

Раздел I. Математическое моделирование

Г. П. Васильев¹, Н. В. Песков², Т. М. Лысак^{3,4}, М. В. Колесова⁵

АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ВЕНТИЛЯЦИЕЙ В ТОННЕЛЕ МЕТРО НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ТЕПЛОВОГО БАЛАНСА*

Введение

В процессе эксплуатации подземных линий метрополитена происходит накопление тепловой энергии в окружающих грунтах, что приводит к постепенному повышению температуры внутри тоннелей. Существенное повышение температуры воздуха внутри тоннелей в процессе эксплуатации особенно заметно для старых длительно эксплуатируемых систем метро. Как показали недавние исследования [1-4], вокруг тоннелей метрополитена глубокого заложения происходит формирование тепловых резервуаров, то есть областей повышенной температуры. Использование этой тепловой энергии позволит снизить температуру воздуха в тоннелях метро в летний период, тем самым уменьшив затраты электроэнергии на вентилирование тоннелей и обогрев окружающих зданий в зимний период.

При проектировании новых линий и обеспечении функционирования существующих линий особое внимание уделяется возможности поддержания оптимального температурного и влажностного режима эксплуатации, обеспечивающего комфорт пассажиров. Существующие в настоящее время коммерческие программные продукты, которые используются для проектирования новых линий (SES, STES, IDA Tunnel) [5-7], являются одномерными по пространству моделями и не учитывают теплообмен между тоннелем и окружающими грунтами, а следовательно, и накопление тепловой энергии в окружающих тоннель грунтах.

¹ ООО «ИНСОЛАР-ИНВЕСТ», Москва, Россия, 121309; e-mail: gpvassiliev@gmail.com

² Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия, 119991; e-mail: peskov@cs.msu.su

³ Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия, 119991; e-mail: lysak@cs.msu.su

⁴ Совместный университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, факультет ВМК, Шэньчжэнь, Китай, 518172, e-mail: lysak@cs.msu.su

⁵ ООО «ИНСОЛАР-ИНВЕСТ», Москва, Россия, 121309; e-mail: eco-insolar@mail.ru

* Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, уникальный идентификатор проекта RFMEFI57918X0159.

Известные из литературы 2D и 3D модели, описывающие систему тоннель-грунт, являются либо сильно упрощенными моделями тоннелей глубокого заложения [8-11], либо являются достаточно подробными моделями [2,12,13], которые, однако, требуют для численных расчетов использования коммерческих пакетов типа ANSIS и поэтому не допускают расчетов на длительных (несколько лет\десятков лет) интервалах времени. Предложенная в работе [14] математическая модель, частично позволяет устранить указанные недостатки и дать долговременный прогноз средней температуры воздуха в тоннелях метрополитена и распределения температуры окружающих грунтов. Модель учитывает сезонные колебания температуры атмосферного воздуха, теплообмен на поверхности земли, и поэтому может быть использована для моделирования теплового режима в тоннелях мелкого заложения.

Как известно, тепловой режим в тоннелях метро определяется балансом между тепловыделениями и оттоком тепла, причем основным источником тепла служит торможение поездов, а отток тепла происходит преимущественно за счет действия механической вентиляции [15]. Изменяя режим работы вентиляции в зависимости от сезонных колебаний температуры атмосферного воздуха и интенсивности движения поездов можно добиться поддержания комфортной температуры в тоннеле.

В настоящей работе с помощью модели теплового баланса [14] оцениваются краткосрочные изменения температуры в тоннеле московского метрополитена. Используются детальные данные о генерации тепла в тоннелях метро и метеорологические данные для московского региона. Полученные оценки позволяют определять скорость воздухообмена, необходимую для поддержания оптимального температурного режима в тоннеле московского метрополитена.

Модель теплового баланса

Модель теплового баланса описывает распределение температуры в грунте, окружающем два одинаковых мелко заглубленных тоннеля, и среднюю температуру воздуха в тоннелях. Рассматриваются два параллельных тоннеля, расстояние между центрами которых равно D , расположенных горизонтально под горизонтальной поверхностью земли на заданной глубине H . Выбирается участок тоннеля между станциями метро. Предполагается однородное распределение температуры воздуха в тоннелях, и неизменность состава грунта и его температуры в горизонтальном сечении на рассматриваемом участке тоннеля. Данные предположения позволяют ограничиться рассмотрением двумерной по пространству модели. Предположение двух одинаковых тоннелей приводит к симметричному распределению температуры в грунте относительно вертикальной оси, проходящей через середину отрезка, соединяющего центры тоннелей. При таких предположениях расчётную

область G для температуры грунта можно выбрать так, как показано на Рис. 1. Расчетная область G ограничена осью симметрии системы двух тоннелей (граница Γ_0), поверхностью земли (граница Γ_a), границей тоннель-окружающий грунт Γ_t , и частью окружности радиуса R_d с центром в центре поперечного сечения тоннеля, расположенной в грунте (граница Γ_g). Начало координат помещаем в центр поперечного сечения тоннеля, ось координат Ox проходит параллельно поверхности земли, ось координат Oy - перпендикулярно поверхности земли.

