

*Н.Б.Викторова¹, Ю.И. Ожигов², Н.А. Скворода³,
К.Н.Скурат⁴*

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНОГО КВАНТОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ДЖЕЙНСА- КАММИНГСА*

Введение

Принципиальная особенность квантовой электродинамики (КЭД) состоит в колоссальной скорости роста вычислительных ресурсов, необходимых для моделирования процессов взаимодействия вещества и света в общем случае, представляющем практический интерес. В аналитическом виде решены только простейшие, модельные задачи, в которых один заряд взаимодействует с полем. Корректность КЭД (возможность перенормировок зарядов для нейтрализации расходимостей рядов амплитуд фундаментальных процессов) доказана Н.Н.Боголюбовым в 1955 году только для случая одного заряда, взаимодействующего с полем. Поэтому особую важность представляют математические модели, описывающие взаимодействие зарядов и поля в возможно более компактном виде. Для компьютерного моделирования необходимы вообще только конечномерные модели КЭД.

Такие модели появились в конце 60-х годов 20 века: модель Джейнса-Каммингса и Тависа-Каммингса, описывающие взаимодействие нескольких двухуровневых атомов с одномодовым полем в оптической полости. В данной работе приводится точное аналитическое решение модели Джейнса-Каммингса для неидеальной полости, допускающей вылет фотона. Ценность такого решения в том, что оно описывает основной канал декогерентности, возникающей из-за вылета фотона за пределы полости. Такое описание декогерентности важно для теории квантового компьютера, для которого именно декогерентность представляет основную трудность.

Описание модели

Рассматривается резонатор, содержащий один атом, в рамках модели Джейнса-Каммингса с приближением вращающейся волны (RWA).

¹ РГГУ, ИИНТБ, кафедра ФПМ, nbvictorova@list.ru

² МГУ, ВМК, кафедра СКВ, ozhigov@cs.msu.su

³ МГУ, ВМК, кафедра СКВ, Chalkerx@gmail.com

⁴ РГГУ, ИИНТБ, кафедра фундаментальной и прикладной математики lorinsinho@mail.ru

* Работа частично поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, грант а-18-01-00695.

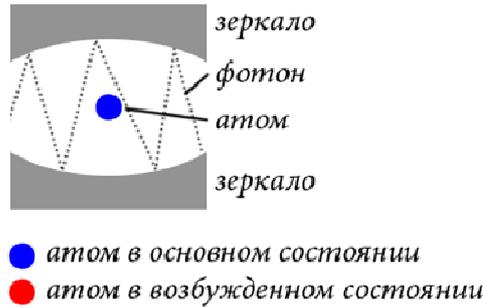


Рис.1. JCM-модель с одним атомом и фотоном

Имеем двухкубитную систему $|ph, at\rangle$, в которой за состояние атома отвечает правый кубит, а за состояние фотона – левый:

- атом в такой модели может находиться в основном состоянии (ground state) и в возбужденном состоянии (excited state);
- фотон либо есть в такой системе, либо его нет.

Такая система имеет 3 базисных состояния: $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|00\rangle$. На рис.2-4 изображены оптические резонаторы в данных состояниях.

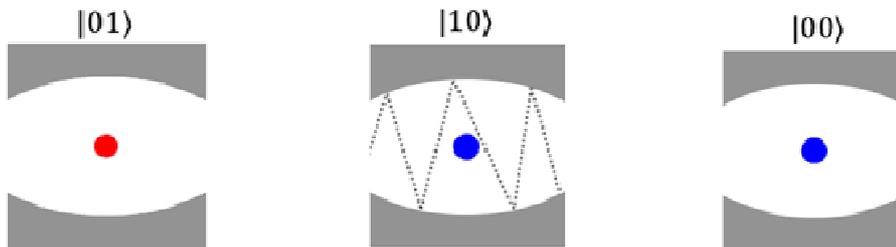


Рис.2-4.

- $|01\rangle$ – атом в возбуждённом состоянии, т.е. он поглотил фотон;
 $|10\rangle$ – атом в основном состоянии, фотон в полости;
 $|00\rangle$ – атом в основном состоянии, фотона вылетел.

