества канонических и трансверсальных логарифмических сигнатур, а также верхние оценки количества логарифмических сигнатур произвольного вида. Полученные оценки отражают количество как всех, так и только неэквивалентных логарифмических сигнатур, что позволяет оценить мощность ключевого пространства криптосистемы с учетом возможной эквивалентности ключей. Итоговые результаты свидетельствуют о наличии достаточно большого количества секретных ключей для криптосистемы MST3, что, к примеру, делает неактуальной атаку, направленную на их полный перебор.

Литература

1. Lempken W., Magliveras S.S., van Trung T., Wei W. A public key cryptosystem based on non-abelian finite groups // Journal of Cryptology, 2009, Volume 22, Issue 1, 62-74.
2. Blackburn S.R., Cid C., Mullan C. Cryptanalysis of the MST3 public key cryptosystem // Journal of Mathematical Cryptology, 2009, Volume 3, Issue 4, 321-338.

Секция: «Математическое моделирование и вычислительные методы»

Председатель профессор Гулин А.В.

# О взаимосвязи классических методов и алгоритмов некорректных задач в линейной алгебре

Терновский В.В.1, Хапаев М.М.2

1)ВМК МГУ, кафедра вычислительных методов, email: [vladimir.ternovskii@gmail.com](mailto:vladimir.ternovskii@gmail.com)

2) ВМК МГУ, кафедра общей математики

Известно множество прямых и итерационных классических методов решения систем линейных алгебраических уравнений. На точность численного решения влияют погрешности задания элементов матрицы, вектора правой части, а также ошибки округлений. Существуют задачи с плохо обусловленными системами. Если применять стандартные методы, например, метод исключений Гаусса, то для таких систем не удается найти корректное решение, хотя величина невязки может быть меньше погрешности входных данных и ошибок округлений. Малость невязки не гарантирует близости к правильному решению без учета обусловленности системы. В действительности даже предварительное исследование системы на обусловленность трудоемко. В работе развивается новый подход к решению алгебраических систем, основанный на статистическом эффекте в матрицах большого порядка. Обусловленность систем меняется с большой вероятностью при зашумлении матрицы [1]. Изучается вопрос, какую задачу можно считать плохо или хорошо обусловленной и как ее решать. Для решения систем применяются стандартные методы, причем полученное «хаотичное» решение используется как источник априорной информации в более общей задаче условной минимизации построения нормального решения.

Литература

1. Terence Tao and Van Vu. Smooth analysis of the condition number and the least singular value. Mathematics of computation ,Volume 79, Number 272, October 2010, Pages 2333–2352

# Вычисление индуктивностей сверхпроводниковых структур с внутренними источниками тока

Хапаев М.М.1, Куприянов М.Ю.2

1) МГУ, ВМК каф. вычислительных методов, e-mail: [vmhap@cs.msu.su](mailto:vmhap@cs.msu.su)

2) МГУ, НИИЯФ, лаб. физики наноструктур, e-mail: [mkupr@pn.sinp.msu.ru](mailto:mkupr@pn.sinp.msu.ru)

В докладе рассматривается задача вычисления токов сверхпроводимости и индуктивных коэффициентов в планарных многослойных сверхпроводниковых микроэлектронных структурах. Для этого используется модель листовых токов сверхпроводимости. В этой модели для тока сверхпроводимости ранее использовалось известное потенциальное представление, называемое функцией тока [2]. Этот представление удобно для описания вихревых токов и замкнутых токов, циркулирующих вокруг отверстий в сверхпроводнике. С другой стороны, при этом возникают проблемы для описания терминальных токов, если источники тока не находятся на внешней границе сверхпроводниковой схемы. Это обстоятельство ограничивает область применения математической модели и программы, разработанной в [2].

Для устранения указанной проблемы в данной работе мы предлагаем два новых подхода. В первом подходу отверстие в сверхпроводнике или его часть можно рассматривать как терминал для тока. В этом случае появляется новая взаимная индуктивность между терминальным током и током вокруг отверстия. Во втором подходе некоторая область служит распределенным источником тока. Второй подход особенно удобен для моделирования межслойных соединений и джозефсоновских переходов. В обоих случаях ток представляется в виде суммы вихревой составляющей и ламинарной. Ламинарный ток вычисляется с помощью решения второй краевой задачи для уравнений Лапласа или Пуассона. Краевые условия и правая часть уравнения моделируют внутренние источники тока. Для вихревой составляющей используется представление в виде функции тока. Для численного решения используется метод конечных элементов. Обе модели реализованы как усовершенствование нашей программы 3D-MLSI [3].

Приводятся результаты расчетов.

Литература

1. C.J. Fourie and M.H. Volkmann. Status of superconductor electronic circuit design software. Applied Superconductivity, IEEE Transactions on, 23(3):1300205-1300205, June 2013.
2. Khapaev M. M. Inductance extraction of multilayer finite-thickness superconductor circuits. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 49(1):217-220, 2001.
3. Khapaev M. M., Kupriyanov M.Yu., Inductance extraction of superconductor structures with internal current sources. In press.
4. Terry P. Orlando. Foundations of Applied Superconductivity. Addison-Wesley, 1991.

# О РЕШЕНИИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ

Моисеев Т.Е.

МГУ имени Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов,  
e-mail [tsmoiseev@mail.ru](mailto:tsmoiseev@mail.ru)

Рассматривается краевая задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

, (1)

со смешанными граничными условиями в эллиптической части области.

На одной части границы задана наклонная производная с постоянным углом наклона, а на другой первое краевое условие. В гиперболической части области на одной из характеристик уравнения задан ноль, а на линии изменения уравнения задано условия типа Франкля. Доказано, что решение исходной задачи имеет единственное решение или определено с точностью до решения однородной задачи.

В докладе выписано интегральные представления этой задачи в виде интегралов типа Коши и приведены корректные постановки данной задачи. В частных случаях эти формулы совпали с формулами, которые приведены в [1], а более подробное освещение это вопроса приведено в статье [2]

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов НШ-5461.2014 и РФФИ (проекты 13-01-00241-а,14-01-00163-а)

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных, М.,1981 г.
2. Моисеев Т.Е. О Неединственности решения задачи Трикоми с обобщенным условием склеивания Франкля // Дифференциальные уравнения, т.50, N10, стр.1386-1391..

# Консервативный алгоритм для моделирования массопереноса в сети

Мухин С.И.1, Борзов А.Г.2

1) МГУ им. М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов,   
e-mail: [vmmus@cs.msu.su](mailto:vmmus@cs.msu.su)

2) МГУ им. М. В. Ломоносова,факультет ВМК, кафедра вычислительных методов,   
e-mail: [kritikmeister@gmail.com](mailto:kritikmeister@gmail.com)

В работе рассматривается вопрос о построении консервативной разностной схемы, аппроксимирующей уравнения переноса вещества жидкостью по замкнутой системе эластичных трубок. Течение жидкости описывается в квазиодномерном приближении, скорость жидкости предполагается известной. Перенос вещества рассматривается с учетом диффузии. Система трубок является произвольной и замкнутой пульсационным насосом. Данная конфигурация соответствует постановке задаче о расчете переноса веществ кровью по системе кровеносных сосудов под действием периодически сокращающегося сердца. Математические модели переноса веществ по замкнутому графу кровообращения удовлетворяют свойству консервативности. Этому же требованию должны удовлетворять и реализующие их численные алгоритмы. Консервативность необходима для адекватного воспроизведения влияния растворенных веществ как на систему в целом, так и для расчета содержания веществ в различных группах сосудов. Наличие неконтролируемых и нефизиологических источников веществ делает невозможным правильное воспроизведение соответствующих реакций организма в численном расчете. Для решения данных проблем был разработан оригинальный консервативный вычислительный алгоритм для решения системы квазиодномерных уравнений конвекции-диффузии на произвольной сети сосудов, связанных условиями сопряжения в точках ветвления и в точечных тканях. Этот алгоритм обобщен на расчет прохождения веществ через пульсирующее сердце. Построение численной аппроксимации осуществлено на основе интегро-интерполяционного метода. Доказана консервативность полученной разностной схемы. Эффективность предложенного алгоритма подтверждена тестовыми и прикладными расчетами.

# Результаты испытаний нового метода решения задачи Коши для гамильтоновых систем на точных решениях модельной задачи

Александров П.А.1, Еленин Г.Г.2

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов,   
e-mail: [petr\_aleksandrov@mail.ru](mailto:petr_aleksandrov@mail.ru)

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов,   
e-mail: [elenin2@rambler.ru](mailto:elenin2@rambler.ru)

Решения задачи Коши для гамильтоновых систем обладают рядом глобальных свойств с глубоким геометрическим и физическим содержанием (симплектичность, обратимость во времени, сохранение фазового объема, сохранение полного импульса, полного момента импульса и полной энергии при отсутствии внешних сил) [1]. Естественно потребовать от вычислительных методов сохранения этих свойств на приближенных решениях.

Доклад содержит результаты испытаний нового метода на точных решениях модельной задачи об одномерном движении материальной точки в поле потенциала Морзе. В основе метода лежит двухпараметрическое семейство трехстадийных симметрично-симплектических неявных методов Рунге-Кутты [2, 3], имеющих, как минимум, четвертый порядок аппроксимации. Система разрешающих уравнений этих методов дополняется условием сохранения полной энергии, при этом параметры семейства рассматриваются как новые неизвестные. Согласно проведенным исследованиям, расширенная система имеет решение, которое находится итерационным методом. Внутренние итерации служат для определения решения разрешающих уравнений при заданных значениях параметров метода, а внешние позволяют определить значения параметров из условия нулевого дисбаланса полной энергии.

Приводятся результаты апостериорного анализа дефектов симплектичности, дефектов обратимости во времени, дисбаланса полной энергии, а также погрешности приближенных решений, полученных новым вычислительным методом. Проводится сравнение с известными вычислительными методами решения задачи Коши для гамильтоновых систем. Обсуждаются преимущества нового метода.

Литература

1. Нairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric Numerical Integration // Springer, Berlin. – 2006.
2. Oewel W., Sofrouniou M. Symplectic Runge-Kutta schemes II: classification of symmetric methods // Preprint, University of Paderborn. – 1997.
3. Еленин Г.Г., Шляхов П.И. Геометрическая структура пространства параметров трехстадийных симплектических методов Рунге-Кутты // Математическое моделирование. – 2011. Т. 23. №5. С. 16–34.

# УРАВНЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ПРИ УМЕРЕННЫХ ЧИСЛАХ КНУДСЕНА

Богомолов С.В.1, Гудич И.Г.2, Есикова Н.Б.3

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов,  
e-mail: [bogomo@cs.msu.su](mailto:bogomo@cs.msu.su)

2) ИПМ имени М.В.Келдыша, e-mail: [igudich@gmail.com](mailto:igudich@gmail.com)

3) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов,   
e-mail: [esikova.nata@yandex.ru](mailto:esikova.nata@yandex.ru)

Для повышения точности суперкомпьютерных газодинамических расчетов необходимо использовать многомасштабные методы, опирающиеся на микро - макро модели, справедливые в различных подобластях, в которых решается рассматриваемая задача. Иерархия моделей газа, переходных по числу Кнудсена, основана на представлении траекторий молекул как случайных процессов. Число Кнудсена - параметр обезразмеривания, зависящий от пространственной подобласти. Его физический смысл - отношение локальной средней длины свободного пробега к характерному размеру задачи.

Из системы стохастических дифференциальных уравнений, описывающих газ при малых числах Кнудсена, можно получить макро-уравнения газовой динамики. В отличие от традиционных уравнений Навье-Стокса в них появляются дополнительные малые члены.

Коэффициенты макроскопических уравнений определяются из микроскопической модели газа.