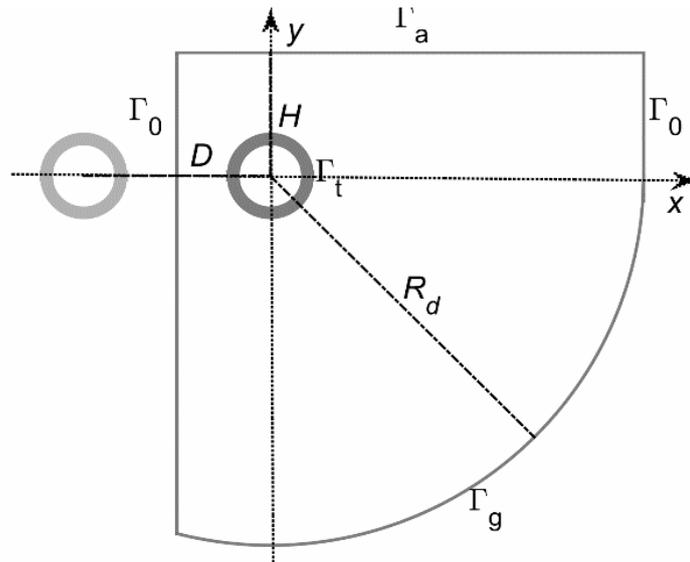


Рис. 1. Расчетная область.

Для тоннелей мелкого заложения теплообмен на поверхности земли между атмосферным воздухом и грунтом приводит к заметной анизотропии распределения температуры в окружающих тоннели грунтах и не позволяет свести рассматриваемую задачу к цилиндрической геометрии.

Распределение температуры $T(t, x, y)$ в окружающем грунте (область G , Рис.1) описывается уравнением теплопроводности

$$C_g(x, y) \frac{\partial T(t, x, y)}{\partial t} = \nabla(\lambda_g(x, y) \nabla T(t, x, y)), \quad (1)$$

где функции $C_g(x, y)$ и $\lambda_g(x, y)$ описывают объемную теплоемкость и коэффициент теплопроводности грунта, соответственно. Зависимость этих функций от пространственных координат позволяет описывать неоднородные грунты.

Средняя температура воздуха $T_t(t)$ в тоннеле описывается уравнением

$$C_a \frac{dT_t}{dt} = q + C_a \nu (T_a - T_t) + \frac{2\alpha_t}{R_t} (\tilde{T}_s - T_t), \quad \tilde{T}_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(t, R_t, \varphi) d\varphi. \quad (2)$$

Последнее слагаемое в правой части уравнения (2) описывает теплообмен между воздухом в тоннеле и грунтом и учитывает конвективный теплообмен между воздухом и стенкой тоннеля и тепловое сопротивление стенки. Второе слагаемое в правой части уравнения (2) учитывает влияние вентиляции на среднюю температуру воздуха. Мы предполагаем, что действие вентиляции состоит в том, что в единицу времени определенная часть воздуха в тоннеле (температура $T_t(t)$) вытесняется на поверхность земли и замещается воздухом с поверхности (температура $T_a(t)$). Коэффициент $\nu(t) = \frac{\Delta V(t)}{V_0}$ задаёт кратность воздухообмена. Слагаемое $q(t)$ описывает объемную плотность тепловыделений в тоннеле; C_a - объемная теплоемкость воздуха, α_t - коэффициент теплопередачи на границе Γ_t тоннель-окружающий грунт; R_t - радиус тоннеля.

Уравнения (1)-(2) дополняются граничными условиями:

$$\begin{aligned}(\mathbf{n} \cdot \lambda_g \nabla T)|_{\Gamma_0} &= 0, \\(\mathbf{n} \cdot \lambda_g \nabla T)|_{\Gamma_t} &= \alpha_t(T - T_t), \\(\mathbf{n} \cdot \lambda_g \nabla T)|_{\Gamma_a} &= \alpha_a(T_a - T), \\T|_{\Gamma_g} &= T_g,\end{aligned}\tag{3}$$

а также начальными условиями

$$\begin{aligned}T(t = 0, x, y)|_{\Gamma_g} &= T^0(x, y), \quad (x, y) \in G, \\T_t(t = 0) &= T_t^0.\end{aligned}\tag{4}$$

В граничных условиях (3) T_g - постоянная температура грунта на глубине; α_a - коэффициент теплопередачи на границе Γ_a атмосферный воздух – почва, \mathbf{n} – вектор внешней нормали к границе области G .

Численное решение уравнений (1)-(5) проводится с помощью оригинального программного пакета на языке С#, в основе которого лежит метод конечных элементов на треугольной сетке в области G . Полученная после дискретизации по пространству система обыкновенных дифференциальных уравнений решается численно по схеме Кранка-Николсона [16].

