

*М.В. Уфимцев*

## ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЙА ПОРЯДКА $k$

Введённое в 1930 г. распределение Пойа [1] является представителем «обобщённых», или, как чаще используемое в последние годы название, Stopped Sum Distributions [2, гл. 9]. При этом в качестве «обобщающего» распределения берётся геометрическое распределение, и оно применяется для обобщения распределения Пуассона [2, раздел 9.7]. В последнее время вместо пуассоновского распределения использовали Пуассон порядка  $k$ , получив новые распределения Пойа порядка  $k$  [3, 4]. Были получены модели, приводящие к распределениям этого типа, а также изучены вероятностные свойства таких распределений.

Вместе с тем, насколько известно автору, статистические аспекты подобных распределений не рассматривались. Цель данной публикации – рассмотрение точечного оценивания параметров распределения Пойа порядка  $k$ : вычисление нижней границы ковариационной матрицы оценок и, на этой основе, сравнение двух методов точечного оценивания.

Исследование во многом основывается на полученных в публикации [5] результатах для смеси: Пуассон порядка  $k$  / отрицательное биномиальное распределение. Основание для этого: геометрическое распределение является частным случаем отрицательного биномиального распределения  $NB(r, p)$  при  $r=1$  [2, гл. 5]. Полученные в [5] формулы используются и в данной публикации. В частности, параметры  $\theta$  и  $p$  производящей функции вероятностей (п.ф.в.) в (9.136), (9.137) книги [2] совпадают с представлением п.ф.в.

$$G(z) = \exp[\lambda(Q - Pz)^{-1} - 1]$$

(надо положить в формуле (2) работы [5]  $k = 1$ ,  $r = 1$ ), если  $\theta = \lambda q$ ,

$p = Q^{-1}$ ,  $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{Q} = \frac{P}{Q}$ . Это надо иметь в виду, если сравнивать

полученные ниже выражения для оценок параметров  $\lambda$  и  $Q$  (а также  $\lambda$  и  $P$ ) с приведёнными [2] для распределения Пойа: нужно положить  $k = 1$  и перейти к используемым в [2, раздел 9.7] параметрам.

**Сводка вероятностных результатов.** Опишем вкратце вероятностную модель, приводящую к распределению Пойа порядка  $k$ . Пусть  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  – независимые, одинаково распределённые случайные величины (с.в.) с распределением Пуассона порядка  $k$ , введённым

Филиппу [6]. Производящая функция вероятностей для них равна [2, стр. 460]

$$G_1(z) = \exp\left\{\lambda \sum_{j=1}^k (z^j - 1)\right\},$$

где  $\lambda > 0$  – пуассоновский параметр. Рассматривается сумма случайного числа слагаемых

$$S_N = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_N,$$

в которой число слагаемых  $N$  имеет геометрическое распределение с параметром («вероятность успеха»)  $p = Q^{-1}$ . П.ф.в. для  $N$  равна [2, стр. 209]

$$G_2(z) = (Q - Pz)^{-1}.$$

Тогда нетрудно показать [7, стр. 291-292; 2, стр. 382], что п.ф.в. для случайной величины  $\xi = S_N$  – сложная функция

$$G_1(G_2(z)) = G(z) = \exp\left[\lambda \sum_{j=1}^k \{(Q - Pz)^{-j} - 1\}\right]. \quad (1)$$

Как видно, с.в.  $\xi$  имеет сложнопуассоновское распределение (из класса Stopped Sum Distributions). К выражению (1) можно прийти и другим путём: подставляя в формулу (2) работы [5] значение  $r = 1$ , получим п.ф.в. для случайной величины  $\xi$ , имеющей распределение Пойа порядка  $k$ .

Полагая в (1)  $z = 0$ , получим начальную вероятность

$$p_0 = \Pr\{\xi = 0\} = G(0) = \exp\left[\lambda \sum_{j=1}^k \{Q^{-j} - 1\}\right]. \quad (2)$$

Остальные вероятности  $p_n, n = 1, 2, \dots$  вычисляются по рекуррентной формуле (см. (7) в [5])

$$(n+1)p_{n+1} = \lambda \sum_{i=0}^n \left(\frac{P}{Q}\right)^{n+1-i} p_i \sum_{j=1}^k \frac{(j+n-i)!}{(j-1)!} Q^{-j}; \quad (3)$$

отсюда, в частности, при  $n+1 = 1$

$$p_1 = \lambda \frac{P}{Q} \sum_{j=1}^k j Q^{-j} p_0. \quad (4)$$

Для вычисления нижней границы дисперсии (НГД) в неравенстве Крамера-Рао и написания уравнений максимального правдоподобия нам понадобятся выражения для производных по параметрам распределения (см. [5], стр. 94):

$$\frac{\partial p_n}{\partial \lambda} = \sum_{i=0}^n p_i \sum_{j=1}^k \pi_{n-i}^{(j)} - k p_n, \quad (5')$$

где

$$\pi_i^{(j)} = \frac{(j+l-i)!}{l!(j-1)!} P^l Q^{-j-l}; \quad (5'')$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial P} = \frac{\partial p_n}{\partial Q} = \frac{1}{P} \{np_n - (n+1)p_{n+1}\}. \quad (6)$$