Зададим базисные состояния модели векторами

$$|10\rangle = (1, 0, 0)^t, |01\rangle = (0, 1, 0)^t, |00\rangle = (0, 0, 1)^t.$$

Договоримся считать, что в начальный момент времени $t=0$ атом находится с вероятностью 1 в состоянии возбуждения, т.е. вся система находится в базисном состоянии $|01\rangle$. Определим a^+ , a – операторы рождения и уничтожения фотона, действующие на состояние с n фотонами формулами $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$. Тогда оператор a^+a соответствует количеству фотонов и действует на их состояния в виде $a^+a|n\rangle = n|n\rangle$. Аналогично в однокубитной системе при $n=0, 1$ действуют и

σ^+ , σ – операторы возбуждения и уничтожения возбуждения атомов. Опишем все процессы, происходящие в системе.

1) Фотон поглощается атомом. За это отвечает оператор уничтожения фотона a (применяется к первому кубиту, отвечающему за фотон):

$$\begin{cases} a|10\rangle = |00\rangle \\ a|01\rangle = 0 \\ a|00\rangle = 0 \end{cases} \text{ и получаем матрицу оператора } a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, когда атом испускает фотон, находим матрицу оператора рождения фотона a^+ :

$$\begin{cases} a^+|10\rangle = 0 \\ a^+|01\rangle = 0 \\ a^+|00\rangle = |10\rangle \end{cases}, \quad a^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Атом переходит из возбужденного состояния в основное. За это отвечает оператор уничтожения возбуждения σ (применяется ко второму кубиту, отвечающему за атом). Аналогично, когда атом переходит из спокойного состояния в возбужденное, находим матрицу оператора возбуждения σ^+ .

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор полной энергии (гамильтониан) данной модели H имеет вид

$$H = H_{ph} + H_{at} + H_{int},$$

где $H_{ph} = \hbar\omega_{ph} a^+a$ – энергия фотона, $H_{at} = \hbar\omega_{at} \sigma^+\sigma$ – энергия атома, $H_{int} = g(a^+\sigma + a\sigma^+)$ – энергия взаимодействия атома и фотона. В данном работе исследования проводятся при условиях равенства частоты фотона и атома $\omega_{ph} = \omega_{at} = \omega$ и $\frac{g}{\omega} \ll 1$, такие условия называются приближением вращающейся волны (RWA), g – частота Раби, характеризующая взаимодействие атома с фотоном, \hbar – постоянная Дирака ($\approx 10^{-27}$ эрг·сек). Тогда

$$H = \hbar\omega a^+a + \hbar\omega \sigma^+\sigma + g(a^+\sigma + a\sigma^+) = \begin{pmatrix} \hbar\omega & g & 0 \\ g & \hbar\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Динамика квантовой системы описывается с помощью уравнения Шредингера. В общем случае оно имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H |\psi(t)\rangle,$$

где $|\psi(t)\rangle$ – волновой вектор. Уравнением Шредингера для матрицы плотности является уравнение $i\hbar \dot{\rho}(t) = [H, \rho]$, где $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ – оператор плотности, отвечающий чистому состоянию $|\psi\rangle$, $[H, \rho] = H\rho - \rho H$ – коммутатор.

Уравнение Шредингера описывает унитарную эволюцию квантовых состояний, тогда как уравнение Линдблада для матрицы плотности ρ описывает неунитарную (необратимую) эволюцию системы. Оно записывается в виде

$$i\hbar \dot{\rho}(t) = [H, \rho] + i\mathcal{L}(\rho), \quad \mathcal{L}(\rho) = \gamma \left(A\rho A^* - \frac{1}{2}\{\rho, A^*A\} \right), \quad (1)$$

где A – оператор Линдблада, в данном случае, оператор уничтожения фотона a , сопряжённый ему оператор A^* здесь оператор рождения фотона a^+ в полости, $\mathcal{L}(\rho)$ – оператор декогерентности, описывающий контакт нашей системы с внешней средой, $\{A, B\} = AB + BA$ – антикоммутатор, γ – интенсивность.