В работе [14] приведено подробное описание рассматриваемой модели и метода ее решения, проведено сравнение результатов расчетов по этой модели с имеющимися в литературе данными натурных измерений. Результаты моделирования позволили выделить переходный период и установившийся режим функционирования тоннелей метро. В течение переходного периода происходит увеличение количества тепла, аккумулированного в тепловом резервуаре между тоннелями. Установившийся режим характеризуется устойчивым годовым распределением температуры в тоннеле и окружающих грунтах.

Основными параметрами, оказывающими влияние на среднюю температуру воздуха в тоннеле, служат тепловыделения в тоннеле $q(t)$, сезонная зависимость температуры атмосферного воздуха $T_a(t)$ и кратность воздухообмена в тоннеле $\nu(t)$. Анализ уравнения (2) и результаты численного моделирования показывают, что при малых значениях кратности воздухообмена $\nu(t)$ главным членом в уравнении (1) являются тепловыделения $q(t)$, которые повышают температуру воздуха в тоннеле.

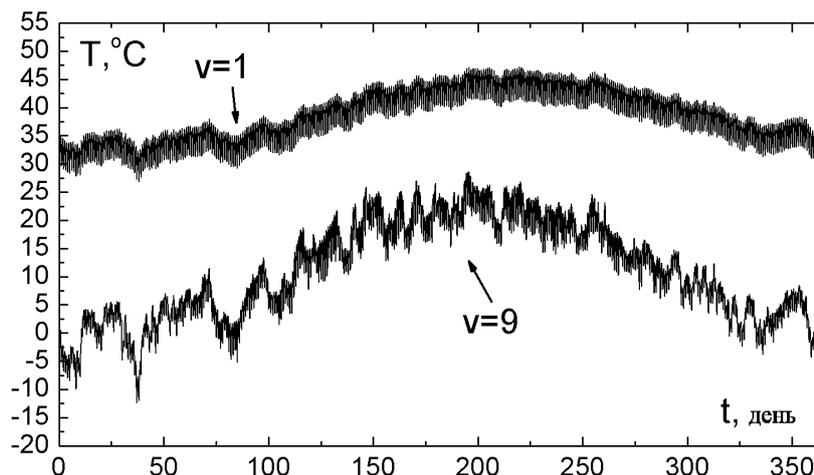


Рис. 2. Годовое распределение температуры в тоннеле московского метро при двух значениях кратности воздухообмена.

При больших значениях $\nu(t)$ вентиляция конкурирует с тепловыделениями, и при $\nu(t) \rightarrow \infty$ температура воздуха в тоннеле стремится к значениям температуры атмосферного воздуха. В качестве примера на рисунке 2 приведено распределение температуры воздуха в тоннеле для московского метрополитена и двух значений постоянной кратности воздухообмена (параметры расчетов приведены в следующем разделе). При малой скорости воздухообмена ($\nu = 1$) температура воздуха в тоннеле изменяется в пределах от 25 °C до 43 °C. При большой кратности воздухообмена ($\nu = 9$) годовое распределение температуры близко к годовому распределению температуры атмосферного воздуха.

На рисунке 3 изображено годовое распределение температуры атмосферного воздуха, использовавшееся в расчетах. Изменение режима работы вентиляции (кратности воздухообмена) в зависимости от сезонных колебаний температуры атмосферного воздуха и суточного графика тепловыделений позволяет достичь комфортных значений температуры воздуха в тоннеле. Настоящая работа посвящена обсуждению алгоритмов выбора кратности воздухообмена для поддержания оптимального температурного режима в тоннеле метро на примере московского метрополитена.

Параметры моделирования

Для численных расчетов мы использовали типовой климатический год [17], построенный по архиву значений температуры в Москве за последние 30 лет (Рис. 3). Расчет тепловыделений в тоннеле проводился в соответствии с [15] по тепловыделениям в результате торможения поездов. С учетом рекуперации энергии торможения [18], можно оценить тепловыделения в тоннеле приблизительно равными энергии торможения. Использовались параметры подвижного состава московского метрополитена и график движения поездов в течение суток [19] (Табл. 1,2). Параметры окружающих грунтов приведены в Табл. 3. Тепловыделения в тоннеле в зависимости от времени суток, рассчитанные в соответствии с [15], приведены в Табл. 4.