Чтобы оценить параметры по методу моментов, и выписать выражения для асимптотических дисперсий оценок, нужны математическое ожидание (м.о.) и три центральных момента; соответствующие выражения суть ([5]); здесь  $\kappa_4$  – 4-й кумулянт:

$$\alpha_1 = E\{\xi\} = \lambda P \frac{k(k+1)}{2}; \quad (7)$$

$$\mu_2 = \text{Var}\{\xi\} = \alpha_1 + \lambda \frac{k(k+1)}{6} P^2 (2k+4); \quad (8)$$

$$\mu_3 = \alpha_1 + \lambda \frac{k(k+1)}{2} P^2 (2k+4) + \lambda P^3 \left[ \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{k(k+1)(2k+1)}{2} + k(k+1) \right]; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mu_4 = \kappa_4 + \mu_2^2 = & \alpha_1 + \alpha_1 \left\{ 7P \left( 1 + \frac{2k+1}{3} \right) + P^2 [12 + 6(2k+1) + 3k(k+1)] \right\} + \\ & + \alpha_1 \left\{ P^3 \left[ 6 + \frac{11}{3}(2k+1) + 3k(k+1) + \frac{1}{15}(2k+1)(3k^2 + 3k - 1) \right] \right\} + 3\mu_2^2. \quad (10) \end{aligned}$$

**Нижняя граница дисперсии оценок параметров.** При выполнении некоторых условий на функцию вероятностей (ф.в.) для любой несмещённой оценки  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{P}$  параметров  $\lambda$  и  $P$  выполняется многомерный аналог неравенства Крамера-Рао [8; стр. 158-159]: если  $V(\tilde{\lambda}, \tilde{P})$  – ковариационная матрица оценок  $\tilde{\lambda}$  и  $\tilde{P}$ , полученных по выборке объёма  $N$ , то

$$V(\tilde{\lambda}, \tilde{P}) \geq N^{-1} \mathbf{B}^{-1}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{B}$  – информационная матрица Фишера (информант)

$$\mathbf{B} = \left\| \begin{array}{cc} E \left\{ \left( \frac{\partial \ln p_n}{\partial \lambda} \right)^2 \right\} & E \left\{ \frac{\partial \ln p_n}{\partial \lambda} \frac{\partial \ln p_n}{\partial P} \right\} \\ E \left\{ \frac{\partial \ln p_n}{\partial \lambda} \frac{\partial \ln p_n}{\partial P} \right\} & E \left\{ \left( \frac{\partial \ln p_n}{\partial P} \right)^2 \right\} \end{array} \right\| \quad (12)$$

(из общей теории статистики следует, что рассматриваемые далее оценки являются асимптотически несмещёнными, так что при  $N \rightarrow \infty$  смещением в неравенстве (11) можно пренебречь).

Достаточным условием применимости (11) является регулярность ф.в. по первым и вторым производным ([9], стр. 386-387), т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial p_n}{\partial \lambda} = 0; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial p_n}{\partial P} = 0; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 p_n}{\partial \lambda^2} = 0; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 p_n}{\partial \lambda \partial P} = 0; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 p_n}{\partial P^2} = 0.$$

С помощью (5'), (5'') и (6) нетрудно проверить, что это так. Например,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial p_n}{\partial P} = \frac{1}{P} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} n p_n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_{n+1} \right\} = \frac{1}{P} \{ \alpha_1 - \alpha_1 \} = 0,$$

так как м.о.

$$\alpha_1 = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \sum_{n'=0}^{\infty} (n'+1) p_{n'+1} .$$

Регулярность по  $\lambda$  устанавливается аналогично:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial p_n}{\partial \lambda} &= \sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^n p_i \pi_{n-i}^{(j)} - p_n \right] \right\} = \sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} p_i \pi_{n-i}^{(j)} - \sum_{n=0}^{\infty} p_n \right\} \\ &= \sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} p_i \sum_{m=0}^{\infty} \pi_m^{(j)} - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Так как  $\pi_m^{(j)}$  – ф.в. для случайной величины  $\tau_j$ , имеющей отрицательное биномиальное распределение:  $\tau_j \sim NB(j, P)$ , то сумма всех вероятностей  $\pi_m^{(j)}$  равна 1, так что имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial p_n}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} p_i - 1 \right\} = 0.$$

Аналогично (хотя и более объёмными выкладками) доказывается регулярность  $p_n$  по вторым производным.

Для вычисления матрицы  $\mathbf{B}$  в (12) использовались рекуррентность (3) и выражения для производных ф.в. по параметрам (5'), (5'') и (6). Так как (11) – неравенство для матриц, то практически его используют, переходя к скалярам, как матричным мерам. Чаще всего такой мерой служит обобщённая дисперсия – определитель матрицы  $V(\tilde{\lambda}, \tilde{P})$  и, соответственно, определитель матрицы  $\frac{1}{N} \mathbf{B}^{-1}$ . Произведение этих определителей даёт эффективность оценщика  $\{ \tilde{\lambda}, \tilde{P} \}$ .

**Метод моментов** заключается в том, что для выборки  $x_1, \dots, x_N$  объёма  $N$  вычисляются низшие выборочные моменты (в случае оценивания двух параметров это выборочное среднее  $a_1 = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  и выборочная дисперсия

$$m_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad );$$

они приравниваются моментам для популяции  $\alpha_1$  (7) и  $\mu_2$  (8). Из законов больших чисел следует состоятельность  $a_1$  и  $m_2$  как оценщиков  $\alpha_1$  и  $\mu_2$ ; стало быть, состоятельность получаемых оценок параметров распределения  $\lambda$  и  $P$ . Более того: доказано, что при  $N \rightarrow \infty$  оценки по

методу моментов асимптотически несмещённые и распределены нормально [10].

В нашем случае оценки по методу моментов суть:

$$\hat{P} = \frac{3}{2k+4} \frac{m_2 - \bar{x}}{\bar{x}}, \quad \hat{\lambda} = \frac{2\bar{x}^2}{m_2 - \bar{x}} \frac{2k+4}{3k(k+1)}; \quad (13)$$

условие существования оценок (13) – чтобы  $m_2 > \bar{x}$ .