Присутствие малого диффузионного члена в правой части уравнения неразрывности является математическим следствием исходной вероятностной модели и использования стандартных методов стохастического анализа, в частности, формулы Ито. С точки зрения физики, этот член отражает тепловое движение молекул - фундаментальное свойство, присущее газовой среде. Если в газе провести виртуальную границу между соседними областями, обладающими различными термодинамическими свойствами, и мысленно "раскрасить" в разные цвета молекулы, в них находящиеся, то процесс самодиффузии станет совершенно очевидным.

Макроскопические уравнения стохастической газовой динамики, на наш взгляд, точнее учитывают тепловое движение молекул, регуляризуя более жёсткую систему уравнений Навье – Стокса.

Литература

1. Богомолов С.В., Дородницын Л.В. Уравнения стохастической квазигазодинамики. Случай вязкого газа// Математическое моделирование, 2010, т. 22, No. 12, с.49–64.
2. Богомолов С.В., Гудич И.Г. К верификации стохастической диффузионной модели газа// Математическое моделирование, 2013, т.25, No. 11, с.17–35.

# уточнение метода частиц схемой weno

Богомолов С.В.1, Кувшинников А.Е.2

1) ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, кафедра вычислительных методов,   
e-mail: [bogomo@cs.msu.su](mailto:bogomo@cs.msu.su)

2) ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, кафедра вычислительных методов,   
e-mail: [kuvsh90@yandex.ru](mailto:kuvsh90@yandex.ru)

Задачи газовой динамики — крайне важная часть современного математического моделирования. В данном докладе рассматривается численное решение одномерной системы уравнений, которую можно записать в виде



, 

В задачах, связанных с подобными нелинейными уравнениями, возникают разрывные решения, поэтому необходимы схемы высокого порядка точности, такие как WENO [1].

Мы же использовали несглаживающую энтропийно – согласованную модификацию метода частиц, в основе которого лежит приближение исходной функции  конечной суммой -функций Дирака [2]:



Преимуществом нашего метода частиц является то, что он не требует гладкости решений и является экономичным для многомерных задач (т.к. число уравнений, описывающих поведение частиц, пропорционально числу измерений). Для более точного вычисления потоков между частицами использовалась схема WENO пятого порядка на неравномерной сетке [3]. Для вычисления производной по времени применялся TVD метод Рунге-Кутты третьего порядка [4].

Метод является явным, имеет третий порядок по времени и пятый по пространству для гладких решений. Для задачи о распаде произвольного разрыва было выявлено, что благодаря уменьшению размера частиц на разрывах увеличивается точность решения. Данный метод может быть использован и для решения других систем уравнений гиперболического типа.

Литература

1. Chi-Wang Shu. High order weighted essentially non-oscillatory schemes for convection dominated problems // SIAM Rev. (2009), 51, №1, pp.82–126.
2. Богомолов С.В., Звенков Д.С. Явный метод частиц, несглаживающий газодинамические разрывы // Матем. Моделирование (2007) 19, №3, с.74–86.
3. Rong Wang, Hui Feng, Raimond J. Spiteri. Observations on the fifth-order WENO method with non-uniform meshes // Appl. Math. Comput. (2008) 196, №1, pp.433–447.
4. Chi-Wang Shu, Stanley Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes // J. Comput. Phys. (1988) 77, №2, pp.439–471.

# Сверхбыстрый метод с апостериорной оценкой точности для эллиптических уравнений

Белов А.А.1, Калиткин Н.Н.2

1)МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики,  
e-mail: [belov\_25.04.1991@mail.ru](mailto:email@1)

2) Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,  
e-mail: [kalitkin@imamod.ru](mailto:email@2)

**Решение эллиптических уравнений** разностными методами приводит к алгебраическим системам огромного порядка. Для них работоспособны только методы сопряженных направлений, которые сходятся медленно и допускают лишь мажорантные оценки сходимости по невязке. Нужны более быстрые, но достаточно общие методы и аккуратные оценки сходимости итераций.

Ограничимся задачей Дирихле для эллиптического оператора без смешанных производных , где  будем считать переменными. Сетки будем считать прямоугольными, но неравномерными. Это достаточно общая постановка. Она приводит к разностной задаче 

**Эволюционная факторизация.** Будем решать задачу счетом на установление, то есть будем искать стационарный предел параболического уравнения . Для экономичного решения последнего нужно применить тот или иной способ факторизации. Наиболее удобной оказывается *эволюционная факторизация*

 (1)

Эта схема имеет аппроксимацию . Она безусловно устойчива, условно асимптотически устойчива и единообразно записывается для любого числа измерений.

**Логарифмические наборы шагов** эвристическиобобщают строгий результат о постоянном оптимальном шаге для счета на установление. Набор шагов с производящей функцией  предлагается строить в виде

 (2)

Требуемое число итераций логарифмически зависит от отношения границ спектра. Сходимость, близкую к оптимальной, дает *линейно-тригонометрический набор*

  (3)

**Аналог метода Ричардсона.** В силу экспоненциальной сходимости можно применить метод, аналогичный методу Ричардсона для разностных сеток. Он сводится к специальной перестановке шагов логарифмического набора. Пусть  − последовательность сгущающихся вдвое сеток,  − решения на этих сетках. Имеют место апостериорные асимптотически точные оценки норм погрешности

  (4)

На основе алгоритма (1)−(4) написан пакет прикладных программ.

Литература

1. Калиткин Н.Н., Белов А.А. Аналог метода Ричардсона для логарифмически сходящегося счета на установление // – ДАН (2013) **452**, №3, с.261–265.

# ИССЛЕДОВАНИЕ работы системы электромагнитной диагностики токамака Т-15M

Зотов И.В.1, Белов А.Г.1, Сычугов Д.Ю.1

1. *МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК*, *e-mail:* [*iv-zotov@cs.msu.ru*](mailto:iv-zotov@cs.msu.ru)

В настоящее время Токамак Т-15 находится в стадии модернизации. Одной из задач исследований на Т-15М является получение разрядов с вытянутым поперечным сечением плазмы, окруженным сепаратрисой. Присутствие на сепаратрисе х-точки, где магнитное поле обращается в ноль, позволяет использовать данную конфигурацию для создания дивертора – устройства для вывода из плазмы примесей и продуктов реакции. Для оптимизации дивертора и контроля плазмы предполагается в каждый момент сценария разряда, т.е. в в online-режиме, проводить реконструкцию границы плазменного шнура. Достоверность такой реконструкции зависит от влияния различных факторов на сигналы электромагнитной диагностики.

Целью работы является исследование точности реконструкции границы плазмы и профиля тока в зависимости от погрешности измерений и прочих факторов. Рассматриваются две постановки обратной задачи: сначала определения границы плазмы и затем внутренних распределений, а также численные методы их решения. Исследуется точность восстановления границы плазмы и x-точки сепаратрисы в зависимости от погрешности измерений и количества датчиков.

Обе задачи реконструкции границы плазмы и профиля тока формулируются как обратные задачи МГД равновесия тороидальной плазмы и описываются двумерным нелинейным эллиптическим уравнением Грэда-Шафранова в ограниченной области с дополнительным условием Коши на его границе. Используемые в работе методы основаны на интегральных уравнениях.

МГД равновесные конфигурации моделировались с помощью кода TOKAMEQ [1-2] с реальной геометрией внешних полей. Параметры плазмы соответствовали опорным точкам базового омического сценария. Рассчитанный поток полоидального поля использовался для задания сигналов на магнитных датчиках.

Разработанный авторами код RPB [3] численного контроля границы плазмы и сепаратрисы позволил оценить эффективность работы дивертора и определить необходимую точность измерений магнитных полей, достаточную для контроля попадания потоков частиц из плазмы на диверторный стол. Кроме того, проведена оценка точности измерений для определения плотности тороидального электрического тока внутри плазмы в случае выпуклого и немонотонного профиля тока, возникающих при омическом разряде и при дополнительном нагреве.

Работа поддержана грантами РФФИ №№ 14-07-00483а и 14-07-912а.

Литература

1. Belov A.G., Zotov I.V., Sychugov D.Yu. Numerical method for reconstruction the toroidal plasma boundary // International Conference on Applied Mathematics and Sustainable Development (SCET2012), Xi’an, China, 2012, pp.278-280.
2. Zotov I.V., Belov A.G., Sychugov D.Yu., Lukash V.E., Khayrutdinov R.R. Simulation of electromagnetic diagnostics system of the tokamak T-15M. // 41 EPS/ICPP conference on Plasma Physics, Berlin, Germany, 2014. P4.045.
3. Зотов И.В., Белов А.Г. Вычислительный код RPB для расчета границы плазмы по магнитным измерениям (модуль библиотеки «Виртуальный Токамак») // Вопросы Атомной Науки и Техники. Серия Термоядерный Синтез, 2014, вып. 1, с.97-101.

Секция: «Математическая физика и обратные задачи»

Председатель профессор Денисов А.М.

# Исследование моделей речевой акустики методом интегральных уравнений

Любимов Н.A.1, Захаров Е.В.2

1. МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Математической физики. e-mail: [lubimov.nicolas@gmail.com](mailto:lubimov.nicolas@gmail.com)
2. МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Математической физики. e-mail: [zspec@cs.msu.su](mailto:zspec@cs.msu.su)

Рассмотрена математическая модель речеобразования, описывающая распространение акустических колебаний в речевом тракте с подвижными стенками. Поставлена внутренняя задача для уравнения Гельмгольца, с граничными условиями 3-го рода (импедансного типа):

 (1)

Граница  разбивается на три подобласти: - голосовая щель (наличие источника возбуждения ), - подвижные стенки речевого тракта, - ротовое отверстие. Подвижность стенки описывается уравнением  Отражение волн на границе  (ротовое отверстие) задается низкочастотной аппроксимацией излучения открытой трубы с бесконечным плоским фланцем. Рассматриваемые модели поверхности формируют в выражение для функции импеданса .

Задача (1) сведена к интегральному уравнению по границе : ,  - оператор простого и двойного слоя соответственно, с функцией Грина .

Поверхностное интегральное уравнение в осесимметричном случае сводится к уравнению по образующему контуру , заданному в циллиндрических координатах с осью симметрии . Для дискретизации уравнений используется метод Галеркина с линейными элементами. Сингулярности в подынтегральных выражениях оцениваются при помощи эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода.

В рамках вычислительного эксперимента демонстрируется существенное влияние подвижности стенок речевого тракта на спектральную огибающую решения. Построены решения для различных значений параметров модели: коэффициента сопротивления  и толщины стенок речевого тракта. Выявлено появление низкочастотного резонанса, что согласуется с экспериментальными данными. На оснований полученного спектра решения для форм речевого тракта, соответствующим гласным фонемам русского языка ''a'', ''у'',''и'' был получен фильтр, применяемый для синтеза речевого сигнала во временной области. Проведенный вычислительный эксперимент показал, что применение интегральных уравнений для решения акустической задачи речеобразования с подвижной границей является эффективным методом формирования передаточной функции речевого тракта человека.

Литература

1. Фант, Г., ''Акустическая теория речеобразования'', изд. ''Наука'', Москва, 1964
2. Сорокин, В.Н. ''Теория речеобразования'', изд. ''Радио и Связь'', Москва, 1985
3. Колтон, Д., Кресс, Р. ''Методы интегральных уравнений в теории рассеяния'', изд. ''Мир'', Москва 1987

# Об одной обратной задаче восстановления изображений в офтальмологии

Разгулин А.В.1, Старостин А.С.1, Ирошников Н.Г.2, Ларичев А.В.2

1)МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики,   
e-mail: [razgulin@cs.msu.su](mailto:razgulin@cs.msu.su)

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра медицинской физики,   
e-mail: [larichev@optics.ru](mailto:larichev@optics.ru)

Неинвазивная диагностика живых структур глаза человека (например, глазного дна) является одной из основных задач офтальмологии. Современные методики такой диагностики широко используют достижения адаптивной оптики [1] для получения изображений соответствующего отдела глаза. Несовершенство оптической системы человеческого глаза, как естественной, так и приобретенной в результате болезней или повреждений, не позволяет достичь высокого разрешения исходных изображений. Кроме того, специфика исследования отделов глаза накладывает существенные ограничения на интенсивность зондирующего излучения и приводит к использованию некогерентного освещения для получения изображений. В результате в качестве исходных данных исследователь имеет серию изображений невысокого разрешения с искажениями, вызванными как наличием статических аберраций в оптической системе глаза человека, так и фазовыми искажениями, вызванными динамическими аберрациями. В этой связи актуальна разработка устойчивого к искажениям метода восстановления изображения глазного дна, учитывающего описанную выше априорную информацию.