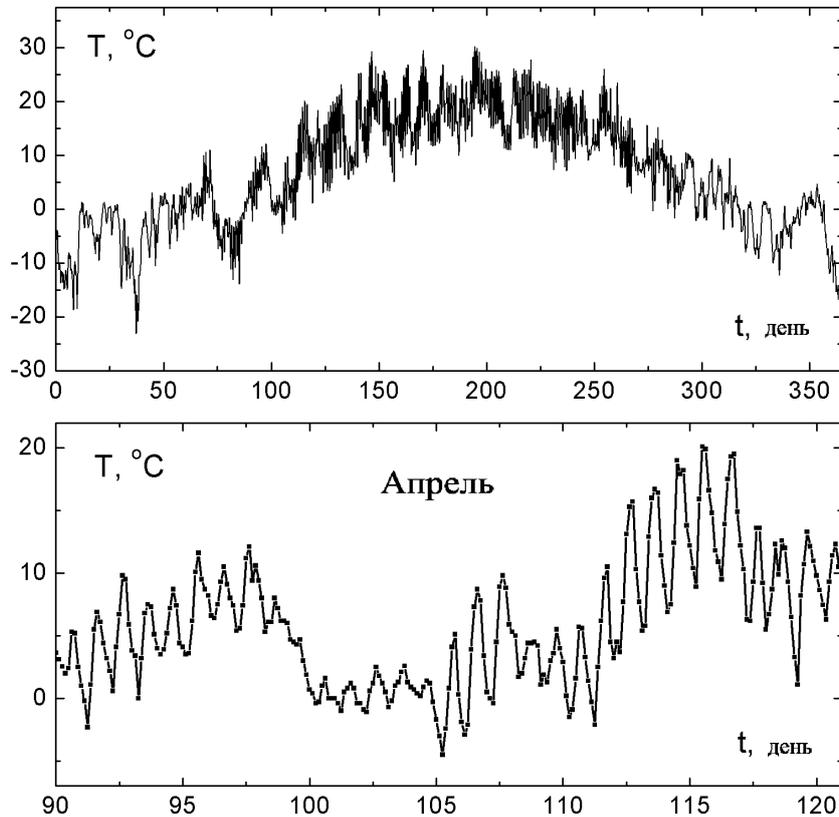


Рис. 3. Типовой климатический год.

Табл. 1. Механические и геометрические параметры модели

Параметр	Значение	Размерность
Число вагонов в поезде	8	
Вес вагона без пассажиров	36000	кг
Максимальная скорость движения поезда	22.2	м/с
Средняя скорость движения поезда	11.38	м/с
Радиус тоннеля	3	м
Длина тоннеля	1500	м
Глубина заложения тоннеля	15	м
Расстояние между тоннелями	15	м

Табл. 2. Тепловые параметры модели

Параметр	Обозначение	Значение	Размерность
Объемная теплоемкость воздуха	C_a	1.21	кДж/(м ³ °С)
Коэффициент теплопередачи на границе почва - атмосфера	α_a	20	Вт/(м ² °С)
Коэффициент теплопередачи на границе тоннель - прилегающий грунт	α_t	15	Вт/(м ² °С)
Температура грунта на глубине 15 м	T_g	10	°С

Табл. 3. Состав и параметры окружающих грунтов ($C_g = \rho C_p$)

Порода	Глубина залегания, м	ρ , кг/м ³	C_p , Дж/(м ³ °С)	λ_g , Вт/(м °С)
суглинок	0 - 5.4	1400	1500	0.7
супесь	5.4 - 13.7	1800	1100	1.1
песок средней зернистости	13.7 - 34.7	1600	800	1.4
крупнозернистый песок	34.7 - 38.3	1900	800	1.8
известняк	38.3 - 46.1	2700	900	1.3

Табл. 4. Тепловыделения в результате торможения

	Пик (7:00-9:00 и 17:00-19:00)	Полупик	Ночь (23:00- 01:00)
Интервал между поездами, мин	2	3	8
Число поездов в час	30	20	8
Число пассажиров в вагоне	176	100	50
Объемная плотность тепловыделений, W/м ³	23	16	5

Алгоритм выбора значения кратности воздухообмена

Для поддержания значений температуры воздуха в тоннеле в оптимальном диапазоне мы предложили следующий алгоритм изменения кратности воздухообмена, который позволяет в режиме реального времени проводить корректировку режима работы вентиляции.

Пусть задан конечный набор дискретных значений кратности воздухообмена $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, соответствующий различным режимам работы вентиляции, и задан интервал оптимальных температур $[T_{opt} - \Delta T, T_{opt} + \Delta T]$.

Будем рассматривать моменты времени, для которых задана температура атмосферного воздуха (типично шаг по времени представления метеорологических данных составляет 3 часа). Предполагаем, что на заданном интервале времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ (типично $\Delta t = 3$ часа) температура грунта $\tilde{T}_s(t)$, прилегающего к стенкам тоннеля, и температура наружного воздуха $T_a(t)$ не изменяются. На рассматриваемом временном интервале решаем уравнение (2) с начальным условием $T_0 = T_t(t_0)$ для каждого значения кратности воздухообмена $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$. Пусть T_1, T_2, \dots, T_N - решения уравнения (2) в момент времени $t_0 + \Delta t$, соответствующие заданной кратности воздухообмена v_n , $n = 1, \dots, N$. Если ни одно из значений T_1, T_2, \dots, T_N не принадлежит интервалу оптимальных температур, то считаем, что кратность воздухообмена на интервале $[t_0, t_0 + \Delta t]$ соответствует минимальному отклонению температуры в тоннеле от интервала оптимальных температур:

$$v(t) = v_{n^*(t_0)}, t \in [t_0, t_0 + \Delta t], \text{ где } n^*(t_0) = \operatorname{argmin}_{n=1, N} |T_n - T_{opt}|.$$