Дисперсии оценок метода моментов асимптотически равны ([10], гл. 27)

$$Var\{\hat{P}\} = \left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial a_1}\right)^2 Var\{a_1\} + \left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial m_2}\right)^2 Var\{m_2\} + 2\left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial a_1}\right)\left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial m_2}\right) cov\{a_1, m_2\}; \quad (14)$$

аналогичное выражение (с заменой  $\frac{\partial \hat{P}}{\partial a_1}$  и  $\frac{\partial \hat{P}}{\partial m_2}$  на  $\frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial a_1}$  и  $\frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial m_2}$ )

справедливо для  $Var\{\hat{\lambda}\}$ . Производные в (14) берутся в точке  $\{a_1 = \alpha_1, m_2 = \mu_2\}$ , и их значения равны

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{P}}{\partial a_1} &= -\frac{3}{2k+4} \frac{\mu_2}{\alpha_1^2}; \quad \frac{\partial \hat{P}}{\partial m_2} = \frac{3}{2k+4} \frac{1}{\alpha_1}; \quad \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial m_2} = -\frac{2\alpha_1^2}{(\mu_2 - \alpha_1)^2} \frac{2k+4}{3k(k+1)}; \\ \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial a_1} &= 2 \frac{2k+4}{3k(k+1)} \frac{2\alpha_1(\mu_2 - \alpha_1) + \alpha_1^2}{(\mu_2 - \alpha_1)^2} = \frac{2(2k+4)}{3k(k+1)} \frac{\alpha_1}{(\mu_2 - \alpha_1)^2} [2\mu_2 - \alpha_1]. \end{aligned} \quad (15)$$

Дисперсии моментов  $Var\{a_1\}$ ,  $Var\{m_2\}$  и ковариация  $cov\{a_1, m_2\}$  асимптотически равны [10]

$$Var\{a_1\} = \frac{\mu_2}{N}; \quad Var\{m_2\} = \frac{1}{N}(\mu_4 - \mu_2^2); \quad cov\{a_1, m_2\} = -\frac{\mu_3}{N}. \quad (16)$$

При использовании (13) для вычисления эффективности оценок  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{P}$  потребуется недиагональный элемент  $cov\{\hat{\lambda}, \hat{P}\}$  матрицы  $V(\hat{\lambda}, \hat{P})$ ; выражение для асимптотического значения его есть в ([11], стр. 322). Для двух функций  $g(\xi_1, \dots, \xi_m)$  и  $h(\xi_1, \dots, \xi_m)$  с.в.  $\xi_1, \dots, \xi_m$ , имеющих  $E\{\xi_j\} = \theta_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) и конечные дисперсии и ковариации, ковариация между  $g$  и  $h$  равна

$$cov\{g, h\} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial \theta_i} \frac{\partial h}{\partial \theta_j} cov\{\xi_i, \xi_j\}; \quad (17)$$

производные вычисляются в точках  $x_i = \theta_i$ .

Численные результаты по эффективности метода моментов и сравнения его с другим методом оценивания приведены ниже.

**Метод подстановки.** Другой часто используемый оцениватель  $\lambda$  и  $Q$  ( $= P+1$ ) получается как частный вариант метода подстановки: м.о. (7) и нулевая вероятность  $p_0$  (2) приравняются к их выборочным

аналогам  $\bar{x}$  и нулевой частоте  $f_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{x_i,0}$  ( $I$  – функция-индикатор).

Тогда имеем, логарифмируя (2):

$$\left\{ \begin{array}{l} -\ln f_0 \cong \lambda \sum_{j=1}^k (I - Q^{-j}) \\ \bar{x} \cong \lambda (Q - I) \frac{k(k+1)}{2} \end{array} \right. \quad (18')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\ln f_0 \cong \lambda \sum_{j=1}^k (I - Q^{-j}) \\ \bar{x} \cong \lambda (Q - I) \frac{k(k+1)}{2} \end{array} \right. \quad (18'')$$

Выражая  $\lambda$  с помощью (18'') и подставляя его в (18'), получим

$$-\ln f_0 \frac{k(k+1)}{2\bar{x}} (Q - I) = \sum_{j=1}^k (I - Q^{-j}) \quad (19)$$

Ясно, что если  $f_0 > 0$ , то при  $Q = 1$  будет равенство в обеих частях (19). Если же  $Q > 1$ , то в левой части (19) – линейно возрастающая функция (обычно будет  $f_0 < 1 \Rightarrow -\ln f_0 > 0$ ); правая часть (19) тоже возрастает по  $Q$ , но ограничена сверху: при  $Q \rightarrow +\infty$  сумма справа равна  $k$ . Поэтому существует, помимо  $Q = 1$ , точка  $Q^* > 1$ , обеспечивающая равенство (19), и решение (19) существует ( $Q^*$  единственна). К сожалению, нелинейное уравнение (19) требует итераций для нахождения  $Q^*$ , и его нельзя записать в явном виде.

Если  $Q^* > 1$  – решение (19), то оценка  $\lambda^*$  параметра  $\lambda$  получается из (18'')

$$\lambda^* = \frac{2\bar{x}}{(Q^* - I)k(k+1)} \quad (20)$$

Дисперсии и ковариация оценок  $Q^*$  и  $\lambda^*$  ищутся по формулам типа (14) и (17), причём [9]

$$\text{Var}\{f_0\} = \frac{p_0(1-p_0)}{N}, \quad \text{cov}\{\bar{x}, f_0\} = -\frac{\alpha_1 p_0}{N} \quad (21)$$

Производные  $Q^*$  и  $\lambda^*$  по  $\bar{x}$  и  $f_0$  вычисляются с помощью неявных функций. Обозначим

$$F_1(a_1, f_0, \lambda, Q) = a_1 - \lambda (Q - I) \frac{k(k+1)}{2} = 0;$$

$$F_2(a_1, f_0, \lambda, Q) = \ln f_0 - \lambda \left( \sum_{j=1}^k Q^{-j} - k \right) = 0.$$

