

Вычислительная математика и математическое обеспечение ЭВМ

*Сборник трудов факультета
вычислительной математики
и кибернетики*

Под редакцией А. Н. Тихонова,
А. А. Самарского

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1985

Из содержания 1985г.,

<i>В. И. Дмитриев, Э. А. Федорова.</i> Обратная задача частотного электромагнитного зондирования слоистых сред.	159
<i>В. И. Дмитриев, Н. В. Алексеева.</i> Об одном методе решения обратной задачи магнитотеллурического зондирования.	165
<i>В. И. Дмитриев, Н. И. Несмеянова.</i> Метод численного исследования квазистационарного поля над слоистой средой с осесимметричным поднятием.	176
<i>Е. В. Захаров, Н. И. Несмеянова.</i> Метод решения задач дифракции электромагнитных волн на телах вращения, расположенных в слоистой среде.	182
<i>Е. В. Захаров, И. Г. Ярмахов.</i> Численное исследование моделей многоэлектродного зондирования скважин.	198
<i>Е. В. Захаров, Е. В. Никитина.</i> Об одномерных интегродифференциальных уравнениях II рода в задачах дифракции электромагнитных волн.	211

IV. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ГЕОФИЗИКИ

В. И. ДМИТРИЕВ, Э. А. ФЕДОРОВА

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ЧАСТОТНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ СРЕД

В разведочной геофизике используется метод частотного зондирования (ЧЗ) слоистых проводящих сред, основанный на изучении зависимости от частоты электромагнитного поля, возбуждаемого электрическим диполем, заземленным на поверхности Земли. Измеряемое поле трансформируется в кажущееся сопротивление:

$$\rho_k(\omega) = A[\sigma(z), \omega, r], \quad (1)$$

где ω — частота изменения поля, r — разнос, расстояние от источника до точки наблюдения, $\sigma(z)$ — распределение электропроводности с глубиной, A — нелинейный оператор, действующий на $\sigma(z)$ и зависящий от параметров ω и r . Оператор прямой задачи A хорошо известен [1] и представляет собой преобразование Ханкеля от функции, являющейся решением краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, коэффициентом которого является функция $\sigma(z)$. В настоящее время разработаны эффективные алгоритмы [2—3], позволяющие достаточно быстро проводить на ЭВМ расчеты $\rho_k(\omega, r)$. Это позволило перейти к созданию на основе метода регуляризации [4] алгоритма решения обратной задачи частотного зондирования слоистых сред.

Анализ зависимости кажущегося сопротивления $\rho_k(\omega, r)$ от частоты $\omega \in [\omega_n, \omega_b]$ показал, что при решении обратной задачи удобнее пользоваться функцией $R(\tau, r)$, которая представляет собой логарифм от относительного кажущегося сопротивления в зависимости от логарифма относительной частоты:

$$R(\tau, r) = \lg \frac{\rho_k(\omega, r)}{\rho_0}; \quad \tau = \lg \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (2)$$

где ρ_0 — выбранное нормировочное удельное сопротивление среды, а ω_0 — нормировочная частота. В соответствии (1—2) мы имеем прямую задачу для вычисления функции $R(\tau)$ в виде

$$R(\tau, r) = B[\sigma(z), \tau, r]; \quad \tau \in [\tau_n, \tau_b]. \quad (3)$$

Введение функции $R(\tau, r)$ и переменной τ позволяет более равнозначно учитывать все участки кривой зондирования и использовать в качестве меры близости вычисляемой функции $R(\tau, r)$

от экспериментально полученной $R^3(\tau, r)$ квадрат нормы в пространстве L_2 .

Так как экспериментальные данные получаются с некоторой погрешностью и, кроме того, модель слоистой среды является приближенной, то мы можем считать

$$\|B[\sigma(z), \tau, r] - R^3(\tau, r)\|_{L_2(\tau_H, \tau_B)}^2 \leq \delta. \quad (4)$$

К сожалению, в δ входит не только погрешность измерений (хорошо известная), но и погрешность приближения модели (известная плохо). Условие (4) выполняется для некоторого множества функций Σ_δ . Множество Σ_δ называют множеством возможных решений обратной задачи. Если задача была бы устойчивой, то любое $\sigma(z) \in \Sigma_\delta$ можно было бы считать приближенным решением обратной задачи. В нашем случае обратная задача неустойчива, и поэтому во множестве Σ_δ существуют $\sigma(z)$, сильно отличающиеся друг от друга. Для получения приближенного решения обратной задачи необходим критерий отбора решения из множества возможных решений Σ_δ .