Если же одно или несколько значений v_n дает температуру из интервала оптимальных температур, выбираем v_n , для которого температура

наиболее близка к температуре, полученной для значения кратности воздухообмена с предыдущего шага:

$$v(t) = v_{n^*(t_0)}, t \in [t_0, t_0 + \Delta t],$$

где

$$n^*(t_0) = \operatorname{argmin}_{n \in \mathbb{M}} |T_n - T_p|,$$

$$p = n^*(t_0 - \Delta t), \mathbb{M} = \{n \in \mathbb{N}: |T_n - T_{opt}| < \Delta T\}.$$

Далее на интервале времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$, решается полная задача (1)-(5) с найденным значением кратности воздухообмена для данного интервала.

К очевидным достоинствам данного алгоритма относится возможность осуществлять управление вентиляцией в режиме реального времени по текущим данным температуры атмосферного воздуха и тепловыделений в тоннеле.

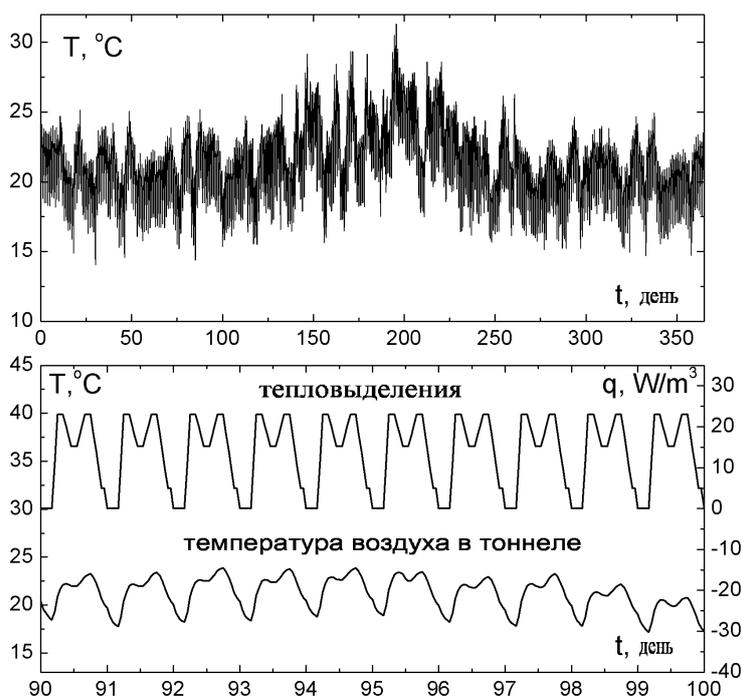


Рис. 4. Годовое распределение температуры воздуха в тоннеле при выборе кратности воздухообмена в соответствии с первым алгоритмом (верхняя панель). Зависимость температуры воздуха в тоннеле от тепловыделений (нижняя панель).

Результаты расчетов по указанному алгоритму приведены на рисунках 4-6 для интервала оптимальных температур $[13^\circ\text{C}, 23^\circ\text{C}]$ и дискретного набора кратностей воздухообмена $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Основное влияние на режим работы вентиляции оказывают сезонные колебания температуры атмосферного воздуха: кратность воздухообмена повышается при увеличении температуры атмосферного воздуха и снижается при ее

уменьшении. В летний период кратность воздухообмена достигает максимально возможных значений, снижаясь только при значительном уменьшении температуры воздуха в ночной период. В зимний период кратность теплообмена находится вблизи минимальных значений, снижаясь до минимального значения в ночной период при снижении температуры атмосферного воздуха. Влияние суточных изменений тепловыделений на изменение кратности воздухообмена оказывается существенно ниже, при этом уменьшение тепловыделений сопровождается снижением работы вентиляции только при одновременном снижении температуры атмосферного воздуха (Рис. 6).