Дифференцируя их, имеем

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial F_1}{\partial a_1} - (Q-1) \frac{k(k+1)}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial a_1} - \lambda \frac{k(k+1)}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_1} \\
&= 1 - (Q-1) \frac{k(k+1)}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial a_1} - \lambda \frac{k(k+1)}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_1} ; \\
0 &= \frac{\partial F_2}{\partial a_1} - \left( \sum_{j=1}^k Q^{-j} - k \right) \frac{\partial \lambda}{\partial a_1} + \lambda \sum_{j=1}^k j Q^{-j-1} \frac{\partial Q}{\partial a_1} \\
&= \left( k - \sum_{j=1}^k Q^{-j} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial a_1} + \lambda \sum_{j=1}^k j Q^{-j-1} \frac{\partial Q}{\partial a_1} ; \\
0 &= \frac{\partial F_1}{\partial f_0} - (Q-1) \frac{k(k+1)}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial f_0} - \lambda \frac{k(k+1)}{2} \frac{\partial Q}{\partial f_0} \\
&= - (Q-1) \frac{k(k+1)}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial f_0} - \lambda \frac{k(k+1)}{2} \frac{\partial Q}{\partial f_0} ; \\
0 &= \frac{\partial F_2}{\partial f_0} - \left( \sum_{j=1}^k Q^{-j} - k \right) \frac{\partial \lambda}{\partial a_1} + \lambda \sum_{j=1}^k j Q^{-j-1} \frac{\partial Q}{\partial a_1} \\
&= \frac{1}{f_0} - \left( \sum_{j=1}^k Q^{-j} - k \right) \frac{\partial \lambda}{\partial a_1} + \lambda \sum_{j=1}^k j Q^{-j-1} \frac{\partial Q}{\partial a_1} .
\end{aligned}$$

Введём обозначения:

$$\delta = \sum_{j=1}^k Q^{-j} - k ; \quad \sigma = \sum_{j=1}^k j Q^{-j-1} ; \quad R = \frac{k(k+1)}{2} (Q-1). \quad (22)$$

В величинах (22) приведённая выше система примет вид:

$$\begin{aligned}
R \frac{\partial \lambda}{\partial a_1} + \lambda \frac{k(k+1)}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_1} &= 1 ; \\
\lambda \sigma \frac{\partial Q}{\partial a_1} &= \delta \frac{\partial \lambda}{\partial a_1} ; \quad (23')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Q-1) \frac{\partial \lambda}{\partial f_0} &= - \lambda \frac{\partial Q}{\partial f_0} ; \\
\delta \frac{\partial \lambda}{\partial f_0} - \lambda \sigma \frac{\partial Q}{\partial f_0} &= \frac{1}{f_0}. \quad (23'')
\end{aligned}$$

Тогда из (23') находим выражения для производных

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial a_1} = \left( R + \frac{\delta k(k+1)}{\sigma} \right)^{-1} ; \quad \frac{\partial Q^*}{\partial a_1} = \frac{\delta}{\lambda \sigma} \left( R + \frac{\delta k(k+1)}{\sigma} \right)^{-1}. \quad (24)$$

Подобным образом, из (23'') получим

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial f_0} = [f_0 \{ \delta + \sigma(Q-1) \}]^{-1} ; \quad \frac{\partial Q^*}{\partial f_0} = \frac{1-Q}{\lambda} [f_0 \{ \delta + \sigma(Q-1) \}]^{-1}. \quad (24'')$$

Ковариация между  $Q^*$  и  $\lambda^*$  при  $N \rightarrow \infty$  равна ([11]; сравните с (17))

$$\begin{aligned} \text{cov}\{Q^*, \lambda^*\} &= \\ &= \frac{\partial Q^*}{\partial a_1} \frac{\partial \lambda^*}{\partial a_1} \text{Var}\{a_1\} + \left( \frac{\partial Q^*}{\partial a_1} \frac{\partial \lambda^*}{\partial f_0} + \frac{\partial Q^*}{\partial f_0} \frac{\partial \lambda^*}{\partial a_1} \right) \text{cov}\{a_1, f_0\} + \frac{\partial Q^*}{\partial f_0} \frac{\partial \lambda^*}{\partial f_0} \text{Var}\{f_0\}; \end{aligned} \quad (25)$$

производные вычисляются согласно (24') и (24'').

**Численные результаты.** Как следует из рассмотрения выше, даже для простейшего из методов оценивания, метода моментов, в котором получаются в явном виде формулы для оценок, оценить их дисперсии, а тем самым – эффективность оценок, можно только на компьютере. Поэтому было разработано соответствующее программное обеспечение, которое использовано для расчётов.

Были вычислены эффективности оценок по методу моментов, а также по методу «выборочного среднего и нулевой частоты». Под эффективностью понимается предел отношения обобщённой дисперсии матрицы  $N^{-1} \mathbf{B}^{-1}$  к обобщённой дисперсии соответствующей матрицы оценки  $V(\tilde{\lambda}, \tilde{P})$ :

$$\text{eff}(\tilde{\lambda}, \tilde{P}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (|NB \parallel V(\tilde{\lambda}, \tilde{P})|)^{-1}. \quad (26)$$

Эффективность (26) рассматривалась как функция величины  $\lambda$  пуассоновского параметра на равномерной сетке (0.09; 9.99) – всего 50 точек. Чтобы не строить трёхмерные графики, автор получил 4 графика, отвечающих значениям вероятности  $p = 0.1; 0.4; 0.6; 0.9$  (соответственно, параметр  $Q = 1/p$  принимал значения 10; 2.5; 1.666...7; 1.111...1, а  $P = Q - 1$ ).