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} a(t) & d(t) & f(t) \\ \overline{d(t)} & b(t) & e(t) \\ \overline{f(t)} & \overline{e(t)} & c(t) \end{pmatrix}, \quad \rho(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она является эрмитовой, т.е. элементы $a(t), b(t), c(t) \in R$, где $a(t)$ – вероятность населенности резонатора, $b(t)$ – вероятности возбуждения атома, $c(t)$ – вероятность населённости стока. Мы имеем:

$$\text{tr}(\rho(t)) = a(t) + b(t) + c(t) = 1.$$

В данной матрице находим её элементы. Будем считать, что $f(t) = e(t) = 0$. Функция $d = d_1 + id_2$ и

$$[H, \rho] = H\rho - \rho H = \begin{pmatrix} g(\bar{d} - d) & g(b - a) & 0 \\ g(a - b) & g(d - \bar{d}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2igd_2 & g(b - a) & 0 \\ g(a - b) & 2igd_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}(\rho) = \gamma \left(A\rho A^* - \frac{1}{2}\{\rho, A^*A\} \right) = \begin{pmatrix} -a\gamma & -\frac{(d_1 + id_2)\gamma}{2} & 0 \\ -\frac{(d_1 - id_2)\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\gamma \end{pmatrix}.$$

Возможны случаи $\gamma = 0$, когда взаимодействия между внешней средой и резонатором не происходит и, соответственно, $\mathcal{L}(\rho) = 0$ и $\gamma \neq 0$. Рассмотрим их ниже.

Рассмотрим случай $\gamma = 0$. Стока нет. Исходя из этого, уравнение Линдблада (1) преобразуется в уравнение Шредингера для матрицы плотности $i\hbar\dot{\rho}(t) = [H, \rho]$.

$$i\hbar\dot{\rho} = \begin{pmatrix} i\hbar\dot{a} & i\hbar\dot{d} & 0 \\ i\hbar\dot{\bar{d}} & i\hbar\dot{b} & 0 \\ 0 & 0 & i\hbar\dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2igd_2 & g(b-a) & 0 \\ g(a-b) & 2igd_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{2g}{\hbar}d_2 \\ \dot{b} = \frac{2g}{\hbar}d_2 \\ \dot{d}_1 = 0 \\ \dot{d}_2 = \frac{g}{\hbar}a - \frac{g}{\hbar}b \\ \dot{c} = 0 \end{cases}$$

с начальными условиями $a(0) = 0, b(0) = 1, d_1(0) = 0, d_2(0) = 0, c(0) = 0$.

Имеем решение данной задачи Коши

$$\begin{cases} a(t) = \sin^2\left(\frac{gt}{\hbar}\right) \\ b(t) = \cos^2\left(\frac{gt}{\hbar}\right) \\ c(t) = 0 \\ d_2(t) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2gt}{\hbar}\right) \\ d_1(t) = 0 \end{cases}.$$

Видно, что в момент времени $t = 0$ в резонаторе атом находится в возбужденном состоянии ($a(0) = 0, b(0) = 1$). Вероятности $a(t) + b(t) = 1, c(t) = 0$. В результате при $\gamma = 0$ происходят рабиевские осцилляции внутри резонатора, фотон не вылетает за пределы резонатора.

Далее рассматриваем случай, когда интенсивность $\gamma \neq 0$. Сток есть. В этом случае записываем уравнение (1). Учитывая, что $d = d_1 + id_2, \bar{d} = d_1 - id_2, \dot{d} = \dot{d}_1 + i\dot{d}_2, \dot{\bar{d}} = \dot{d}_1 - i\dot{d}_2$, имеем

$$\begin{aligned}
i\hbar\dot{\rho} &= \begin{pmatrix} i\hbar\dot{a} & i\hbar\dot{d} & 0 \\ i\hbar\dot{d} & i\hbar\dot{b} & 0 \\ 0 & 0 & i\hbar\dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\hbar\dot{a} & i\hbar\dot{d}_1 - \hbar\dot{d}_2 & 0 \\ i\hbar\dot{d}_1 + \hbar\dot{d}_2 & i\hbar\dot{b} & 0 \\ 0 & 0 & i\hbar\dot{c} \end{pmatrix} = [H, \rho] + i\mathcal{L}(\rho) = \\
&= \begin{pmatrix} -2igd_2 - ia\gamma & g(b-a) - id_1\frac{\gamma}{2} + d_2\frac{\gamma}{2} & 0 \\ g(a-b) - id_1\frac{\gamma}{2} - d_2\frac{\gamma}{2} & 2igd_2 & 0 \\ 0 & 0 & ia\gamma \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Приравниваем левую и правую части и после упрощений получаем систему дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\gamma}{\hbar}a - \frac{2g}{\hbar}d_2 \\ \dot{b} &= \frac{2g}{\hbar}d_2 \\ \dot{d}_1 &= -\frac{\gamma}{2\hbar}d_1 \\ \dot{d}_2 &= \frac{g}{\hbar}a - \frac{g}{\hbar}b - \frac{\gamma}{2\hbar}d_2 \\ \dot{c} &= \frac{\gamma}{\hbar}a \end{aligned} \right. \quad (2)$$