В качестве такого критерия наиболее удобно брать квадрат нормы в L_2 отклонения решения $\sigma(z)$ от некоторого гипотетического распределения электропроводности $\sigma_0(z)$, выбранного из априорной информации о строении изучаемого района:

$$\Omega[\sigma(z)] = \int_0^H |\sigma(z) - \sigma_0(z)|^2 dz, \quad (5)$$

где H — глубина исследования. Зная критерий отбора, мы можем в качестве приближенного решения обратной задачи взять такое распределение электропроводности $\tilde{\sigma}(z)$, на котором достигается точная нижняя грань критерия отбора:

$$\Omega[\tilde{\sigma}(z)] = \inf_{\sigma(z) \in \Sigma_\delta} \Omega[\sigma(z)]. \quad (6)$$

Основная трудность поставленной задачи заключается в трудности конструктивного построения множества Σ_δ из условия (4).

Удобнее всего поступать следующим образом: из априорных сведений о строении заданного района построить достаточно узкий класс решений, заданный параметрически $\Sigma_{\bar{p}}$, а затем на этом классе минимизировать сглаживающий функционал:

$$\Phi[\sigma(z)] = \|B[\sigma(z), \tau, r] - R^3(\tau, r)\|_{L_2(\tau_1, \tau_2)}^2 + \alpha \Omega[\sigma(z)], \quad (7)$$

где α — параметр регуляризации. Из условия

$$\Phi[\sigma_\alpha(z)] = \inf_{\sigma(z) \in \Sigma_{\bar{p}}} \Phi[\sigma(z)] \quad (8)$$

находим решение $\sigma_\alpha(z)$, зависящее от параметра регуляризации α . Перебором параметра α находим $\alpha_0 = \max \alpha$, при котором выполняется условие (4). За приближенное решение обратной за-

дачи принимается регуляризованное решение при α_0 , т. е. $\sigma(z) = \sigma_{\alpha_0}(z)$.

Таким образом, для решения обратной задачи осталось определить параметрическое семейство допустимых решений $\Sigma_{\bar{p}}$. Построение $\Sigma_{\bar{p}}$ зависит от имеющейся априорной информации о $\sigma(z)$. В разведочном варианте наиболее удобно в качестве такого класса решений обратной задачи рассматривать множество ограниченных кусочно-постоянных функций $\sigma(z)$ с конечным числом точек разрыва. Именно такую модель мы и будем рассматривать в дальнейшем. Она достаточно проста (хотя во многих случаях удовлетворительно описывает геологическую ситуацию) и допускает постановку наиболее простой обратной задачи. В этом случае параметрами модели будут $\bar{p} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_N, h_1, \dots, h_{N-1}\} \in \mathcal{P}$, где σ_n и h_n — соответственно проводимость и толщина n -го слоя, N — число слоев, а $\mathcal{P}$ — область допустимых изменений параметров.

$$\mathcal{P} = \{N \leq N_0; \sigma_n^0 \leq \sigma_n \leq \sigma_n^m; h_n^0 \leq h_n \leq h_n^m\}.$$

Подставив в (7) $\sigma(z) = \sigma_{\bar{p}}(z)$ ($\bar{p} \in \mathcal{P}$), мы получим сглаживающий функционал в виде функции от $2N-1$ переменных $CP[\sigma_{\bar{p}}(z)] = F(\bar{p})$. Из условия

$$\inf_{\bar{p} \in \mathcal{P}} F(\bar{p}) = F(\bar{p}_\alpha) \quad (9)$$

находим значения параметров $\bar{p}$ в зависимости от параметра регуляризации α . Найдя оптимальное $\alpha = \alpha_0$, получаем приближенное решение обратной задачи $\bar{p}_{\alpha_0}$, определяющее $\sigma_{\bar{p}_{\alpha_0}}(z)$.