Наряду с эффективностью, были также вычислены асимптотические дисперсии оценок параметров  $\lambda$  и  $P$  (или  $Q$ ) по методу моментов, по методу «выборочного среднего и нулевой частоты», а также нижняя граница дисперсии оценки (НГД); это – не что иное, как соответственные диагональные элементы матриц  $NV$  и  $\mathbf{B}^{-1}$  в (11). Однако оказалось, что при изменении  $\lambda$  от 0.09 до 9.99 величины меняются на несколько порядков, так что целесообразно рассматривать логарифмы величин. Ниже приведены соответствующие графики для наименьшего значения  $p = 0.1$  и для наибольшего,  $p = 0.9$ .

Легенды графиков: на рисунках эффективности методу моментов соответствует маркер «\*», а методу «выборочного среднего и нулевой частоты» – сплошная линия, с маркером «кружок». На графиках логарифмов дисперсий использовались те же обозначения для оценивателей, а для логарифма НГД – сплошная линия без маркеров. Кроме того, на легенде «\*» (1 – метод моментов) выводится также значение вероятности  $p$ , соответствующей графику.

В статье представлены результаты вычислений важнейших случаев:  $k = 2$  и  $k = 3$ ; рисунки 1, 2 и 3 отвечают  $k = 2$ , а рисунки 4-6 соответствуют



$k=3$ . Из сравнения их видно, что важнейшие качественные особенности одинаковы для  $k=2$  и  $k=3$ , а различия этих значений  $k$  – количественного характера. Поэтому подробно рассмотрим вариант  $k=2$ , а относительно  $k=3$  сделаем беглые замечания.

Видно, что при малых  $\lambda$  (порядка  $0.09 \div 2$ ) эффективность оценивания по методу «выборочного среднего и нулевой частоты» выше, чем по методу моментов, и она близка к 1. Но это преимущество быстро «сходит на нет» с ростом  $\lambda$ , так что даже при  $p=0.9$  эта эффективность равна лишь 0.4 при значении  $\lambda=9.99$ . При меньших  $p$  эффективность ещё меньше. В то же время эффективность оценивания по методу моментов, пройдя минимум при значениях  $\lambda \approx 1$ , возрастает с ростом  $\lambda$  и при  $\lambda=9.99$  близка к 1.

Этого следовало ожидать: в [5] получена нормальная асимптотика при  $\lambda \rightarrow \infty$  для смеси Пуассона порядка  $k$  с отрицательным распределением; выше уже отмечалось, что геометрическое распределение – частный случай отрицательного биномиального. Но для нормального распределения оценщики по методу максимального правдоподобия (асимптотически эффективные) и по методу моментов асимптотически эквивалентны, что и подтверждают рисунки 1 и 4.

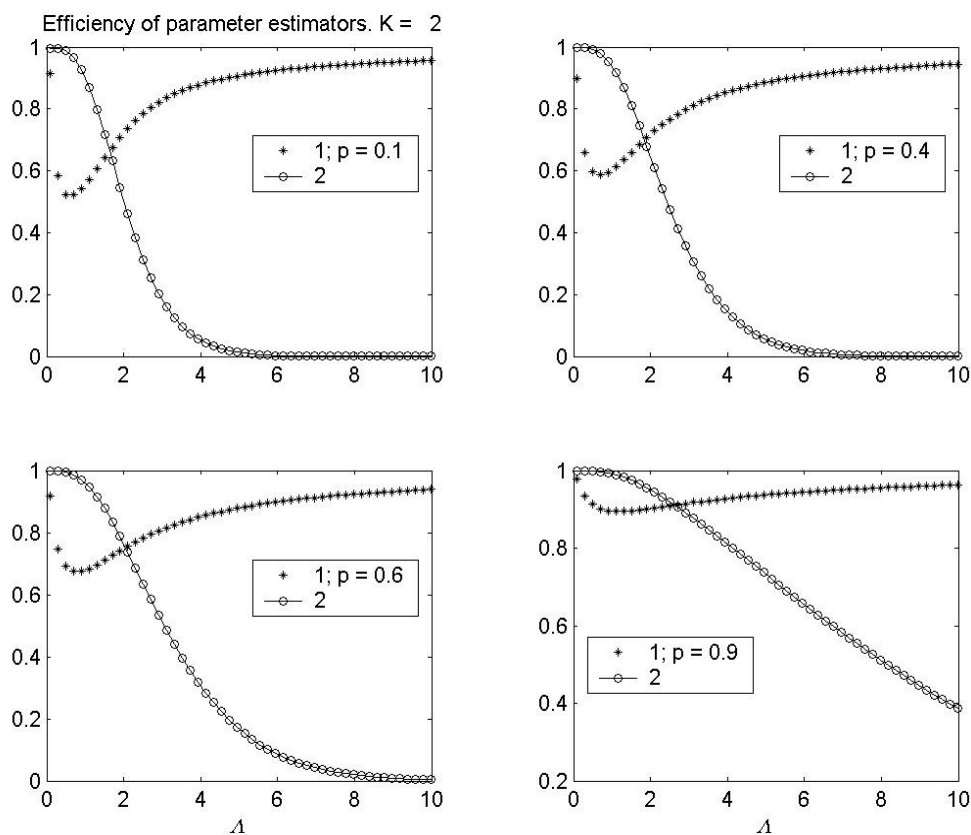


Рисунок 1. Эффективность оценок при  $k=2$ .

Теперь рассмотрим рисунки 2, 3 (соответственно, 5 и 6) логарифмов дисперсий оценок параметров. Сравнение с логарифмом НГД подтверждает наши наблюдения особенностей рис. 1: только при малых  $\lambda$  оценка «2» по методу «выборочного среднего и нулевой частоты» лучше, чем оценка «1» метода моментов; при увеличении  $\lambda$  НГД и оценка «1» близки, а логарифм дисперсии оценки «2» на несколько единиц больше. Если логарифмы оценок параметра  $\lambda$  – возрастающие функции  $\lambda$ , то для оценок параметра  $P$  (или  $Q$ ) логарифмы дисперсий НГД и оценки «1» – монотонно убывающие, а при больших  $\lambda$  – выходящие на константу; логарифм дисперсии оценки «2» сначала уменьшается, а с увеличением  $\lambda$  растёт.