с начальными условиями $a(0)=0, b(0)=1, d_1(0)=0, d_2(0)=0, c(0)=0$. Ясно, что $d_1(t)=0$. Переходим от (2) к системе (3) с начальными условиями $a(0)=0, b(0)=1, d_2(0)=0$.

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\gamma}{\hbar}a & -\frac{2g}{\hbar}d_2 \\ \dot{b} &= & \frac{2g}{\hbar}d_2 \\ \dot{d}_2 &= \frac{g}{\hbar}a - \frac{g}{\hbar}b & -\frac{\gamma}{2\hbar}d_2 \end{aligned} \right. \quad (3)$$

Матрица правой части этой системы имеет вид $A = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{\hbar} & 0 & -\frac{2g}{\hbar} \\ 0 & 0 & \frac{2g}{\hbar} \\ \frac{g}{\hbar} & -\frac{g}{\hbar} & -\frac{\gamma}{2\hbar} \end{pmatrix}$.

Находим собственные значения: $\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2\hbar}$; $\lambda_{2,3} = -\frac{\gamma}{2\hbar} \pm \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}$.

Далее решение распадается на 3 случая:

1. Комплексные собственные значения при $\gamma < 4g$. В этом случае они принимают вид $\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2\hbar}$; $\lambda_{2,3} = -\frac{\gamma}{2\hbar} \pm \frac{i}{2\hbar} \sqrt{16g^2 - \gamma^2}$.

Решение задачи Коши при $\gamma < 4g$:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) = \frac{8g^2 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}}}{16g^2 - \gamma^2} \left(1 - \cos\left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar}\right) \right) \\ b(t) = \frac{e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}}}{16g^2 - \gamma^2} \left(8g^2 - (\gamma^2 - 8g^2) \cos\left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar}\right) + \gamma\sqrt{16g^2 - \gamma^2} \sin\left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar}\right) \right) \\ c(t) = 1 - \frac{e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}}}{16g^2 - \gamma^2} \left(16g^2 - \gamma^2 \cos\left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar}\right) + \gamma\sqrt{16g^2 - \gamma^2} \sin\left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar}\right) \right) \\ d_2(t) = \frac{2ge^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}}}{16g^2 - \gamma^2} \left(-\gamma + \gamma \cos\left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar}\right) - \sqrt{16g^2 - \gamma^2} \sin\left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar}\right) \right) \\ d_1(t) = 0 \end{array} \right.$$

2. Кратные собственные значения (кратность 3) при $\gamma = 4g$. Тогда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{\gamma}{2\hbar}.$$

Решение задачи Коши при $\gamma = 4g$ имеет вид:

$$a(t) = \frac{\gamma^2}{16\hbar^2} t^2 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}}, \quad b(t) = \left(1 + \frac{\gamma}{4\hbar} t\right)^2 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}}, \quad c(t) = 1 - \left(1 + \frac{\gamma}{2\hbar} t + \frac{\gamma^2}{8\hbar^2} t^2\right) e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}},$$

$$d_2(t) = -\frac{\gamma}{4\hbar} t \left(1 + \frac{\gamma}{4\hbar} t\right) e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}}$$

3. Действительные некрратные собственные значения при $\gamma > 4g$.