Прямая задача рассеяния некогерентного света в оптической системе глаза человека описывается с помощью двумерного интегрального уравнения типа свертки с передаточной функцией, которая отражает отмеченные выше особенности искажений. Обратная задача состоит в восстановлении исходного изображения глазного дна по набору зашумленных изображений интенсивности зарегистрированного светового сигнала. Специфика априорной информации, имеющая определенную аналогию с задачами восстановления астрономических изображений, позволяет применить для решения рассматриваемой обратной задачи биспектральный метод [2] в сочетании с методом регуляризации А.Н. Тихонова. Представлены результаты исследования эффективности применения регуляризованного биспектрального метода в условиях типичных аберраций оптической системы глаза человека. Отметим, что регуляризованный биспектральный метод использовался также в [3] для близкой оптической схемы, характерной для задач микроскопии.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-02-00677.

Литература

1. Адаптивная оптика и ее практическое применение в диагностике заболеваний глазного дна. Вопросы лазерной офтальмологии, под ред. проф. А.В. Большунова / А. Большунов, Н. Ирошников, Е. Каталевская, А. Ларичев. — Апрель Москва, 2013. — С. 66-82.
2. Bartelt H., Lohmann A.W., Wirnitzer B. Phase and amplitude recovery from bispectra // Applied Optics (1984) 23, p. 3121-3129.
3. Iroshnikov N., Larichev A., Potyagalova A., Razgulin A. Tikhonov-regularized bispectral variational method for optical signal reconstruction // Computational Mathematics and Modeling (2013) 24, № 4, p. 505-516.

# Borg-levinson theorem for elliptic operators

Serov V.S.

University of Oulu, Department of Mathematical Sciences, Finland,  
e-mail:[valeri.serov@oulu.fi](mailto:valeri.serov@oulu.fi)

The subject of this work concerns to the classical inverse spectral problem. Do the Dirichlet eigenvalues and some derivatives of the normalized eigenfunctions at the boundary determine uniquely the coefficients of the corresponding differential operator? For operators of order 2 this type of theorem is called Borg-Levinson theorem. In the case of the Schrodinger operators the knowledge of the Dirichlet eigenvalues and the normal derivatives of the normalized eigenfunctions at the boundary uniquely determine unknown potential (see Nachman, Sylvester and Uhlmann [1]). For the magnetic Schrodinger operator with singular coefficients Borg-Levinson theorem was proved for the first time by Serov [2] (see also [3]). For the operator of order 4 which is the first order perturbation of the bi-harmonic operator with Navier boundary conditions on a smooth bounded domain it was proved by Krupchyk, Lassas and Uhlmann [4] that the Dirichlet-to-Neumann map uniquely determines this first order perturbation. For Riemannian manifolds Borg-Levinson theorem was proved by Kachalov, Kurylev and Lassas (they call this problem as the Gelfand inverse problem for quadratic pencil) in series publications [5], [6]. For elliptic operators with constant coefficients and with potential see Ikehata [7] and Krupchyk and Paivarinta [8].

The main goal of present work is to show that the knowledge of the discrete Dirichlet spectrum and some special derivatives up to the third order of the normalized eigenfunctions at the boundary uniquely determine the coefficients of the operator of order 4 which is the second order perturbation of the bi-harmonic operator.

References

1. Nachman A., Sylvester J., Uhlmann G. An n-dimensional Borg-Levinson theorem // -- Comm. Math. Phys. (1988), 115, p. 595-605.
2. Serov V.S. Borg-Levinson theorem for magnetic Schrodinger operator // – Bull. Greek Math. Soc. (2010), 57, p. 321–332.
3. Krupchyk K., Uhlmann G. Uniqueness in an inverse boundary value problems for a magnetic Schrodinger operator with a bounded magnetic potential // – Comm. Math. Phys. (2014), 327, p. 995–1009.
4. Krupchyk K., Lassas M., Uhlmann G. Inverse boundary value problems for poly-harmonic operator // – Trans. Amer. Math. Soc. (2014), 366, p. 95-112.
5. Kachalov A., Kurylev Y., Lassas M. Inverse boundary spectral problems // -- Chapman Hall/CRC, 2001.
6. Kurylev Y., Lassas M. Gelfand inverse problem for a quadratic operator pencil // -- J. Funct. Anal. (2000), 17, p. 247-263.
7. Ikehata M. A special Green’s function for the bi-harmonic operator and its application to the boundary value problem // -- Computers Math. Appl. (1991), 22, p. 53-66.
8. Krupchyk K., Paivarinta L. A Borg-Levinson theorem for higher order elliptic operators, Int. Math. Res. Not. IMRN (2012), 6, p. 1321-1351.

# прямые и обратные задачи из теории транспортных потоков

Подорога А.В.1, Тихонов И.В.2

1) ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва, e-mail: [anastasiapodoroga@gmail.com](mailto:email@1)

2) ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва, e-mail: [ivtikh@mail.ru](mailto:ivtikh@mail.ru)

В математической теории дорожного движения при описании транспортных потоков активно используют континуальные модели с характеристиками  (скорость потока) и  (плотность потока). Эти величины связаны уравнениями в частных производных, схожими с уравнениями гидродинамики (см. [1], [2]). Специфику дорожного движения выражает особое соотношение:

 (1)

с монотонно убывающей функцией . Если зависимость (1) известна, то ставятся типичные *прямые задачи*для уравнений в частных производных о нахождении значений ,  по выбранным начальным и краевым условиям. На практике зависимость (1) часто неизвестна и возникает *обратная задача* восстановления функции  по тем или иным дополнительным соображениям.

Нами предложен оригинальный способ восстановления закона (1) с помощью имитационного компьютерного моделирования. Была разработана программа “Cars”, имитирующая однополосное движение больших групп автомобилей в различных дорожных ситуациях. Поведение каждого конкретного автомобиля определяется поведением впереди идущего транспортного средства на основе уравнений кинематики и эмпирических соображений. Основным управляющим параметром является ускорение индивидуального автомобиля. Все характеристики транспортных средств подбираются близкими к реальным значениям. С помощью программы “Cars” проведен ряд компьютерных экспериментов. Особенно удобным для моделирования оказался случай кольцевой автодороги, где численные результаты получили хорошее согласование с теоретическими положениями [2]. Кроме того, выяснилось, что при определенной настройке параметров программы с большой точностью реализуется закон

 (2)

с некоторыми конкретными значениями , . Этот закон «обратной зависимости» известен в теории транспортных потоков наряду с другими законами: Гринберга и Гриншильдса. Тем самым, установлено, что закон (2) может быть естественно смоделирован компьютерными средствами. Теперь возникает интересная проблема – дать точное математическое описание для наблюдаемого перехода от дискретной компьютерной модели к континуальной модели механики сплошной среды.

Литература

1. Гасников А.В. и др. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие // Под ред. А.В. Гасникова. Издание 2-е, испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2013. – 427 с.
2. Смирнов Н.Н., Киселев А.Б., Никитин В.Ф., Юмашев М.В. Математическое моделирование автотранспортных потоков. – М.: Мех-мат МГУ, 1999. – 31 с.

# Проекционный метод восстановления сигналов по фазовой информации

Павельева Е.А.

МГУ имени М.В. Ломоносова, Факультет ВМиК, Кафедра Математической Физики,   
e-mail: [pavelyeva@cs.msu.ru](mailto:pavelyeva@cs.msu.ru)

В работе предложен алгоритм восстановления сигналов по фазе на основе проекционного метода с использованием функций Эрмита. В проекционном методе используется аппроксимация  разложения функции  в ряд Фурье по функциям Эрмита . Учитывая, что функции Эрмита являются собственными функциями преобразования Фурье, выражение  можно назвать аппроксимацией преобразования Фурье функции  с использованием функций Эрмита (АПФЭ). Выражение  назовем аппроксимацией обратного преобразования Фурье функции  с использованием функций Эрмита (АОПФЭ).

Алгоритм восстановления аппроксимации  по фазе АПФЭ  [1] представляет собой двухшаговый метод проектирования [2] на выпуклые множества  и , в котором на первом шаге каждой итерации используется информация о сигнале из пространственной области, а на втором шаге – из частотной. При этом изображение переводится из пространственной области в частотную при помощи АПФЭ, а из частотной в пространственную – при помощи АОПФЭ. На рисунке приведен пример работы алгоритма после *K=*10, 100 и 1000 итераций, а также значения метрик PSNR и MS-SSIM между изображением после *K*-й итерации и аппроксимацией . Данные результаты показывают, что фаза АПФЭ содержит в себе больше информации, чем амплитуда. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 13-07-00438.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Литература

1. Павельева Е. А., Крылов А. С. Аппроксимация фазы проекционным методом Эрмита при восстановлении изображения по фазе, Труды 24-й межд. конф. по комп. графике и зрению GraphiCon'2014, Ростов-на-Дону, Россия, 2014, с. 131-134.
2. Гурин Л. Г., Поляк Б. Т., Райк Э. В. Методы проекций для отыскания общей точки выпуклых множеств, Журн. вычисл. мат. и мат. физ., т. 7, № 6, 1967, с. 1211–1228.

# Численное решение трехмерной задачи электроимпедансной томографии с неполными данными.

Гаврилов С.В.1

1)МГУ им. М.В.Ломоносова, ВМК, кафедра математической физики,   
e-mail: [gvrlserg@gmail.com](mailto:gvrlserg@gmail.com)

Рассматривается задача электроимпедансной томографии в ограниченной трехмерной области с кусочно-постоянным коэффициентом проводимости. Особенностью используемой математической постановки задачи является задание исходной информации на части внешней границы.

Рассмотрим на плоскости односвязную ограниченную область  с границей . Пусть **** односвязная область с границей  такая, что . Поверхности  и  достаточно гладкие. Через  обозначим область .

Пусть функции  таковы, что:  , где , 

 (1)

 (2)

 (3)

 (4)

Здесь , - заданные положительные постоянные, а  –функции, непрерывные и не постоянные на .

Задача электроимпедансной томографии представляет собой обратную задачу к краевым задачам (1)-(4). Пусть поверхность  и постоянные  заданы, а поверхность  неизвестна. Требуется определить поверхность , если для  задана следующая информация о решениях  задач (1)-(4):



Здесь и известные функции, непрерывные на , а  - нормаль к , где - часть поверхности .

Предлагается численный метод решения сформулированной задачи, основанный на выводе нелинейного операторного уравнения для функции, задающей неизвестную поверхность , и построении регуляризованного итерационного метода решения операторного уравнения.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-00244).

Литература

1. Итерационный метод решения трехмерной задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости и нескольких измерений на границе // Вычисл. методы и программ. 2013. т.14. с.26-30.

# Обратная задача восстановления распределения эритроцитов по неточным данным лазерной дифрактометрии

Устинов В.Д.1,2

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Математической физики,   
e-mail: [vladustinov90@gmail.com](mailto:vladustinov90@gmail.com)

2) Международный лазерный центр МГУ им. М.В. Ломоносова,   
e-mail: [vladustinov90@gmail.com](mailto:vladustinov90@gmail.com)

Лазерная дифрактометрия эритроцитов (эктацитометрия) - это эффективная методика определения деформируемости красных клеток крови – эритроцитов in vitro (вне организма). В лазерной эктацитометрии сильно разбавленная суспензия эритроцитов помещается в специальный сдвиговый поток, вытягивающий клетки и ориентирующий их в одинаковом направлении. При этом в дальней зоне прямой дифракции возникает дифракционная картина – мало-угловое распределение интенсивности рассеянного света. При известной сдвиговой скорости потока, по дифракционной картине определяют среднюю меру удлинения клеток. В то же время актуальной является задача определения не только среднего значения, измеряемого в современных эктацитометрах, но и всего распределения клеток по удлинению в потоке.