Такой характер кривых «1» и «2» на графиках – довольно общий случай для ранее рассматриваемых автором сложнопуассоновских распределений, а не только Пойа порядка  $k$ . Объясняется он характером дисперсий (16) и (21): первые линейны или квадратичны по  $\lambda$ , в то время как в (21) член  $p_0$  экспоненциален. Подробнее: ясно, что в выражении

$$(14) \text{ главный член по } \lambda \text{ соответствует слагаемому } \left( \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial m_2} \right)^2 \text{Var}\{m_2\};$$

согласно (15), производная  $\hat{\lambda}$  по  $m_2$  – безразмерная, а в силу (16)  $\text{Var}\{m_2\} \cong \kappa_4 + 2\alpha_1^2$  имеет квадратичную по  $\lambda$  размерность. При логарифмировании дисперсии квадратичный рост по  $\lambda$  становится логарифмическим, что мы и наблюдаем на кривых «1» рисунков 2 и 5. То же самое можно сказать про главный член в  $\text{Var}\{\hat{P}\}$  формулы (14); но так как, согласно (15), производная  $\hat{P}$  по  $m_2$  имеет порядок  $\lambda^{-1}$ , то при больших  $\lambda$  кривые «1» на рис. 3 и 6 выходят на константу.

Кривые «2» растут линейно по  $\lambda$ , если его значения достаточно велики (это ясно для верхних рисунков 2, 3, 5, 6; в то же время при  $p = 0.9$  на нижних рисунках асимптотическая линейность кривых «2» только угадывается, так что нужно рассматривать значения  $\lambda$ , большие 10). Такой характер зависимости объясняется формулами (24'') производных по  $f_0$  (именно они будут определять главный по  $\lambda$  член в выражении типа

$$(14) \text{): член } \left( \frac{\partial \lambda^*}{\partial f_0} \right)^2 \text{Var}\{f_0\}, \text{ согласно (21) и (24''), экспоненциально растёт}$$

по  $\lambda$ . При логарифмировании дисперсии экспонента становится линейно возрастающей функцией  $\lambda$ .

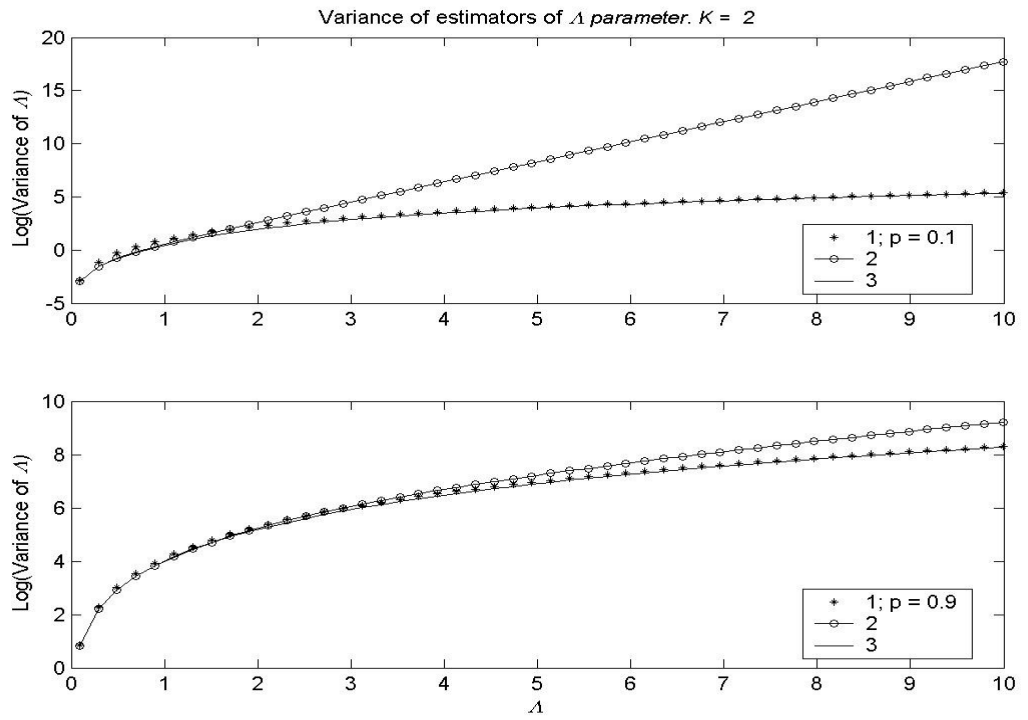


Рисунок 2. Логарифмы дисперсии оценок параметра  $\Delta$ .