Здесь $\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2\hbar}$; $\lambda_{2,3} = -\frac{\gamma}{2\hbar} \pm \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}$. Решение задачи Коши при $\gamma > 4g$:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) = \frac{4g^2}{\gamma^2 - 16g^2} e^{-\frac{\gamma t}{2h}} \left(-2 + e^{\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2h}} + e^{-\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2h}} \right) \\ b(t) = \frac{1}{4(\gamma^2 - 16g^2)} e^{-\frac{\gamma t}{2h}} \left(-32g^2 + (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16g^2})^2 e^{\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2h}} + (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 16g^2})^2 e^{-\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2h}} \right) \\ c(t) = 1 + \frac{1}{2(\gamma^2 - 16g^2)} e^{-\frac{\gamma t}{2h}} \left(32g^2 - (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}) \gamma e^{\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2h}} - (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}) \gamma e^{-\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2h}} \right) \\ d_2(t) = \frac{g}{\gamma^2 - 16g^2} e^{-\frac{\gamma t}{2h}} \left(2\gamma - (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}) e^{\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2h}} - (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}) e^{-\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2h}} \right) \\ d_1(t) = 0 \end{array} \right.$$

Аналитическое решение задачи получено.

Проводим численный эксперимент, чтобы показать поведение динамики населенности резонатора, динамики вероятности возбуждения атома и динамику населенности стока $a(t), b(t), c(t)$ при различных значениях параметров γ, g . Постоянную Дирака \hbar для удобства везде приравняем к 1. Сначала рассмотрим решения всех наших систем при $0 < \gamma < 4g; \gamma = 4g; \gamma > 4g$ (при $\gamma = 0$ происходят рабиевские осцилляции атома с фотоном, который не вылетает из стока). Берём $g = 1$ и наблюдаем изменения графиков при различных γ : $0 < \gamma < 4g$ (рис.5-10); $\gamma = 4g$ (рис.11); $\gamma > 4g$ (рис.12-15). Графики построены при помощи Wolfram Mathematica 10.0.