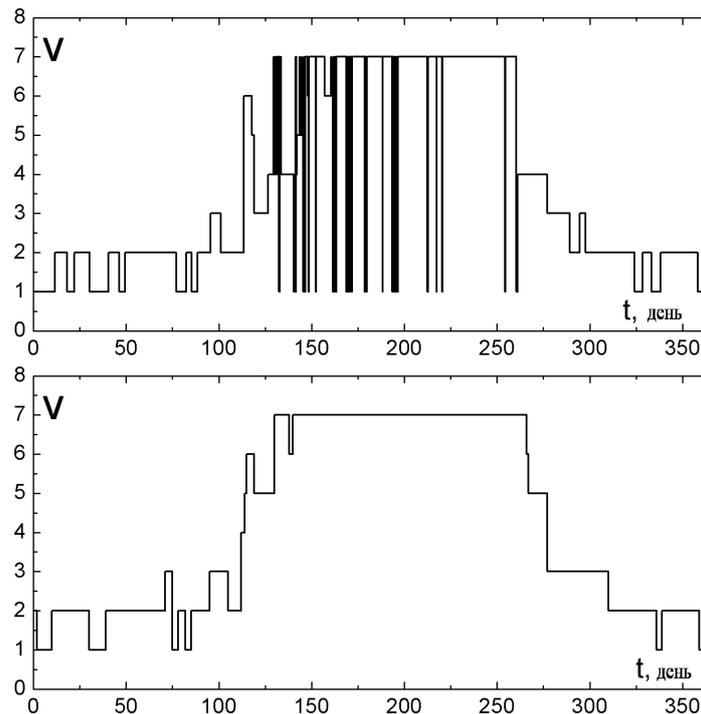


Рис. 5. Годовое распределение кратности воздухообмена, вычисленное в соответствии с первым алгоритмом (верхняя панель) и со вторым алгоритмом (нижняя панель).

Для контроля эффективности предложенного алгоритма мы использовали также еще один алгоритм, который требует большего расчетного времени по сравнению с первым алгоритмом, либо наличия информации о прогнозе температуры атмосферного воздуха и тепловыделений на ближайший интервал времени (типично сутки). Для определения оптимальной кратности воздухообмена на заданном интервале времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ вычисляется максимальная и минимальная температура воздуха в тоннеле

$$T_{t,max} = \max_{t \in [t_0, t_0 + \Delta t]} T_t(t), T_{t,min} = \min_{t \in [t_0, t_0 + \Delta t]} T_t(t).$$

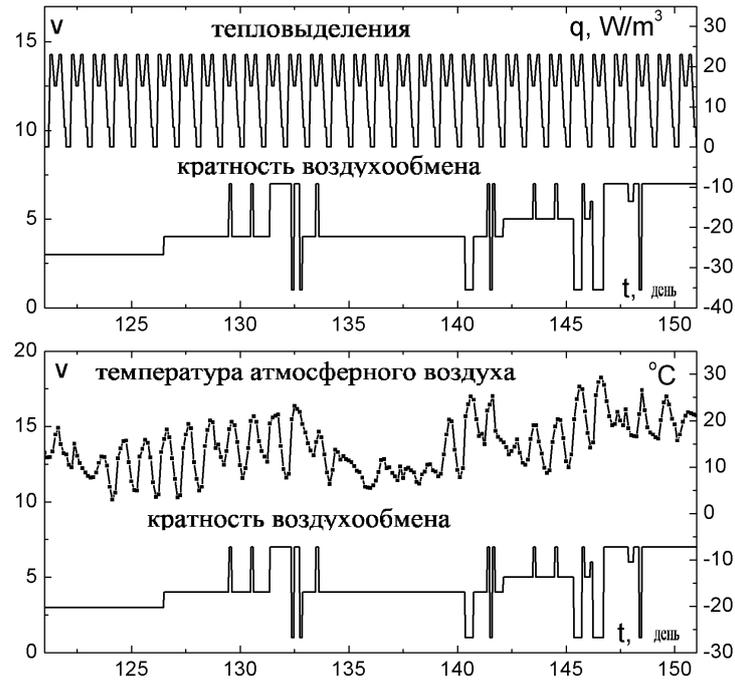


Рис. 6. Зависимость кратности воздухообмена от тепловыделений в тоннеле (верхняя панель) и от температуры атмосферного воздуха (нижняя панель) для апреля месяца.

Если оба полученных значения попадают в интервал оптимальных температур ($\{T_{t,max}, T_{t,min}\} \subset [T_{opt} - \Delta T, T_{opt} + \Delta T]$), расчет переходит на следующий интервал времени $[t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t]$. В противном случае, кратность воздухообмена уменьшается или увеличивается, в зависимости от того, максимальное или минимальное значение температуры оказывается вне интервала оптимальных температур. Далее расчет повторяется для интервала $[t_0, t_0 + \Delta t]$ с новым значением кратности воздухообмена.

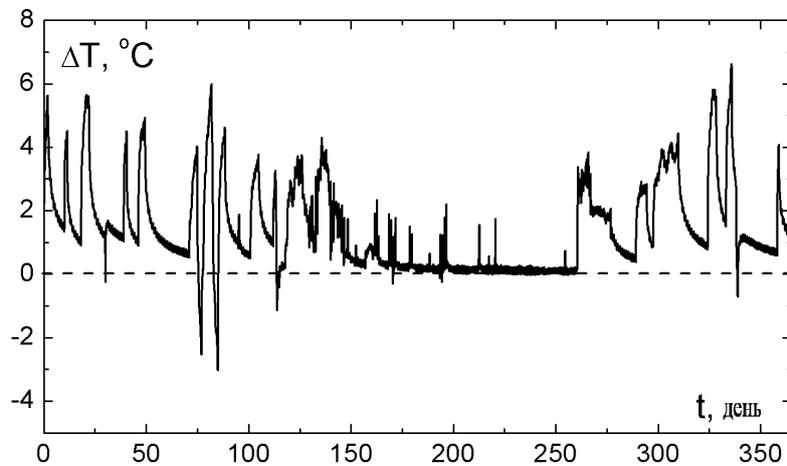


Рис. 7. Разность годовых значений температуры, вычисленных по двум алгоритмам.