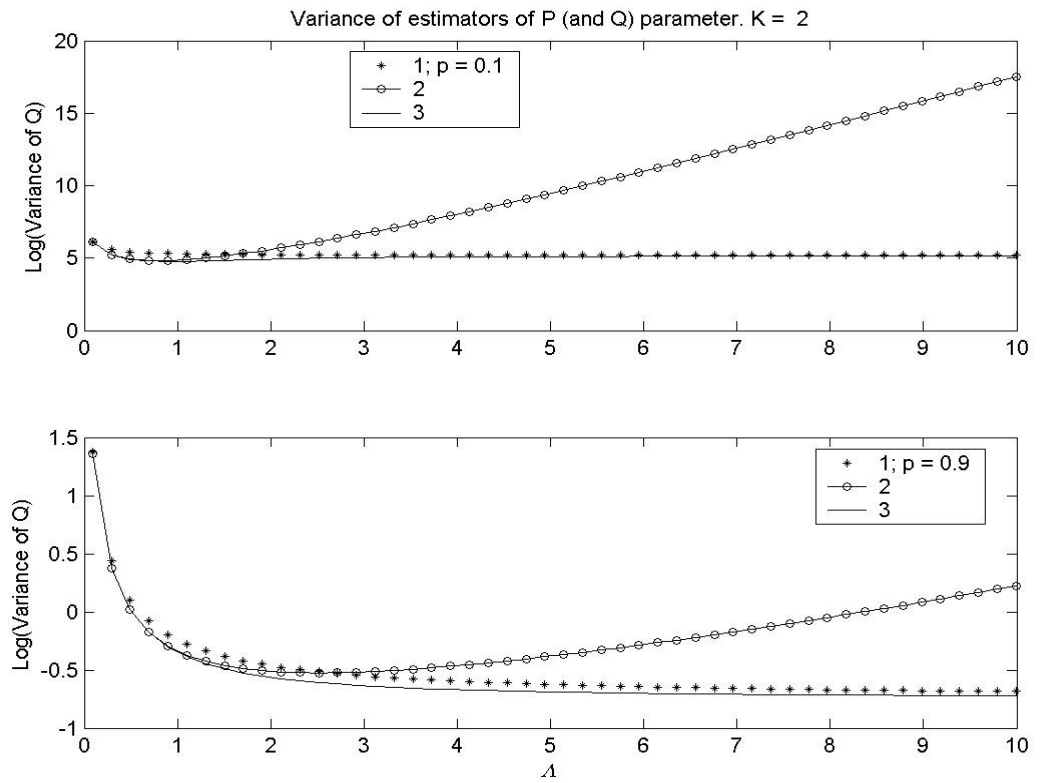


Рисунок 3. Логарифмы дисперсии оценок параметра  $P$  (или  $Q$ ).

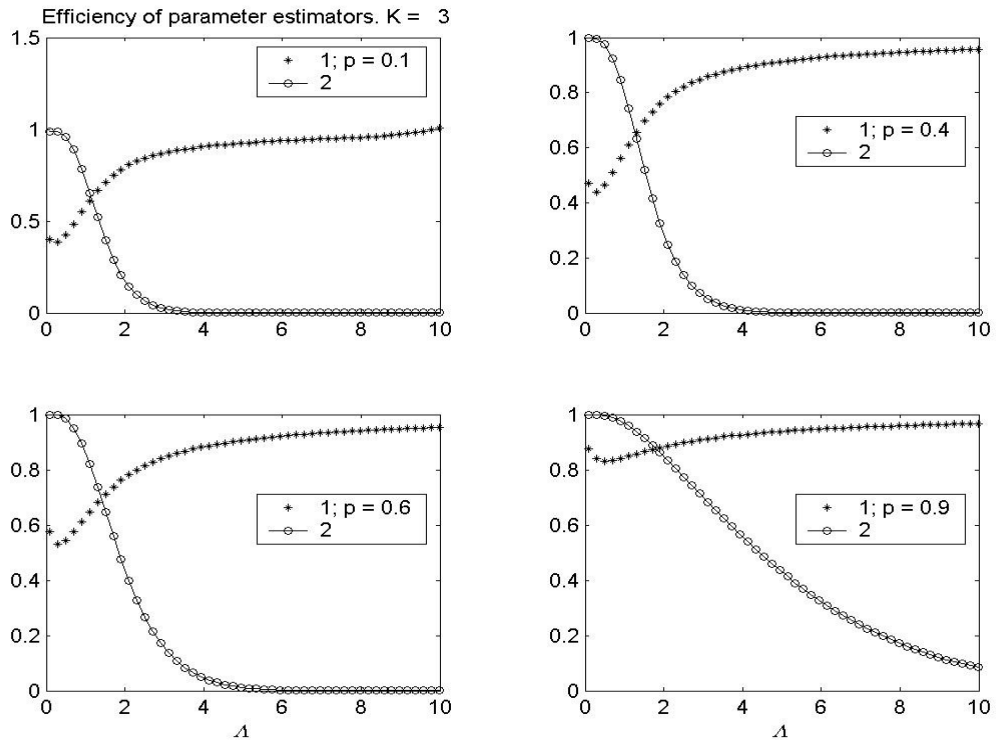


Рисунок 4. Эффективность оценок при  $k = 3$ .

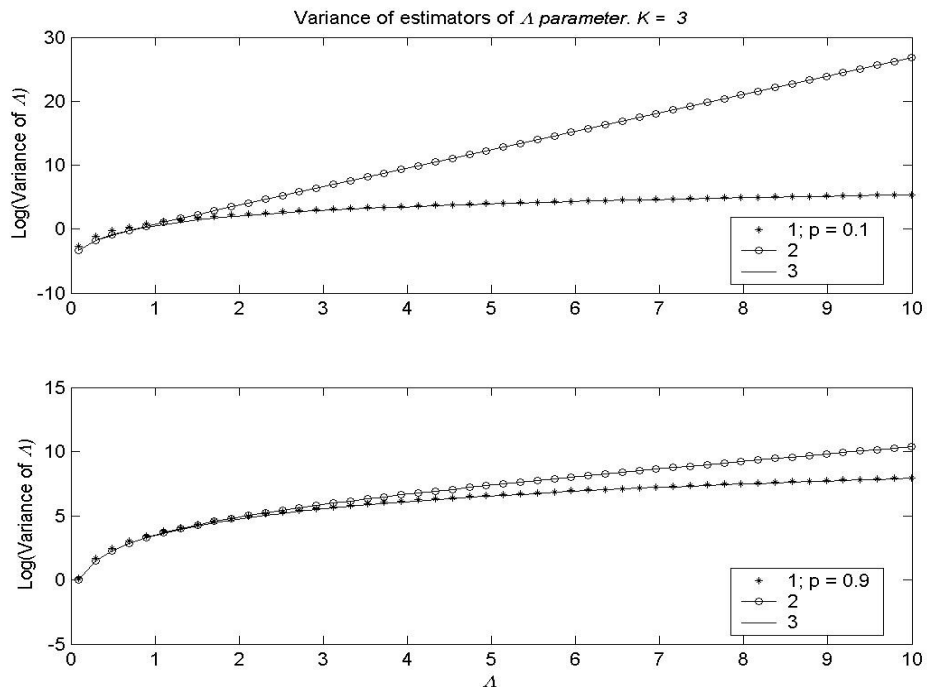


Рисунок 5. Логарифмы дисперсии оценок параметра  $\Delta$  при  $k = 3$ .