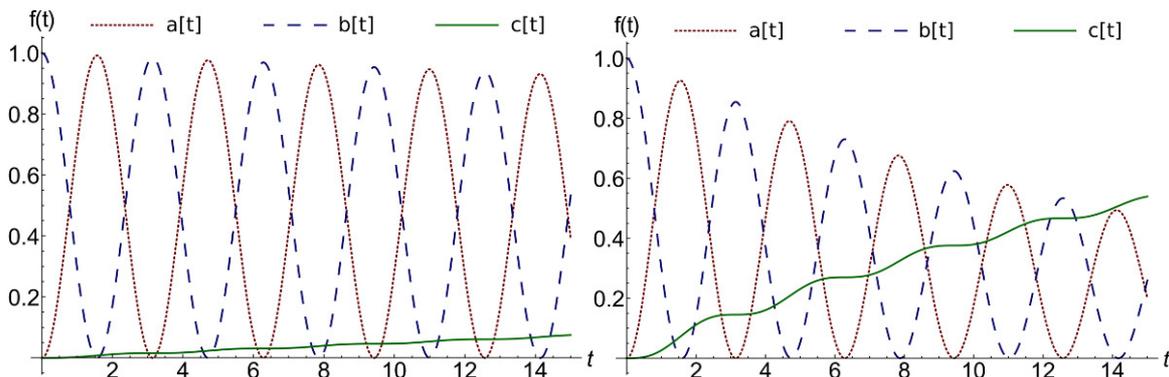


Рис. 5-6 Графики вероятностей при $\gamma = 0,01, g = 1; \gamma = 0,1, g = 1$

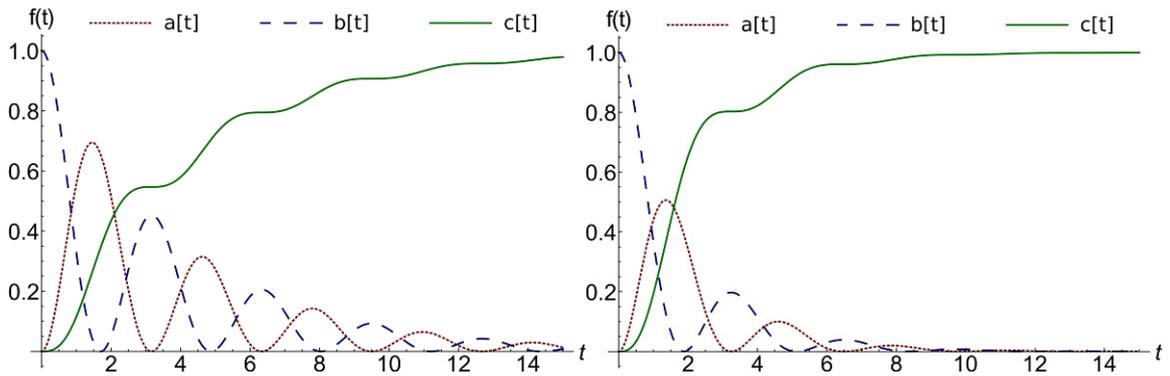


Рис. 7-8 Графики вероятностей при $\gamma=0,5, g=1$; $\gamma=1, g=1$

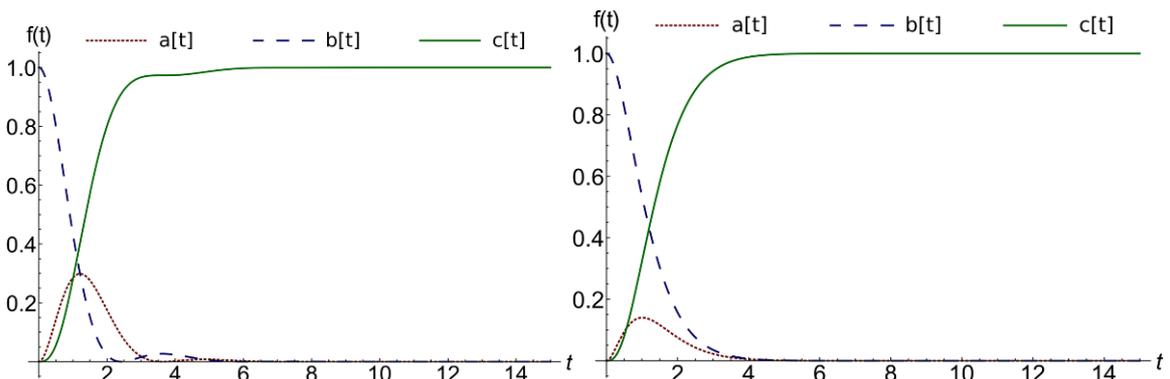


Рис. 9-10 Графики вероятностей при $\gamma=2, g=1$; $\gamma=3,9, g=1$

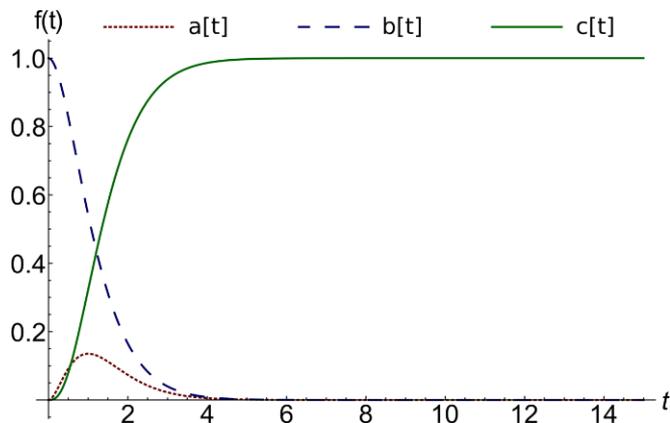


Рис. 11 Графики вероятностей при $\gamma=4, g=1$ (случай кратных корней)