В связи с тем, что на каждом шаге работы алгоритма требуется решать полную задачу (1)-(5), второй алгоритм требует больше расчетного времени по сравнению с первым алгоритмом, что может оказать существенное влияние на оперативность получения данных об оптимальных значениях кратности воздухообмена в режиме реального времени. Данный недостаток можно частично устранить, если рассматривать большие временные интервалы, например, суточные интервалы. Однако в этом случае необходим суточный прогноз о температуре атмосферного воздуха и тепловыделениях в тоннеле.

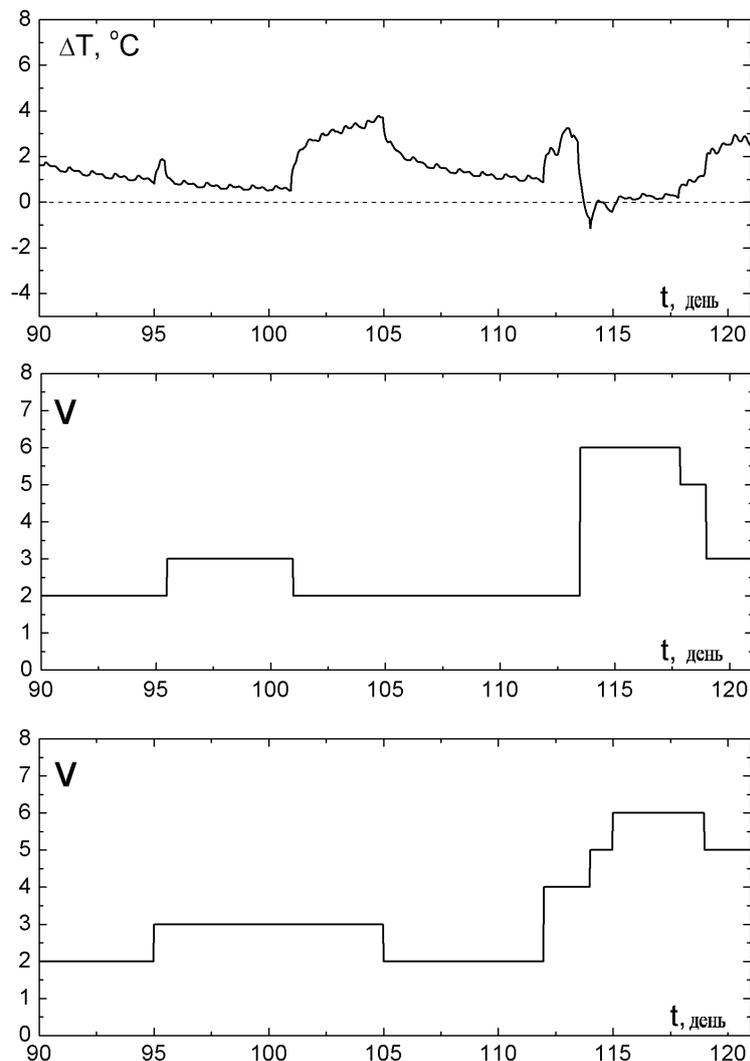


Рис. 8. Разность значений температуры в тоннеле, вычисленная по двум алгоритмам (верхняя панель), кратность воздухообмена (вторая панель – первый алгоритм, третья панель – второй алгоритм) для апреля месяца.

Результаты расчетов с использованием второго алгоритма на суточном интервале для достижения оптимальной температуры в диапазоне $[13^\circ\text{C}, 23^\circ\text{C}]$ приведены на рисунках 5,7,8.

На суточном интервале рассмотрения режим работы вентиляции не зависит от суточных колебаний интенсивности тепловыделений и определяется только сезонными колебаниями температуры атмосферного воздуха.

Сравнение результатов работы обоих алгоритмов показывает совпадение основных тенденций изменения режима работы вентиляции: основное влияние на режим работы вентиляции оказывают сезонные колебания температуры атмосферного воздуха. При этом кратность воздухообмена повышается при увеличении температуры атмосферного воздуха и снижается при ее уменьшении. Разность значений температур воздуха в тоннеле, рассчитанных с использованием двух алгоритмов, находится в основном в диапазоне $[-3^{\circ}\text{C}, 5^{\circ}\text{C}]$, при этом наблюдается небольшое превышение температуры воздуха в тоннеле, вычисленное по первому алгоритму. Разность температур обусловлена различием значений кратности воздухообмена из-за разных шагов их изменения (Рис. 8).