Описанный метод решения обратной задачи электромагнитного частотного зондирования слоистых проводящих сред был реализован на ЭВМ БЭСМ-6 и показал достаточно высокую эффективность.

Рассмотрим некоторые численные результаты решения обратной задачи, полученные при использовании магнитной составляющей поля электрического диполя. В качестве экспериментальной характеристики поля $R^3(\tau, r)$ рассматривалась функция $R(\tau, r)$, рассчитанная для параметров геоэлектрического разреза, представленных в первом столбце табл. 1. При этом все параметры задачи рассматривались пронормированными на параметры эталонного слоя с проводимостью σ_0 и мощностью h_0 . Функция $R(\tau, r)$ рассчитывалась при значении разности между приемным и питающим диполями $r=75$ и изменении частотного параметра τ в интервале, включающем все характерные особенности кривой частотного зондирования. Параметры гипотетической модели среды и результаты машинной интерпретации кривой частотного зондирования приведены соответственно во втором и третьем столбцах табл. 1. О характере изменения проводимости $\sigma(z)$ и суммарной проводимости $S(z)$ с глубиной дают

представления рис. 1 и 2. Легко видеть, что в этом случае достаточно точно определяются параметры первого слоя и суммарная проводимость третьего $S_3 = \gamma_3 \cdot v_3$. Менее точно определяются

Таблица 1

$\gamma_n = \sigma_n/\sigma_0$ $v_n = h_n/h_0$	I	II	III
γ_1	1	2	1.00
v_1	1	1.5	0.99
γ_2	10^{-4}	0.25	10^{-10}
v_2	8	6	7.59
γ_3	1	1.5	0.91
v_3	16	20	18.09
γ_4	10^{-4}	10^{-4}	10^{-10}
v_4	∞	∞	∞

Таблица 2

$\gamma_n = \sigma_n/\sigma_0$ $v_n = h_n/h_0$	I	II	III
γ_1	1	1	1
v_1	1	1.5	0.87
γ_2	10^{-4}	0.1	0.17
v_2	2	5	4.22
γ_3	4	2	3.92
v_3	0.125	∞	∞
γ_4	10^{-4}	—	—
v_4	2	—	—
γ_5	4	—	—
v_5	∞	—	—

мощности второго и третьего слоев. Лишь качественную характеристику получаем при определении проводимостей второго слоя

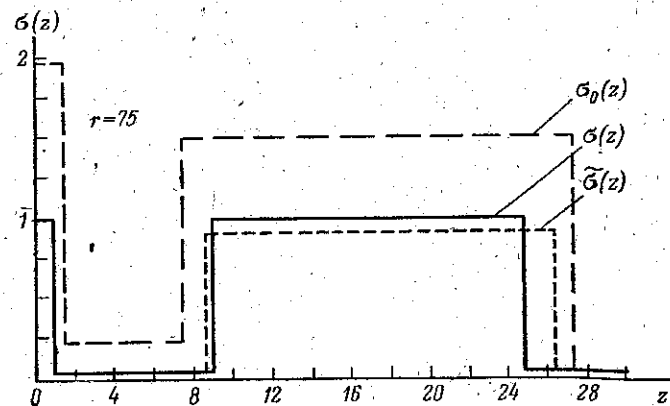


Рис. 1

и подстилающего основания. Это объясняется разрешающей способностью выбранного метода частотного зондирования слоистой среды. Ошибки в определении $R^3(\tau, r)$ для полученного в результате решения обратной задачи геоэлектрического разреза не превышают 2—3%.

Рассмотрим результат интерпретации кривой частотного зондирования пятислойного разреза, взятого в качестве экспериментального, в классе трехслойных геоэлектрических разрезов. Параметры среды, параметры гипотетического разреза и результат машинной интерпретации представлены соответственно в табл. № 2. О характере изменения проводимости и суммарной проводимости с глубиной дают представления рис. 3 и рис. 4. В этом случае, как следует из приведенных результатов, достаточно точно определяются суммарная проводимость разреза и глубина залегания изолятора. С высокой точностью определяются проводимость подстилающего основания и глубина его залегания. Функция $R(\tau, r)$, рассчитанная для полученного разреза с высокой степенью точности, совпадает с экспериментальной характеристикой поля $R^3(\tau, r)$.