Хорошо известна обратная задача определения распределения частиц по размерам по данным лазерной дифрактометрии. В частности, в работе [1] рассматривается определение первых двух статистических моментов функции распределения эритроцитов по размерам в эктацитометре. В недавних статьях [2,3] был описан более сложный вопрос о вычислении функции распределения эритроцитов по удлинению.

Главная цель данной работы - улучшить работу регуляризатора интегрального уравнения для определения распределения эритроцитов по удлинению из статьи [3] в случае, когда первые три момента искомого распределения известны с некоторой погрешностью. Эти три величины вычисляются по аналитическим формулам, приведённым в [2,3]. Мы находим решение соответствующего интегрального уравнения, введённого в [2,3], минимизируя функционал Тихонова по методу обобщённой невязки. В численном эксперименте мы показываем, что учёт дополнительной информации о неточно заданных первых трёх моментах искомого распределения существенно улучшает результаты восстановления распределения эритроцитов по деформируемости.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-02-01372.

Литература

1. Никитин С.Ю., Луговцов А.Е., Приезжев А.В., Устинов В.Д. Связь видности дифракционной картины с дисперсией размеров частиц в эктацитометре // - Квантовая электроника (2011) 41, №9, с. 843-846.
2. Никитин С.Ю., Приезжев А.В., Луговцов А.Е., Устинов В.Д. Измерение асимметрии распределения эритроцитов по деформируемости методом лазерной эктацитометрии // - Квантовая электроника, (2014) 44, №8, с. 774–778.
3. Nikitin S.Yu., Priezzhev A.V., Lugovtsov A.E., Ustinov V.D., Razgulin A.V. Laser ektacytometry and evaluation of statistical characteristics of inhomogeneous ensembles of red blood cells // - Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, (2014) 146, pp. 365-375.

Секция: «Математическая кибернетика и исследование операций»

подсекция кафедры исследования операций

Председатель профессор Васин А.А.

# Об одной модификации модели биржевых торгов с инсайдером

Пьяных А.И.

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, e-mail: [artem.pyanykh@gmail.com](mailto:artem.pyanykh@gmail.com)

Исследуется модификация дискретной многошаговой модели биржевых торгов, рассмотренной в [2]. Торги происходят между двумя игроками за однотипные акции. Случайная цена акции может принимать два значения:  с вероятностью  и  с вероятностью , и определяется в начале торгов. Настоящая цена акции известна Игроку 1. Игрок 2 знает вероятностью высокой цены акции и то, что Игрок 1 — инсайдер. На каждом шаге торгов игроки делают целочисленные ставки. Игрок, предложивший большую ставку, покупает у другого акцию.

В работах [2-4] сделка осуществляется по наибольшей цене. В работе [2] получено решение игры бесконечной продолжительности, в работе [4] получено решение одношаговой игры, а в работе [3] — игры конечной продолжительности при .

В данной работе цена сделки определяется как полусумма предложенных ставок. Модель сводится к повторяющейся игре с асимметричной информацией (см. [1]). Получено решение игры бесконечной продолжительности при произвольных значениях  и  — найдены оптимальные стратегии игроков и значение игры

.

Литература

1. Aumann R.J., Maschler M.B. Repeated Games with Incomplete Information. The MIT Press, Cambridge, London.
2. Domansky V. Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets // International Journal of Game Theory. 2007. V. 36(2). P. 241-257.
3. Крепс В.Л. Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. Вып. 4. С. 109‑120.
4. Сандомирская М.С., Доманский В.К. Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией. 2012. Т. 4. Вып. 1. С. 32-54.

# ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОТРЕБЛЕНИЯ НА ДИСКРЕТНОМ РЫНКЕ.

Соловьев А.И.1

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра исследования операций  
email: [alex.solo.88@mail.ru](mailto:alex.solo.88@mail.ru)

В данном исследовании развивается риск-нейтральный подход решения задачи оптимального потребления с возможностью инвестирования, введенный в монографии [1]. Используются особенности риск-нейтральных вероятностных мер, описанные в работе [2].

Рассматривается многопериодная модель безарбитражного финансового рынка с конечным числом состояний. Поведение рынка описывается деревом сценариев без самопересечений. Основная задача относится к классу задач выпуклого программирования и заключается в максимизации ожидаемой полезности потребления части накопленного капитала в течение конечного периода времени. Инвестор также имеет возможность вложения средств в ценные бумаги, распределение стоимостей которых считается известным. Ограничения задачи учитывают невозможность банкроства инвестора.

Предлагаются декомпозиционные схемы решения задач со степенной и логарифмической функциями полезности, которые позволяют свести решение основной задачи к решению нескольких однопериодных задач. Оптимальное решение задачи устанавливается в два этапа: сначала определяется оптимальный процесс потребления с помощью разработанных динамических методов, затем решением систем линейных уравнений определяется оптимальный портфельный процесс. Разработанные алгоритмы позволили установить аналитический вид решения задачи для модели неполного триномиального рынка. Также приведена модификация методов декомпозиции для решения дискретного аналога задачи с постоянной нормой потребления.

Литература

1. Pliska S.R. Introduction to mathematical finance: discrete time models // Malden, Massachusetts: Blackwell Publishers – 1997.
2. Morozov V.V., Soloviev A.I. On optimal partial hedging in discrete markets // Optimization. – 2013. – V. 62, № 11, P. 1403–1418.

# дисбаланс потока биржевых заявок: влияние на цену, ликвидность и волатильность рынка.

Нимак В.С.

МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра исследования операций,   
e-mail: [vladimir.nimak@gmail.com](mailto:vladimir.nimak@gmail.com)

В работе [1] проводится эмпирическое исследование мгновенного воздействия событий книги заявок – рыночных ордеров, лимитных ордеров и ордеров на отмену заявок – на цены акций. Показано, что их мгновенное воздействие на цены может быть смоделировано упрощенно с помощью одной переменной дисбаланса потока ордеров (). Эта переменная представляет собой узловой поток ордеров по лучшим заявкам на покупку и продажу.

Рассмотрим упрощенную книгу ордеров, в которой число акций (глубина) для каждого значения цены, отличной от лучшей для бида и аска, соответственно, равно . Рассмотрим временной интервал  и обозначим ,, соответственно, общий размер прибывших ордеров на покупку и ордеров на отмену для текущего лучшего бида за данный временной промежуток. Также обозначим  общий размер рыночных ордеров на покупку, прибывших на текущий лучший аск,  – цена бида в момент времени . Для ордеров на продажу введем аналогичные обозначения ,,,.

 (1)

Пусть , тогда ,.

Будем рассматривать среднюю цену , нормированную шагом . Тогда

 (2)

где – ошибка округления. Реальная книга заявок имеет довольно сложную динамику. На основе упрощенной книги заявок можно предположить существование локального на интервале  шума в связи с изменением цены:

 (3)

Здесь  – коэффициент воздействия на цену на -м интервале времени, а  – шум, суммирующий влияние сторонних факторов (например, более глубоких уровней книги заявок). Агрегированная переменная  имеет линейную зависимость со средне-ценовыми изменениями за короткий период для большой выборки акций со средним  (на примере акций Schlumberger). Более глубокие лимитные ордера книги заявок не вносят существенный вклад в изменение цен. Рассматриваемая модель, основанная на , линейно связывает цены, сделки, лимитные ордера и ордера на отмену, при этом требует оценки лишь одного коэффициента воздействия на цену, и является устойчивой по времени и по акциям.

Литература

1. A. Kukanov, Stochastic Models of Limit Order Markets // Columbia University, 2013

# ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ ФЬЮЧЕРСНЫХ КОНТРАКТОВ НА ИНДЕКСЫ ММВБ И РТС

Петровых А.С.1, Голембиовский Д.Ю.2

1) МГУ им. М. В. Ломоносова, ВМК, ИО, e-mail: [alexpetrovykh@mail.ru](mailto:alexpetrovykh@mail.ru)

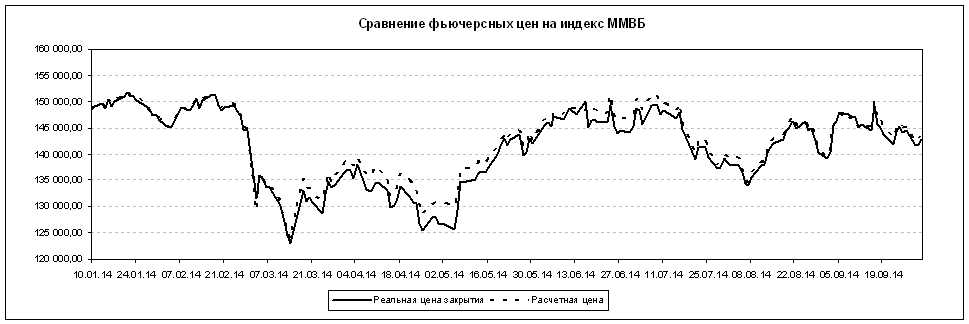
2) МГУ им. М. В. Ломоносова, ВМК, ИО, e-mail: [golemb@cs.msu.su](mailto:golemb@cs.msu.su)

Индексный фьючерс – это контракт, базовым активом которого является какой-либо фондовый индекс. Контракты данного типа весьма популярны, так как предоставляют обширные возможности для эффективного управления инвестиционным портфелем. Из российских индексных фьючерсов наиболее ликвидными являются фьючерсы на индексы ММВБ и РТС, в состав которых входят 50 наиболее ликвидных акций крупнейших и динамично развивающихся российских эмитентов. Отличие индексов ММВБ и РТС заключается в валюте котировок. Индекс ММВБ рассчитывается в рублях, а индекс РТС – в долларах США. Последний является примером кванто, финансового инструмента, выплаты по которому зависят от переменной, номинированной в одной валюте, а выплачиваются в другой валюте.

В базовой теории ценообразования индексных фьючерсов, основанной на идеальной модели рынка в условиях отсутствия арбитражных возможностей, для оценки фьючерсной цены фондового индекса  используется модель “Cost of Carry”:

, (1)

где  – текущее значение индекса,  – время, оставшееся до погашения контракта  – количество различных дат выплат дивидендов в рамках контракта,  – время до выплаты -го дивиденда,  – размеры соответствующих дивидендов в пунктах индекса,  – безрисковые процентные ставки, соответствующие срочностям . Расчеты по приведенной формуле для фьючерсов на индексы РТС и ММВБ показали, что расхождение теоретических и реальных стоимостей данных контрактов существенно, что связано с несовершенством реального рынка российских фьючерсных контрактов.



В докладе рассматриваются модификации известных моделей для получения более точных оценок справедливых фьючерсных цен индексов ММВБ и РТС, а также приводятся результаты расчета цен фьючерсных контрактов.

Литература

1. Hull J. C. Options, Futures and Other Derivative Securities, 8 ed. // – Englewood Cliffts, NJ, Prentice Hall. – 2011.

# Геопозиционные аукционы: теоретико-игровой анализ модели с вогнутой функцией полезности рекламодателя

Блинов Н.Г.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Исследования Операций,  
e-mail: [nikita.blinov@gmail.com](mailto:nikita.blinov@gmail.com)

Геопозиционные аукционы являются логическим развитием позиционных аукционов [1,2] – механизма распределения рекламных позиций в ответе поисковой системы на заданный пользователем запрос. Особенность геопозиционных аукционов заключается в том, что рекламодателями являются организации, имеющие физический адрес. Таким образом, в параметры системы относительно изученных ранее позиционных аукционов добавляются такие сущности, как координаты рекламодателя и область запроса пользователя. Ставка игрока не специфицируется по областям запроса.