Заключение

На основе модели теплового баланса для моделирования температуры в парных тоннелях метрополитена проведено сравнение алгоритмов выбора параметров вентиляции для обеспечения комфортных значений температуры в московском метрополитене. Результаты моделирования, проведенные для реальных значений параметров функционирования метрополитена, показали, что предложенные алгоритмы позволяют существенно уменьшить амплитуду сезонных колебаний температуры воздуха в тоннеле метрополитена, приблизив ее значение к оптимальному. Предложен алгоритм, позволяющий в режиме реального времени по известным значениям температуры окружающего воздуха и известной интенсивности движения поездов в тоннеле определять режим вентиляции, обеспечивающий комфортную температуру в тоннеле в заданном диапазоне изменения температур.

Литература

1. Wang L., Zou X., Tao H., Song Y., Zheng J. Experimental study on evolution characteristics of the heat storage of surrounding soil in subway tunnels // *Procedia Eng.*, 2017, v. 205, p. 2728–2735.
2. Красюк А. М., Лугин И. В., Пьянкова А. Ю. Определение размеров массива грунта, подверженного тепловому влиянию подземных станций и тоннелей метрополитена // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*, 2015, № 1, с. 122-128.
3. Song H., Chen Q. Dimensionless analysis of soil temperature field of shallow subway tunnel // *Energy and Buildings*, 2022, v. 259, p. 111900.

4. Wang L., Zuo H., Kong M., Ma Ch., Mao Z., Zeng X., Yin L., Cheng J. Study on the evolution characteristics of temperature and heat storage of the soil surrounding the tunnel with years // *Energy and Buildings*, 2022, v. 257, p. 111804.
5. United States Department of Transportation, Subway Environmental Design Handbook II. Subway Environment Simulation Computer Program, Version 4, Part 1. User's Manual, 1997.
6. IDA Tunnel, Cooling the Tube Software Comparison. EQUA Simulation AB, Technical Report, 2006.
7. Wang Y., Li X. STESS: Subway thermal environment simulation software // *Sustain. City. Soc.*, 2018, v. 38, p. 98–108.
8. Guo J., Li A., Zhang C., Li J., Che J., Xiong J., Jiao X. Modeling effective heat transfer and ventilation in deeply buried underground tunnels // *International Journal of Thermal Sciences*, 2023, v. 184, p. 107949.
9. Sun T., Luo Z., Chay T, An analytical model to predict the temperature in subway-tunnels by coupling thermal mass and ventilation // *J. Build. Eng.*, 2021, v.44, p. 102564.
10. Sadokierski S., Thiffeault J.-L. Heat transfer in underground rail tunnels // 2007, 12, <https://arxiv.org/pdf/0709.1748.pdf> arXiv:0709.1748v1 [physics.flu-dyn].
11. Jain P.K., Rizwan-uddin S.S. Analytical solution to transient asymmetric heat conduction in a multilayer annulus // *J. Heat Transfer*, 2008, v. 131, p. 011304-011304.
12. Zhu S., Cheng J., Song W., Borowski M., Zhang Y., Yu B., Wang Y., Qi Ch., Tukkaraja P., Hua G., Xu Y., Ghosh A., Wang Ch., Peng Y. Using seasonal temperature difference in underground surrounding rocks to cooling ventilation airflow: A conceptual model and simulation study // *Energy Sci. Eng.*, 2022, v. 8, p. 3457–3475.
13. Peltier M., Rotta Loria A.F., Lepage L., Garin E., Laloui L. Numerical investigation of the convection heat transfer driven by airflows in underground tunnels // *Appl. Therm. Eng.*, 2019, v.159, p.113844.
14. Vasilyev G. P., Peskov N. V., Lysak T. M. Heat balance model for long-term prediction of the average temperature in a subway tunnel and surrounding soil // *Intern. Journal of Thermal Sciences*, 2022, v. 172, p. 107344.
15. Ampofo F., Maidment G., Missenden J. Underground railway environment in the UK. Part 2: Investigation of heat load // *Appl. Therm. Eng.*, 2004, v. 24, p. 633–645.
16. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type // *Proc. Camb. Phil Soc.*, 1947, v. 43, p. 50–67.

17. International standard ISO 15927-5:2004, Hygrothermal performance of Buildings - Calculation and presentation of climatic data Part 5: Data for design heat load for space heating. <https://www.iso.org/standard/35563.html>
18. Куликов К.И., Спиридонов Е.А., Пономарев К.Е., Лангеман Э.Г. Влияние интервала движения на вероятность межпоездного обмена энергией рекуперации в метрополитене // Доклады АН ВШ РФ, 2017, т.2, № 2 (35), с. 53-60.
19. https://ru.wikipedia.org/wiki/Подвижной_состав_Московского_метрополитена; https://ru.wikipedia.org/wiki/Московский_метрополитен.