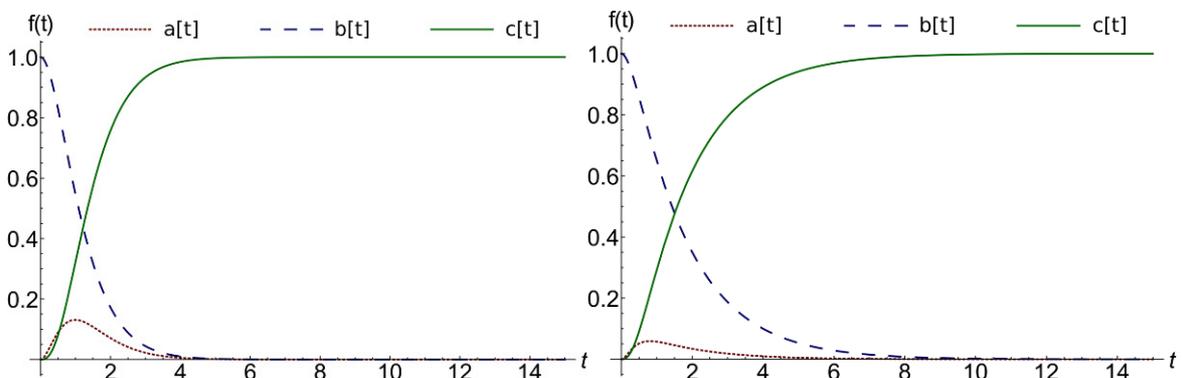


Рис. 12-13 Графики вероятностей при $\gamma=4,1, g=1$; $\gamma=7, g=1$

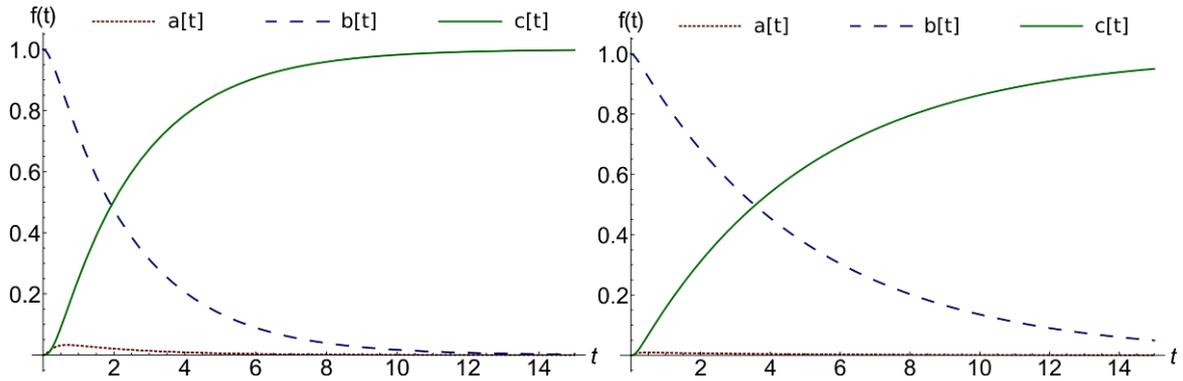


Рис. 14-15 Графики вероятностей при $\gamma=10, g=1$; $\gamma=20, g=1$

При $0 < \gamma < 4g$ и малых γ , после испускания атомом фотона, тот некоторое время находится в резонаторе (естественно, отражаясь многократно от его зеркал), затем вылетает, $a(t), b(t)$ представляют собой затухающие к 0 осцилляции (рис.5-8). С увеличением γ , количество осцилляций уменьшается (рис.9-10), фотон всё меньше находится в резонаторе после своего рождения. При $\gamma=4g$ осцилляции прекращаются полностью (рис.11). При $\gamma > 4g$, вероятность возбуждения атома падает, вероятность нахождения в стоке растёт, причём после вылета фотон не задерживается в резонаторе (рис.12-13). С увеличением γ (рис.14-15), динамика вероятности перехода фотона из резонатора в сток становится более медленной. Данный эффект называется quantum bottleneck[5].

Теперь рассмотрим несколько графиков при постоянном $\gamma=0,01$ и увеличении g (значение которого ограниченное из-за RWA-приближения).