В рамках данного исследования рассмотрен случай, в котором полезность клика для рекламодателя k для области запроса j из множества всех областей запроса **J** sk,j существенным образом зависит от j. А именно, исследован аукцион в предположении, что полезность клика как функция sk(j) для каждого игрока k вогнута по j – то есть достигает минимумов в минимальной и максимальной областях запроса, а максимума на одном из средних уровней. Это предположение можно считать эмпирическим фактом – действительно, пик полезности достигается на уровне района: число организаций в такой области поиска достаточно велико, чтобы был смысл в выделении на фоне конкурентов за деньги, и при этом выбор достаточно сужен, чтобы пользователь уже мог принимать решение.

В рамках указанных допущений получены следующие результаты:

* Если ставка игрока k bk ≤ minj sk,j, то выигрыш игрока k неотрицателен;
* Если ставка игрока k bk ≤ max{b : для любого j из **J** b−sk,j ≤ εj}, то выигрыш игрока k неотрицателен, где через εj обозначена средняя разница между ставками игроков, находящихся в области поиска j и попавших в число показываемых на экране.

Таким образом, получены достаточные условия для неотрицательности выигрыша в рамках заданных ограничений. Смягчение указанных ограничений и дальнейшее движение к ответу на вопрос об оптимальности стратегии рекламодателя является основной задачей для дальнейшего исследования.

Литература

1. Edelman, Ostrovsky, Schwarz. Internet Advertising and the Generalized Second Price Auction // Harvard University, Stanford University, UC Berkeley, 2005.
2. Ostrovsky, Schwarz. Reserve Prices in Internet Advertising Auctions: A Field Experiment // Stanford University, 2009.
3. А.А.Васин, В.В.Морозов. Теория игр и модели математической экономики // Макс пресс, Москва, 2005.

# УРАВНЕНИЕ ЛИНДЛИ ДЛЯ СМО С ПУАССОНОВСКИМ СПЕКТРОМ

Гуров С.И.

МГУ им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМК, каф. Математических методов прогнозирования [sgurl@cs.msu.ru](mailto:sgurl@cs.msu.ru)

Рассматривается система массового обслуживания (СМО) типа *bG | G | 1*, у которой входной поток имеет пуассоновский спектр



где *a(x) –* спектральная функция с условием нормировки



(т.е. на вход СМО поступает смесь пуассоновских потоков).

Для такой СМО интегральное уравнение Линдли, связывающее выходной поток *g(t)* с входным потоком *A(t)* и потоком обслуживания *b(t)* имеет вид:



где *g\*(s)* и *b\*(s)* ‑ преобразования Лапласа для *g(t)*  и *b(t)*.

В докладе дано численно-аналитическое решение данного уравнения для случая представления



что не является жёстким ограничением.

Рассмотрены некоторые частные случаи зависимости *b(t)* и в случае существования известных решений, показано их совпадение с полученными в рамках предлагаемого подхода.

Литература

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. ‑ М.: Наука, 1979.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ БАЛАНСА ДОХОДОВ И РАСХОДОВ РОССИЙСКОГО НАСЕЛЕНИЯ

Вржещ В.П.1, Санникова И.В.2

1) ВЦ РАН, e-mail: valentin.[valentin.vrzheshch@gmail.com](mailto:valentin.vrzheshch@gmail.com)

2) Московский физико-технический институт (государственный университет)

В работе представлена межвременная модель макроэкономического агента Домохозяйство, который решает задачу максимизации дисконтированной полезности по управляющим переменным остатков наличных денег и валюты, банковских депозитов и кредитов, покупок импортных и внутренних товаров как длительного пользования, так и текущего потребления. Основным достоинством модели является возможность моделировать одновременно кредиты и депозиты, что достигается за счет предположения о покупках товаров длительного пользования за счет нетто-кредитов. Такой подход основывается на особенностях статистики баланса доходов и расходов российских домохозяйств, которые позволяют выдвигать очень сильные предположения о поведении домохозяйств как отдельного рационального макроэкономического агента.

Для моделирования как положительных нетто-кредитов, так и положительных нетто-депозитов были введены запасы импортных и внутренних товаров, выбытие которых входит в функцию полезности макроагента наравне с текущими покупками импортных и внутренних благ. Отдельно введены валютные остатки, прирост которых с 1999 г., по данным Центрального банка, составил порядка 180 млрд. долл. США.

Несмотря на относительно простую постановку задачи, введение запасов и их использование в функции полезности приводит к довольно непростой численной задаче, которую удается идентифицировать по 10 настроечным параметрам, часть из которых являются параметрами ограничений ликвидности или нормирующими константами.

Традиционные подходы моделируют домохозяйства набором агентов различных видов (одни владеют депозитами, другие привлекают кредиты) либо в постоянных пропорциях, либо динамическим распределением. Однако российская статистика позволяет сделать сильные предположения, которые дают перейти к моделированию одного макроагента Домохозяйство, одновременно владеющего депозитами и привлекающего кредиты.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00432).

# ОПТИМИЗАЦИЯ МЕХАНИЗМА МАРКЕТИНГОВОГО ВЛИЯНИЯ НА ПРОДАЖИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКИХ ТОВАРОВ

Латий В.В.1

1. МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Исследования операций,   
   e-mail: [laity\_v@mail.ru](mailto:laity_v@mail.ru)

Трудно представить себе общество, в котором нет специализированных мест, где люди могли бы приобрести необходимые им товары. Обычно основным интересом большинства организаций, специализирующихся на продажах, является получение как можно большей прибыли, т.е. ими решается задача вида



Для достижения этого организации могут использовать различные механизмы, одним из которых является воздействие на спрос для магазинов своей сети. Такое воздействие может происходить в основном за счет влияния на привлекательность сети в глазах покупателей, а также за счет мероприятий, направленных на продвижение некоторого товара или группы товаров.

Проведение подобных мероприятий требует достаточно больших затрат, особенно, если они проводятся на регулярной основе. Эти затраты могут быть по величине сравнимы с доходами от продаж, а значит, не всякое увеличение спроса будет выгодно фирме-продавцу с точки зрения максимизации прибыли. Таким образом, возникает вопрос, как фирме необходимо организовать мероприятия по увеличению спроса, чтобы прибыль от продаж была наибольшей.

Основными целями данной работы являются

построение модели продаж фирм на рынке одного товара, при условии, что они имеют возможность влиять на его спрос

нахождение оптимальных затрат на это влияние для получения наибольшей прибыли

исследование условий, при которых, с учетом оптимальных действий фирм, рынок товара растет.

Для решения поставленных задач к построенным моделям применяются методы теории игр [1], динамического программирования [2], теории обобщенного равновесия Нэша [3-4], а также численные методы оптимизации [5].

Литература

1. Васин А.А., Морозов В.В., Теория игр и модели математической экономики (учебное пособие). - М.: МАКС Пресс, 2005 г.
2. Bellman R.E., Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, NJ. Republished 2003.
3. Heusinger A., Kanzow C., Optimization reformulations of the generalized Nash equilibrium problem using Nikaido–Isoda-type functions. Technical Report, Institute of Mathematics, University of Wurzburg, Wurzburg, 2006.
4. Cavazzuti E., Pappalardo M., Passacantando M., Nash equilibria, variational inequalities, and dynamical systems. J Optim Theory Appl 114:491–506, 2002.
5. Barzilai J., Borwein J. M., Two point step size gradient method. IMA Journal on Numerical Analysis 8, 1988, pp. 141–148.

Секция: «Вычислительные технологии и моделирование»

Председатель чл.- корр. Тыртышников Е.Е.

# Тензорные методы идентификации параметров в задаче моделирования ВИЧ-инфекции

Азиатцева В.В.1, Желтков Д.А.2

1) МГУ им. М. В. Ломоносова, ВМиК, ВТМ, e-mail: [valeryaaziattseva@yandex.ru](mailto:valeryaaziattseva@yandex.ru)

2) МГУ им. М. В. Ломоносова, ВМиК, ВТМ, e-mail: [dmitry.zheltkov@gmail.com](mailto:dmitry.zheltkov@gmail.com)

Задача настройки параметров модели на экспериментальные данные является весьма важной и нетривиальной. Значительная часть параметров, особенно в биологических системах, не может быть непосредственно определена экспериментально. Одним из подходов к определению параметров модели является формирование функционала погрешности модели при данных значениях параметров и последующая его глобальная оптимизация.

В данной работе рассматривается метод глобальной оптимизации на основе разложения тензорный поезд (tensor train, TT) [1, 2] в применении к идентификации параметров в задаче моделирования ВИЧ-инфекции. Этот метод был изначально предложен для решения задачи докинга [3, 4]. Он активно использует структуру оптимизируемого функционала, что позволяет ему находить глобальный минимум, производя значительно меньше вычислений его значений, чем требуется генетическим алгоритмам.

Была построена математическая модель ВИЧ инфекции на основе модели инфекционного заболевания Марчука - Петрова [5]. Для того, чтобы учесть специфику данного заболевания, были использованы некоторые дополнительные предположения. Таким образом, полученная модель состоит из девятнадцати ОДУ и содержит 50 параметров. Для настройки модели использовались данные, опубликованные в литературе[6].

Результаты тестирования показывают, что полученный тензорный метод идентификации параметров работает значительно качественнее и быстрее метода, основанного на встроенных в MATLAB генетических алгоритмах: находится точка с существенно меньшим значением функционала погрешности модели за меньшее в 100 раз количество вычислений значений этого функционала. Отметим, что текущая модель, несмотря на упрощения, довольно качественно приближает тестовые данные.

Литература

1. I. V. Oseledets and E. E. Tyrtyshnikov, "Breaking the curse of dimensionality, or how to use SVD in many dimensions", *SIAM J. Sci. Comput.,* vol. 31, no. 5, p. 3744–3759, 2009.
2. I. V. Oseledets, "Tensor-train decomposition", *SIAM J. Sci. Comput.,* vol. 33, no. 5, pp. 2295-2317, 2011.
3. Д. А. Желтков, И. В. Офёркин, Е. В. Каткова, А. В. Сулимов, Е. Е. Туртышников и В. Б. Сулимов, «TTDock: метод докинга на основе тензорных поездов», *Вычислительные методы и программирование,* т. 14, pp. 279-291, 2013.
4. Д. А. Желтков и Е. Е. Тыртышников, «Увеличение размерности в методе докинга на основе тензорных поездов,» *Вычислительные методы и программирование,* т. 14, pp. 292-294, 2013.
5. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии: вычислительные методы и эксперименты. М.:Издательство «Наука», 1991.
6. Kaufmann G.R., Cunningham P., Kelleher A.D., et al. Patterns of viral dynamics during primary human immunodeficiency virus type 1 infection. // The Sydney Primary HIV Infection Study Group. J Infect Dis, 1998, 178:1812–1815

# О свойствах операторных норм

Салуев Т.Г.1

1) МГУ им. М. В. Ломоносова, ВМК, ВТМ, e-mail: [tigran@saluev.com](mailto://tigran@saluev.com)

Операторные нормы — это семейство норм на пространствах матриц, рассматривающее матрицы как операторы в определённой паре нормированных пространств. Вычисление определённых операторных норм матриц находит свои приложения в задачах робастной минимизации [1], теории квантовой информации [2] и т. д. В свою очередь, можно поставить следующий вопрос: если задана в явном виде некоторая норма на матрицах, является ли она операторной, и если да, то в какой паре пространств? Так, подобный вопрос был задан и получил отрицательный ответ [3] относительно фробениусовой нормы матрицы в связи с вопросами теории автоматического управления.