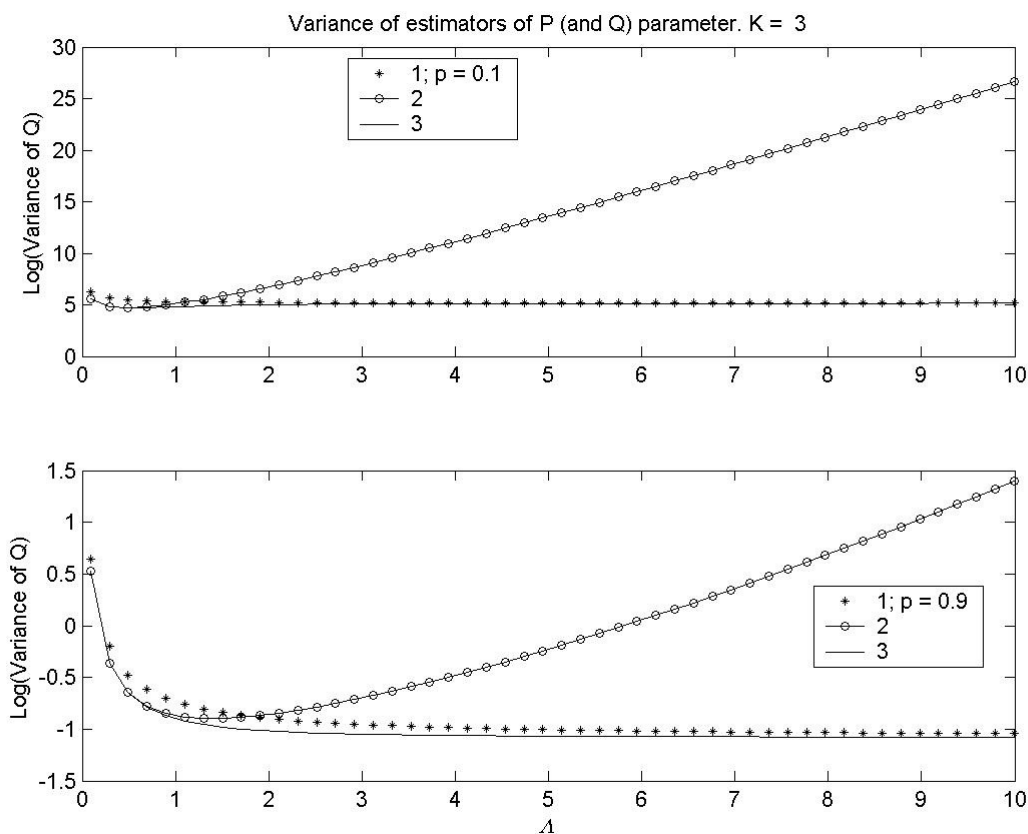


Рисунок 6. Логарифмы дисперсии оценок параметра  $P$  (или  $Q$ ) при  $k = 3$ .

Таким образом, численные результаты показывают преимущества оценивания по методу моментов: дисперсии оценок, если и растут для  $\hat{\lambda}$ , то медленно, и при больших  $\lambda$  близки к НГД. Метод «выборочного среднего и нулевой частоты» следует применять лишь при небольших  $\lambda$ , где он эффективнее метода моментов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Polya, G. (1930) Sur quelques de la theorie des probabilités, Annales de l'Institut H. Poincaré, **1**, 117 – 161
2. Johnson, N. I., Kemp, A.W., and Kotz, S. (2005) *Univariate Discrete Distributions*, 3<sup>rd</sup> ed. Wiley @ Sons, Inc., Hoboken, New Jersey
3. Hirano, K. (1986) Some properties of the distributions of order  $k$ . *Fibonacci Numbers and Their Applications*. A.N. Philippou, C.E. Bergrum, and A.F. Horadam (Editors), 43 – 53. Dordrecht: Reidel

4. Philippou, A.N., Tripsiannis, G.A., and Antzoulakos, D.L. (1989) New Polya and inverse Polya distributions of order  $k$ . *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **18**, 2125 – 2137
5. Белов А.Г., Галкин В.Я., Уфимцев М.В. Сложный закон Пуассона с обобщающим отрицательным биномиальным распределением. В кн.: *Прикладная математика и информатика*, № 19, стр. 91 – 102. М.: МАКС Пресс, 2004
6. Филиппу А.Н. Пуассоновские и сложные пуассоновские распределения порядка  $k$  и некоторые их свойства.- Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института АН СССР, 1983, № 130, стр. 175-180
7. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и её применение*, т.1. М.: Мир, 1967
8. Боровков А.А. *Математическая статистика: оценка параметров, проверка гипотез*. М.: , проверка гипотез. М.: Наука, 1984
9. Уилкс С. *Математическая статистика*. М.: Наука, 1967
10. Крамер Г. *Математические методы статистики*. М.: Мир, 1975
11. Кендалл М., Стьюарт А. *Теория распределений*. М.: Наука, 1966