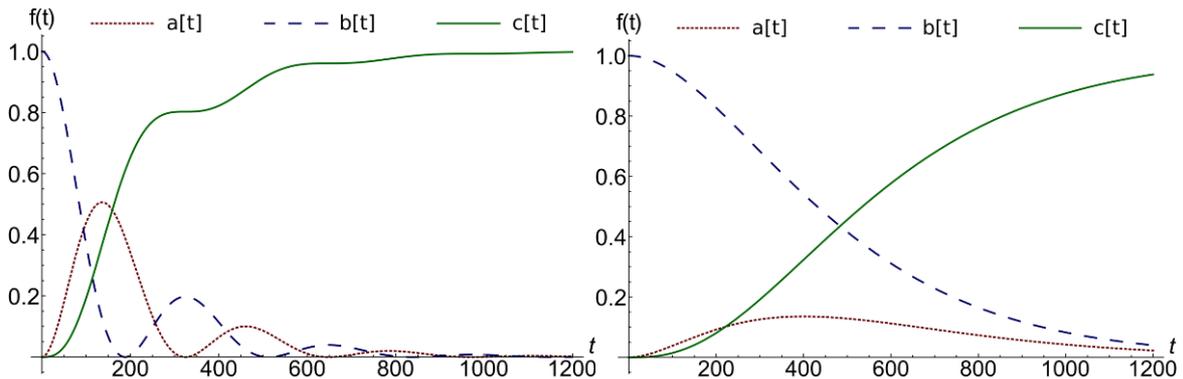


Рис. 16-17 Графики вероятностей при $\gamma=0,01, g=0,01$; $\gamma=0,01, g=0,0025$
(кратные)

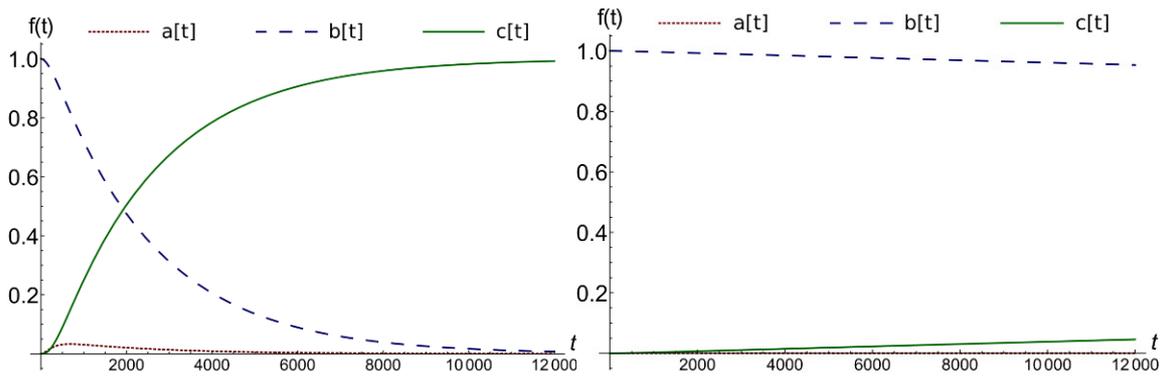


Рис. 18-19 Графики вероятностей при $\gamma=0,01, g=0,001$; $\gamma=0,01, g=0,0001$ (масштаб по сравнению с рис.16-17 увеличен для удобства наблюдения динамики)

При $\gamma \gg g$ (рис.18-19) заметно, что процесс вылета фотона из полости занимает чрезвычайно большое время, при уменьшении g . Это обусловлено тем, что энергия взаимодействия между атомом и фотоном крайне мала, атом в возбуждённом состоянии долгое время не может испустить фотон.

Заключение

Мы выяснили точный характер взаимодействия двухуровневого атома со светом в неидеальном резонаторе, допускающем вылет фотона, то есть в условиях декогерентности. Найденная нами особая точка в области значения параметров: сила взаимодействия атома со светом и интенсивность утечки фотона из резонатора, является границей разных типов динамики населенности основного состояния атома. Разный характер этой динамики можно, в принципе, проверить экспериментально. Такой эксперимент весьма дорог, так как стенки оптической полости делаются из сверхпроводящего материала и функционирует резонатор при температуре жидкого гелия. Разработанный нами метод позволяет предсказать квантовые эффекты этой простой системы, которые можно сравнить с опытными данными. Эта возможность ценна для разработки квантовых гейтов для ограниченных квантовых компьютеров на фотонных состояниях: одной из самых перспективных технологий квантовых вычислителей.

Литература

1. Викторова Н.Б., Ожигов Ю.И., Сковорода Н.А. Квантовые возрождения нерабиевского типа в модели Джейнса-Каммингса. Теоретическая и математическая физика. Москва. Наука. 2016. Том 189, N2, стр.312-320.

2. E.T. Jaynes, F.W.Cummings, «Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser».Proc. IEEE, 51:1 (1963), стр. 89-109.

3. Ожигов Ю.И., Скворода Н.А. Проводимость атомных возбуждений в системе оптических полостей. Математическое моделирование, том 29, № 12, с. 123-134