В данной работе были исследованы общие свойства, присущие операторным нормам, а также их многомерному обобщению, т. н. инъективным нормам тензоров [4]. Вслед за работой [5] были исследованы субградиенты и субдифференциалы операторных норм; основные результаты были обобщены на многомерный случай. Был получен общий вид множества градиентов операторной нормы, позволивший сформулировать ряд признаков, позволяющих доказать, что та или иная норма на матрицах не является операторной. Также показано, как по множеству градиентов операторной нормы можно конструктивно восстановить векторные нормы на соответствующих линейных пространствах.

Литература

1. Steinberg D. Computation of matrix norms with applications to robust optimization // Diss. Technion — Israel Institute of Technology. — 2005
2. Barak B. et al. Hypercontractivity, sum-of-squares proofs, and their applications // Proceedings of the forty-fourth annual ACM symposium on Theory of computing. – ACM, 2012. – C. 307-326.
3. Chellaboina V., Haddad W. M. Is the Frobenius matrix norm induced? // IEEE transactions on automatic control. — 1995. — T. 40. — №. 12. — C. 2137-2139.
4. Hackbusch W. Tensor spaces and numerical tensor calculus. — Springer, 2012. — T. 42.
5. Watson G. A. Characterization of the subdifferential of some matrix norms // Linear Algebra and its Applications. — 1992. — T. 170. — C. 33-45.

# вЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ ЛИМФАТИЧЕСКОГО УЗЛА

Кислицын А.А.1, Савинков Р.С.2, Бочаров Г.А.3

1) МГУ им М.В. Ломоносова, факультет ВМК, e-mail: [alexey.kislitsyn@](mailto:email@1)gmail.com

2) МГУ им. М.В.Ломоносова, факультет ВМК,, e-mail:[dr.savinkov@gmail.com](mailto:dr.savinkov@gmail.com)

3) ИВМ РАН, Москва, Россия, e-mail: [bocharov@inm.ras.ru](mailto:email@2)

Моделирование лимфатической системы является важной задачей вычислительной иммунологии. Базовым объектом лимфатической системы является лимфоузел (ЛУ), поэтому построение математической модели, учитывающей его структурно-функциональную организацию, является одной из приоритетных подзадач. В работе представлены основные принципы, по которым строится 3-х мерная твердотельная модель ЛУ на основе данных по визуализации его структур: субкапсулярного синуса (~1 мм), В-клеточных фолликулов (ВКФ) (~0.2 мм) и сети фибробластно-ретикуллярных клеток (ФРК) (~0.01 мм), полученных из Института иммунобиологии (Швейцария). Внешняя и внутренняя оболочки лимфоузла аппроксимируются двумя сферами, одна из которых вложена в другую. Для воспроизведения неоднородности поверхностей в геометрию сфер вносятся искажения путем зашумления аппроксимирующей функции. Внутреннее пространство ЛУ содержит BКФ и сеть ФРК. Линзообразная поверхность фолликулов аппроксимируется сплайнами. Сеть ФРК, занимая порядка 5-10% от объема ЛУ, выполняет роль механического каркаса для его внутреннего пространства. Эта структура, интегрированная с кондуитами, осуществляет функции дренажной системы в лимфоузле, а также транспортной сети для лимфоцитов, определяя развитие иммунных реакций в ЛУ. Данная сеть аппроксимируется поверхностью древовидной формации. Алгоритм использует воксельное моделирование с зашумлением. Далее, осуществляется генерация замкнутой поверхностной сетки (от 6104 до 2106 полигонов) и её сглаживание. Все алгоритмы реализованы на языке С++.

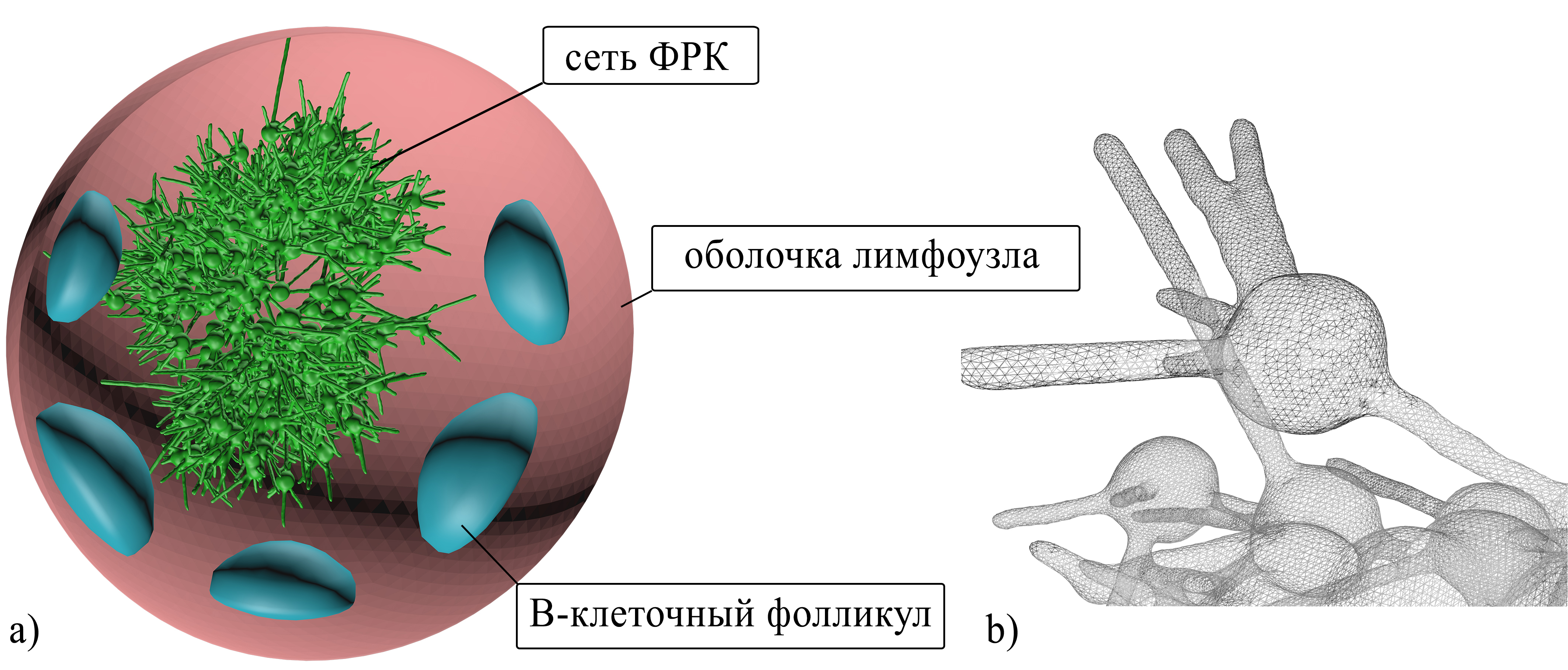


Рис. a) Общая схема лимфоузла в разрезе. b) Увеличенная сеточная модель сети ФРК.

Исследования поддерживаются грантами РФФИ, Программы Президиума РАН, РНФ.

Литература

1. Препарата Ф. Шеймос М. Вычислительная геометрия: введение // М.: Мир – 1989.

Секция: «Асимптотические методы и дифференциальные уравнения   
с малым параметром»

Председатель профессор Бутузов В.Ф.

# УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С КРАТНЫМ КОРНЕМ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ

Бутузов В.Ф.

МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики,  
[butuzov@phys.msu.ru](mailto:butuzov@phys.msu.ru)

Рассматривается краевая задача

где – малый параметр, а функция имеет вид

откуда следует, что вырожденное уравнение имеет двукратный корень . При условиях

построена и обоснована асимптотика по параметру погранслойного решения задачи (1), (2). Особенности асимптотики состоят в том, что разложение решения является рядом не по целым степеням , как в случае простого корня вырожденного уравнения (см. [1]), а по дробным степеням, пограничный слой в окрестности каждой граничной точки имеет три зоны с различными масштабами погранслойных переменных в разных зонах, и уравнения для пограничных функций формируются не стандартным способом, а так, как описано в работе [2].

Решение задачи (1), (2) является стационарным решением параболического уравнения

с краевыми условиями вида (2). Доказано, что для достаточно малых является асимптотически устойчивым решением при , и найдена область притяжения этого решения, т.е. множество таких функций , для которых решение уравнения (3) с краевыми условиями вида (2) и начальным условием существует при и удовлетворяет предельному равенству

Литература

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений//М.: Высшая школа – 1990.
2. Бутузов В.Ф. Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущённых задачах с кратным корнем вырожденного уравнения//Матем. заметки (2013) **94**, вып. 1. с. 68-80.

# Сингулярно возмущенные задачи с запаздыванием

Ни Минкан1, Гусева И.С.2, Нефедов Н.Н.3

1)МГУ им.М.В.Ломоносов, физ.фа-т, каф.мат., e-mail: [mingkang@mail.ru](mailto:mingkang@mail.ru)

2) БГУ, Институт математики и информатики, e-mail: [ig\_19@mail.ru](mailto:ig_19@mail.ru)

3) МГУ им.М.В.Ломоносов, физ.фа-т, каф.мат., e-mail: [nefedov@phys.msu.ru](mailto:nefedov@phys.msu.ru)

В настоящей работе рассматривается краевая задача для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с опережающим и запаздывающим аргументами (при наивысшей производной содержится множитель μ ). Подобная задача исследована авторами, но для нахождения ее решения использовался метод согласования, при котором не даются оценки остаточного члена асимптотики, что является обязательным для строгой оценки с математической точки зрения. Цель данной работы – получить не только непрерывное, но и гладкое решение задачи, используя при его нахождении метод пограничных функций и метод сшивания. Доказывается существование решения с внутренним переходным слоем.

Литература

1. C.G. Lange, R.M. Miura. Singular Perturbation Analysis of Boudary-Value Problems for Differential-Differene equations // SIAM J. Appl. Math.(1982) 42, №3, с.501–531.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений // М.:Наука, 1973.
3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений// М.:Высшая школа, 1980.

# СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ С ПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ В МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧАХ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ

Давыдова М.А., Захарова C.А.

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра математики,   
e-mail:[m.davydova@bk.ru](mailto:m.davydova@bk.ru)

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра математики,   
e-mail:[sa.zakharova@physics.msu.ru](mailto:sa.zakharova@physics.msu.ru)

Рассматривается краевая задача для нелинейного эллиптического уравнения с малым параметром :

 (1)

где функции ,  и граница  предполагаются достаточно гладкими. Под обозначением  подразумевается зависимость функции  от аргументов . Предполагается также, что функция  удовлетворяет стандартному условию не более чем квадратичного роста по .

Исследование решений задачи (1) с пограничными слоями непосредственно связано с изучением вопроса о существовании решений с внутренними слоями (контрастных структур) в системах типа реакция-диффузия-адвекция [1], [2].

С использованием методов работы [1] для задачи (1) построено асимптотическое разложение по параметру  решения погранслойного типа. Существование решения с построенной асимптотикой обусловлено свойствами нелинейной функции  и доказывается на основе асимптотического метода дифференциальных неравенств (см. напр. [1]).

Если рассмотреть решение задачи (1) как стационарное решение соответствующей параболической задачи, то его устойчивость по Ляпунову следует из известных результатов (см. напр. [3]).

Определенное значение для приложений имеют два частных случая системы (1), которые рассмотрены в качестве примеров:

1) ; 2) .

Литература.

1. *Н.Н. Нефедов, М.А. Давыдова.* Контрастные структуры в многомерных сингулярно возмущенных задачах реакция-диффузия-адвекция. // Дифференц. уравнения. Т. 48, № 5, с. 738–748, 2012.
2. *Н.Н. Нефедов, М.А. Давыдова.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных квазилинейных уравнениях реакция-диффузия-адвекция. // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, №6. С. 715-733.
3. *В.Ф. Бутузов, А.Б. Васильева, Н.Н. Нефедов.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах. //Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т.4. №3. С. 799-851.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, пр. №10-01-00319 и 12-01-00387.

# асимптотико - численный подход при описании движущегося фронта в задаче реакция-адвекция-диффузия.

Нефедов Н.Н.1, Волков В.Т.2, Левашова Н.Т.3, Антипов Е.А.4

1)МГУ, физический факультет, кафедра математики, e-mail: [nefedov@phys.msu.ru](mailto:nefedov@phys.msu.ru)

2)МГУ, физический факультет, кафедра математики, e-mail: [volkovvt@mail.ru](mailto:volkovvt@mail.ru)

3)МГУ, физический факультет, кафедра математики, e-mail: [natasha@npanalytica.ru](mailto:natasha@npanalytica.ru)

4)МГУ, физический факультет, кафедра математики, e-mail: [a.evgen.a@gmail.com](mailto:a.evgen.a@gmail.com)

Рассматривается следующая начально-краевая задача типа реакция-адвекция-диффузия



Здесь  - малый параметр, , функции ,  и - достаточно гладкие.

Считается, что вырожденное уравнение  с дополнительным условием  имеет решение , а с условием  - решение . Начальная функция  имеет резкий переходный слой (фронт) от поверхности  к поверхности  в окрестности кривой . Исследуется вопрос об асимптотическом разложении решения данной задачи в виде движущегося фронта, положение которого описывается кривой. Эта кривая строится в виде разложения . Нулевое приближение является решением задачи Коши



Для иллюстрации построено численное решение примера (уравнение Бюргерса).

Литература

1. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями.//Дифференц. Уравнения. 1995. Т.31. N7. Ñ. 1142–1149.
2. Н.Н. Нефедов, Ю. В. Божевольнов. Движение фронта в параболической задаче реакция-диффузия. Ж. Выч. Мат. И Мат. Физ., 2010, том 50, N2, cc. 276–285.
3. Nefedov N.N., Recke L., Schnieder K.R. Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications 405 (2013), pp. 90-103.
4. Volkov V.T., Nefedov N.N. Asymptotic-numerical investigation of generation and motion of fronts in phase transition models. Lecture Notes in Computer Science, vol. 8236, p. 524-531 (2013).

# Контрастные структуры в задачах о хаосе и порядке

Быков А.А.1

1) МГУ им.М.В.Ломонсова, физический факультет, кафедра математики,   
e-mail: [abkov@yandex.ru](mailto:abkov@yandex.ru)

Значительное внимание привлекают задачи анализа и моделирование процессов эволюции социальных систем, которые могут быть описаны с помощью понятия степени упорядоченности объекта, протяженного в пространстве и эволюционирующего со временем. Например, в [1] на качественном уровне рассматривается степень упорядоченности расстановки транспортных средств (ТС) на улицах городов. Наша цель состоит в том, чтобы предложить и исследовать строгую математическую модель для описания этого процесса. Договоримся описывать степень упорядоченности функцией . Припишем хаотическому состоянию значение , упорядоченному состоянию значение , . Тогда эволюция состояния одномерной системы определяется уравнением , причем  и  для . Найдется  такая, что , , . Предполагая протяженность одномерного объекта достаточно большой, изменение со временем медленным, введем малый параметр и получим сингулярно возмущенное уравнение с малым параметром при старшей производной (\*) , член  описывает влияние окружающей обстановки на процесс принятия данным участником решения о выполнении или невыполнении правил. Ядро  есть заданная положительная достаточно быстро убывающая при  функция. В более простом варианте рассматривается уравнение реакции диффузии (\*\*) . Краевые задачи для таких уравнений подробно исследованы в работах А.Н.Тихонова, А.Б.Васильевой, В.Ф.Бутузова, Н.Н.Нефедова и их учеников. Мы в данной работе представляем принципиально новую задачу об эволюции объекта, описываемого системой уравнений вида (\*\*) для функции  на множестве промежутков , некоторые из которых имеют общие концы. Постановка задачи соответствует модели эволюции степени упорядоченности состояния системы на **сети** транспортных магистралей, некоторые из которых пересекаются в **узлах**, где встречаются три и более магистралей. Мы выводим граничные условия сопряжения решений в узлах. Известно, что решение уравнения (\*\*) при естественных требованиях к плотности источников  представляет перемещающуюся контрастную структуру (КС). Мы обнаружили, что наличие узлов принципиально изменяет характер эволюции КС. Возможны ситуации, в которой перемещающийся фронт КС, доходя до узла, останавливается. В докладе приводится обоснование прохождения при определенных условиях фронта КС через узел сети с использованием концепции нижнего и верхнего решений и метода дифференциальных неравенств.

Литература

1. Keiser K, Lindenberg S., Steg L. The spreading of Disorder **//** Science (2008) **322**, с.1681-1685.

# задачи с малым параметром в теории динамо и движение магнитного фронта во внешние области галактики

Михайлов Е.А.1, Соколов Д.Д.2

1) МГУ им. М.В.Ломоносова, Физический факультет, Кафедра математики,   
e-mail: [ea.mikhajlov@physics.msu.ru](mailto:ea.mikhajlov@physics.msu.ru)

2) МГУ им. М.В.Ломоносова, Физический факультет, Кафедра математики,   
e-mail: [sokoloff.dd@gmail.com](mailto:sokoloff.dd@gmail.com)

При исследовании вопроса о возможности наличия магнитного поля во внешних областях галактики возникает задача о распространении динамо-волны [1,2]. Основная система уравнений в рамках планарного приближения [3] в общем случае имеет следующий вид:

 (1)

 (2)

где  и  имеют смысл компонент магнитного поля, функции   и  положительны и монотонно стремятся к нулю,  - малый параметр. Если положить  в тех областях, где  у задачи (1) – (2) существуют три стационарных решения, из которых два являются устойчивыми при малом возмущении начальных данных, а одно (нулевое) – неустойчиво. При переходе в область, где  нулевое решение становится устойчивым, а два других уходят в комплексную область.

Численный расчет показывает, что в области, где  может сформироваться фронт, движущийся в сторону увеличения  После перехода через точку, в которой  скорость фронта резко замедляется и вскоре он останавливается.

Для построения асимптотических оценок задача (1) – (2) оказывается достаточно сложной, поэтому имеет смысл рассмотреть ее упрощенную скалярную версию:

 (3)

где  - функция, монотонно затухающая с ростом  (возможно, принимая отрицательные значения). Если применить асимптотические разложения [4], то скорость распространения волны в нулевом приближении будет равна  Этот результат хорошо согласуется с результатами численного моделирования.

Литература

1. Mikhailov E., Kasparova A., Moss D., Beck R., Sokoloff D., Zasov A. Magnetic fields near the peripheries of galactic discs. // – Astronomy & Astrophysics (2014) 566, A66.
2. Петров А.П., Соколов Д.Д., Мосс Д.Л. Магнитные фронты в галактиках. // – Астрон. журн. (2001) **78**, №7, с.579 – 584.
3. Phillips A. A comparison of the asymptotic and no-z approximations for galactic dynamos. // – Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. (2001) 94, p.135 – 150.
4. Нефёдов Н.Н., Никитин А.Г., Петрова М.А., Рекке Л. Движущиеся фронты в интегро-параболических уравнениях реакция-адвекция-диффузия. // – Дифференциальные уравнения (2011), 47, №9, с. 1305 – 1319.

Секция: «Теория вероятностей и математическая статистика»

Председатель профессор Королев В.Ю.

# Оконная Дисперсия миограммы и ее приращения как случайные процессы в контексте задачи локализации активности головного мозга

Хазиахметов М.Ш., Захарова Т.В.

1) МГУ им. М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической статистики,   
e-mail: [khaziakhmetov@yandex.ru](mailto:khaziakhmetov@yandex.ru)

2) МГУ им. М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической статистики,  
e-mail: [lsa@cs.msu.ru](mailto:lsa@cs.msu.ru)

Исследование активности головного мозга – одна из наиболее сложных задач медицины. Существует множество тем для исследования в данной области и подходов к решению конкретных задач, одной из которых является выделение зон коры головного мозга, соответствующих той или иной мышечной активности.

В качестве примера такой активности рассматривается постукивание указательным пальцем руки по столу. В ходе эксперимента производится запись магнитоэнцефалограммы (магнитной активности головного мозга) датчиками, закрепленными на голове испытуемого, и миограммы (электрических сигналов, управляющих мышечными сокращениями). Итоговая цель обработки полученных данных – определение датчика с максимальным откликом на движения. Для этого используется усреднение отрезков магнитоэнцефалограммы (МЭГ) отдельно для каждого датчика вокруг точек, соответствующих моментам начала движения. Результат усреднения имеет характерный вид для искомого канала МЭГ. Основная проблема заключается в определении точек, соответствующих началам движений, так как даже на искомом канале выявить моменты начала движения не представляется возможным.

Для этой цели был существенным образом доработан алгоритм определения опорных точек по миограмме, описанный в [1] (опорная точка соответствует началу работы мышцы, ее смещение по времени относительно момента начала движения, вообще говоря, неизвестно, но его можно считать постоянным для каждого конкретного эксперимента). Ключевой величиной и в базовом, и в модифицированном методах является оконная дисперсия миограммы. При доработке алгоритма были учтены ее статистические особенности: цикличность, изменение параметров распределения шума и истинного сигнала в ходе эксперимента. Это позволило значительно улучшить качество обработки: увеличить процент верно обнаруженных движений, уменьшить долю ложно определенных, повысить точность локализации собственно опорных точек. В итоге улучшилось качество усредненного отклика на искомом канале магнитоэнцефалограммы, что упростило его обнаружение (подробнее в [2]).

Также в ходе работы над задачей были проведены исследования статистических характеристик сигнала, позволившие предложить как собственно алгоритм, так и модель сигнала, к которому он применим. Были проведены исследования данной модели, с целью обоснования принципов работы предложенной методики локализации опорных точек, выявления границ применимости и свойств алгоритма.

Литература

1. Fabiani M., Gratton G., Federmeier K. D. Event-Related Brain Potentials: Methods, Theory and Applications // Handbook of Psychophysiology / Ed. Cacioppo J. T., Tassinary L. G., Berntson G. G. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. P. 85–119.
2. Захарова Т. В., Никифоров С. Ю., Гончаренко М. Б., Драницына М. А., Климов Г. А., Хазиахметов М. Ш., Чаянов Н. В. Методы обработки сигналов для локализации невосполнимых областей головного мозга // Системы и средства информатики, 2012. Т. 22. № 2. С. 157–175.

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНКИ РИСКА В ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛА в моделях С ЗАВИСИМЫМ ШУМОМ

Ерошенко А.А.1, Шестаков О.В.2

1)МГУ, ф-т ВМК, каф. Математической статистики, e-mail: [aeroshik@gmail.com](mailto:aeroshik@gmail.com@)

2)МГУ, ф-т ВМК, каф. Математической статистики, e-mail: [oshetakov@cs.msu.su](mailto:oshetakov@cs.msu.su)

Статистические методы вейвлет-анализа применимы в задаче восстановления зашумленной функции сигнала, заданной в дискретных точках : . Рассмотрим модель с коррелированным шумом – стационарный гауссовский процесс с нулевым средним, дисперсией и ковариационной последовательностью описывающей долгосрочную зависимость (см. [1]).



Функцию сигнала можно разложить в ряд по вейвлет-базису: , где , а – материнская вейвлет-функция, имеющая заданное количество нулевых моментов и непрерывных производных. Далее используя механизм мягкой пороговой обработки строится оценка функции . Шум ведет к погрешностям (риску) в этих оценках. Риск вычислить нельзя, потому что он зависит от неизвестных вейвлет-коэффициентов «чистой» функции. Однако для риска можно построить статистическую оценку.



Для модели с долгосрочной зависимостью мы показали, что при мягкой пороговой обработке с «универсальным» порогом и определенных условиях на гладкость функции данная оценка риска асимптотически нормальна и состоятельна.

На практике часто встречаются прикладные задачи, в которых данные наблюдаются не напрямую, а после линейного преобразования: ,



где – искомая функция, а оператор является линейным и однородным. Здесь для разложения сигнала применяются «вейвлетоподобные» функции (вейглеты, см. [3]) такие, что или .



В рамках данной модели нами показана асимптотическая нормальность оценки риска при пороговой обработке с «универсальным» порогом и определенных условиях на гладкость функции и свойства линейного оператора. А при более слабых ограничениях на параметры модели показана состоятельность оценки.

Далее, рассмотрим задачу компьютерной томографии: , где – оператор Радона и по наблюдаемым изображениям необходимо восстановить искомую функцию . В данной задаче также применимо вейглет-разложение.



В рамках данной модели мы показали асимптотическую нормальность оценки риска при пороговой обработке с «универсальным» порогом и определенных условиях на гладкость функции.

Литература

1. Johnstone I. M. Wavelet shrinkage for correlated data and inverse problems: adaptivity results // Statistica Sinica. – 1999. – V. 9. N. 1. P. 51–83.
2. Donoho D., Johnstone I. M. Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage // J. Amer. Stat. Assoc., - 1995 . – V. 90. P. 1200–1224 .
3. Donoho D., Johnstone I. M. Ideal Spatial Adaptation via Wavelet Shrinkage // Biometrika, - 1994. – V. 81. N. 3. P. 425 – 455.
4. Donoho D. Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition//Applied and computational harmonic analysis. – 1995. N.2. P.101–126.

# меТод прогнозирования финансовых рисков, основанный на комбинированном сеточном методе разделения дисперсионно-сдвиговых смесей.

Корчагин А.Ю.1, Королев В.Ю.2

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра мат. статистики,   
e-mail: [sasha.korchagin@gmail.com](mailto:sasha.korchagin@gmail.com)

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра мат. статистики,   
e-mail: [victoryukorolev@yandex.ru](mailto:victoryukorolev@yandex.ru)

Проблема исследования волатильности хаотических случайных процессов является наиболее актуальной при работе с финансовыми данными. На практике она сводится к задаче оценки параметров смесей вероятностных распределений. Рассматриваются 2 типа смесей: обобщённые гиперболические и обобщенные дисперсионные гамма-распределения, т.к. они являются довольно гибкими и на практике отлично соответствуют реальным данным.

Авторам удалось уточнить достаточные условия сходимости статистик, построенных по выборкам случайного объема, к указанным выше распределениям. Для дисперсионно-сдвиговых смесей нормальных распределений получены оценки зависимости возмущения функции распределения смешивающего распределения (по выбранной метрике) при возмущении функции распределения смеси.

Предложен новый двухэтапный метод, являющийся модификацией ЕМ-алгоритма. На первом этапе выделим на положительной полупрямой основную часть носителя (в работе найдены оценки для оптимального выбора верхней границы) и накинем на нее сетку с известными узлами: *u1,…,uk*. Приблизим искомое обобщенное гиперболическое распределение конечной смесью нормальных законов:



Используя стандартную логику ЕМ-алгоритма был построен итерационный процесс для оценки весов *pi* и параметра *α*. По полученной гистограмме производятся оценки параметров смешивающего распределения, например, методом наименьших квадратов.

Предложенный алгоритм устойчив к исходным данным и обладает высокой производительностью, что значительно увеличивает его практическую пользу. Были проведены численные эксперименты, в которых показана высокая точность.

При тестировании на финансовых данных, применяя данный алгоритм, мы по факту наблюдаем за траекторией точки в 5-мерном пространстве. Для прогнозирования следующего значения параметров предлагается применять авторегрессию 2-го порядка.

Литература

1. Королев В.Ю. Вероятностно-статические методы декомпозиции волатильности хаотических процессов // М.: Изд-во Московского университета, 2011.
2. Назаров А.Л. Приближенные методы разделения смесей вероятностных распределений. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ-матем. наук. // Московский государственный университет им. М.В. Ломоносов, 2013.
3. Barndorff-Neilsen O.E., Kent J., Sorensen M. Normal variance-mean mixtures and z-distributions // Int. Statis. Rev., 1982. Vol. 50. No. 2. P. 145-159.

# О токсичности потока заявок на финансовых рынках

Черток А.В.1

МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра Математической Статистики  
e-mail: [a.v.chertok@gmail.com](mailto:a.v.chertok@gmail.com)

В работе [1] предложена эмпирическая процедура оценки токсичности потока заявок на основе анализа информации о сделках. Автором рассматривается более точный подход к измерению токсичности рынка, использующий всю доступную информацию о потоке заявок (не только сами сделки, но также и постановки/снятия заявок) на основе аналитической модели процесса дисбаланса потока заявок, рассмотренной в работах [2], [3], а также процедура оценки показателя токсичности в режиме реального времени.

На временном промежутке рассмотрим процесс дисбаланса потока заявок

,

где и – считающие процессы количества заявок, пришедших от покупателей и продавцов, являющиеся независимыми пуассоновскими процессами с интенсивностями и , а и - н.о.р.с.в. с функциями распределения и . В работах [2], [3] доказаны предельные функциональные теоремы для .

При условии для рассмотрим вероятность

и назовём её **профилем мгновенной токсичности** потока заявок. Для данного назовём **байесовским** показателем мгновенной токсичности величину

*,*

где – плотность распределения вероятностей некоторой случайной величины с математическим ожиданием . Альтернативной характеристикой токсичности рынка является **квантильный** показатель мгновенной токсичности, определяемый как такое минимальное , что ( для данного .

Автором в явном виде получены выражения для байесовского и квантильного показателя токсичности для модели рынка с заявками единичного объёма, а также для рынка, с объёмами заявок, имеющих показательное распределение. Для последней из двух моделей проведена валидация на реальных данных и построены показатели токсичности в режиме реального времени. Предложенная методика расчёта показателей токсичности может быть развита для моделей рынка с неоднородными интенсивностями потоков заявок.

Литература

1. Easley D., Lopez de Prado, Marcos and O’Hara, Maureen. Flow Toxicity and Liquidity in a High Frequency World // Review of Financial Studies, Vol. 25, No. 5, pp. 1457–1493, 2012.
2. Korolev V., Chertok A., Korchagin A., Gorshenin A. Probability and statistical modeling of information flows in complex financial systems from high-frequency data // Informatics and Its Applications, 2013, 7(1), 12–21.
3. A. Chertok, V. Korolev, A. Korchagin and S. Shorgin. Application of Compound Cox Processes In Modeling Order Flows with Non-Homogeneous Intensities // January 14, 2014. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=2378975

# Доверительные интервалы для среднего значения повторНЫХ откликов в линейной регрессии

Белов A.Г. 1

*1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, e-mail:* [*belov@cs.msu.ru*](mailto:belov@cs.msu.ru)

Рассматривается нормальная линейная регрессионная модель наблюдений



где  — вектор-столбец случайных величин (с.в.)  откликов, описывающих результаты -го опыта,  — вектор-столбец случайных «ошибок» с нормальным законом распределения ;  — вектор параметров;  — регрессионная матрица из вектор–столбцов , оказывающих влияние только на среднее значение отклика , при этом , , . Для предсказания среднего  и индивидуального  значения отклика ( и не зависит от ) при заданном векторе значений регрессоров  используются известные  соответствующие доверительные интервалы [1, с.132,134]

,

где , , , , ,  —  квантиль распределения Стьюдента , .

В работе для среднего значения отклика из  повторных откликов , соответствующих заданному вектору значений регрессоров , , построены следующие  доверительные интервалы, связанные с тремя различными оценками остаточной дисперсии :

,

,

где , ,  и не зависит от . Доказано, что с.в. , ,  попарно независимы, а также , . Проведено численное моделирование и сравнительный анализ всех доверительных интервалов.

Литература

1. [Себер](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%B5%D0%B2,_%D0%9D%D0%B8%D0%BA%D0%B8%D1%82%D0%B0_%D0%9D%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B0%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87) Дж. Линейный регрессионный анализ // М.: Мир — 1980.

**Указатель авторов.**

Serov V.S. 60

Аввакумов С.Н. 35

Азиатцева В.В. 72

Александров П.А. 52

Анисимов А.В. 39

АносовС.С. 14

Асеев С.М. 32

Балаханов В.А. 8

Белов A.Г. 85

Белов А.А. 55

Белов А.Г. 56

Блинов Н.Г. 68

Богомолов С.В. 53, 54

Борзов А.Г. 52

Борисов А.В. 47

Бочаров Г.А. 73

Будак Б.А. 39

Бутузов В.Ф. 75

Бухман А.В. 45

Быков А.А. 78

ВасильевН.С. 14

Волканов Д.Ю 9

Волков В.Т. 77

Вржещ В.П. 70

Гаврилов С.В. 63

Глонина А.Б. 9

Голембиовский Д.Ю. 67

Гончаров О.И. 17

Горьков В.П. 40

Григоренко Н.Л. 40

ГромыкоВ.И. 14

Гудич И.Г. 53

Гуров С.И. 69

Гусева И.С. 76

Давыдова М.А. 76

Денисов В.Н. 29

Дмитрук А.В. 37

Егоров И.Е. 19

Еленин Г.Г. 52

Ерошенко А.А. 82

Ершов Н.М. 11

Есикова Н.Б. 53

Желтков Д.А. 72

Жуковский В.И. 34

Жуковский С.Е. 21

Захаров Е.В. 58

Захарова C.А. 76

Захарова Т.В. 81

Зипа К.С. 12

Зотов И.В. 56

Игнатенко А.В. 12

Ирошников Н.Г. 59

КазарянВ.П. 14

Калинина И.С. 45

Калиткин Н.Н. 55

Камзолкин Д.В. 38

Капалин И.В. 18

Кибитова В.Н. 9

Киселёв Ю.Н. 35, 36

Кислицын А.А. 73

Клемашев Н.И. 20

Коровина М.В. 30

Королев В.Ю. 83

Корчагин А.Ю. 83

Краев А.В. 15

Крицков Л.В. 28

Кувшинников А.Е. 54

Куприянов М.Ю. 50

Ларичев А.В. 59

Латий В.В. 70

Левашова Н.Т. 77

Лукьянова Л.Н. 39

Любимов Н.A. 58

Магницкий Н.А. 16

Мингалеева З.Т. 21

Михайлов Е.А. 79

Моисеев Е.И. 25

Моисеев Т.Е. 51

Морозов Е.В. 46

Мухин С.И. 52

Нагорный А.С. 44

Намиот Д.Е. 13

Нефедов Н.Н. 76, 77

Ни Минкан 76

Никольский М.С. 33

Нимак В.С. 66

Орлов М.В. 35

Орлов С.М. 36

Павельева Е.А. 62

Панин А.А. 27

Петровых А.С. 67

Подорога А.В. 61

Попова Н.Н. 11

Пьяных А.И. 65

Разгулин А.В. 59

Роговский А.И. 15

Рыбкин А.С. 48

Савинков Р.С. 73

Савчук А.М. 28

Садовничая И.В. 28

Салуев Т.Г. 73

Самыловский И.А. 37

Санникова И.В. 70

Сарсенби А.М. 28

Селезнева С.Н. 43, 45

Селецкий С.В. 8

СимакинА.Г. 14

Синяков В.В. 22

Соколов Д.Д. 79

Соловьев А.И. 65

Старостин А.С. 59

Стрелковский Н.В. 41

Сычугов Д.Ю. 56

Терновский В.В. 50

Тихонов И.В. 61

Устинов В.Д. 64

Хазиахметов М.Ш. 81

Хапаев М.М. 50

Холомеева А.А. 25

Хорошилов А.В. 10

Хорошилова Е.В. 26

Цыварев А.В. 10

Черток А.В. 84

Шананин А.А. 20

Шестаков О.В. 82

Якушкина Т.С. 23