Интересно сравнить полученный результат с интерпретацией, рассматриваемой экспериментальной характеристикой поля в классе семислойных разрезов (табл. № 3). На рис. 5 и 6 приведены функции σ и S в зависимости от глубины погружения z

для точного решения, гипотетического разреза и приближенного решения, полученного при решении обратной задачи. В этом случае, как видно, достаточно хорошо определяются параметры первого слоя и подстилающего основания. Кроме того, получаем информацию о наличии в разрезе мощного слоя высокого сопротивления с включением проводящей прослойки. Функция $R(\tau, r)$, соответствующая геоэлектрическим параметрам разреза, совпадает с экспериментальной характеристикой $R^3(\tau, r)$.

Таблица 3

$\gamma_n = \sigma_n/\sigma_0$ $v_n = h_n/h_0$	I	II	III
γ_1	1	1	1.00
v_1	1	1	0.93
γ_2	10^{-4}	0.25	0.07
v_2	2	1	0.915
γ_3	4	10^{-3}	0.137
v_3	0.125	1	0.96
γ_4	10^{-4}	0.5	0.35
v_4	2	1	0.82
γ_5	4	0.01	0.03
v_5	∞	1	0.91
γ_6	—	1	1.04
v_6	—	1	0.82
γ_7	—	2	4.03
v_7	—	∞	∞

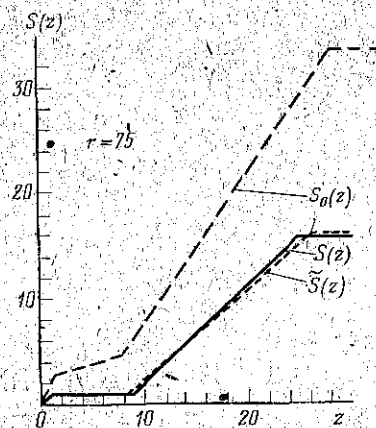


Рис. 2

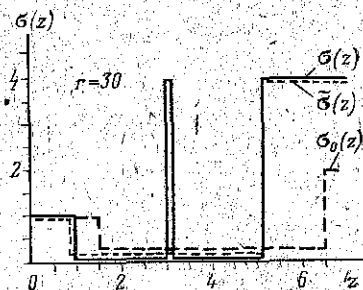


Рис. 3

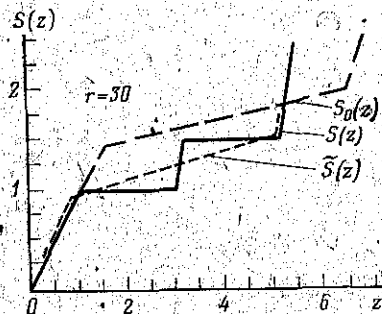


Рис. 4

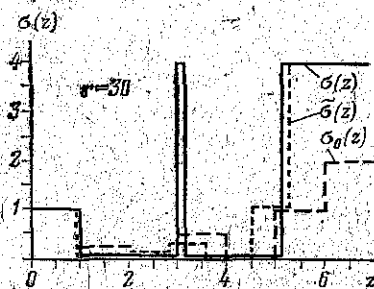


Рис. 5

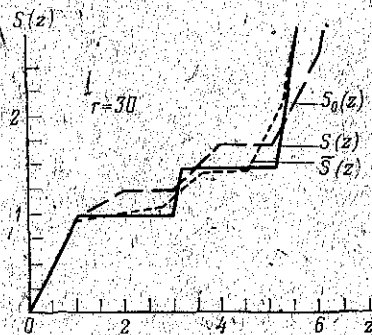


Рис. 6

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Скугаревская О. А. Теоретические основы методов электромагнитных зондирования. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1977, № 1, с. 84—89.
2. Дмитриев В. И., Федорова Э. А. Численные методы в задачах геофизики. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1980. Вып. 32, с. 150—183.
3. Anderson W. L. Numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering. — Geophysics, 1979, v. 44, p. 1287—1305.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач, М.: Наука, 1979.

В. И. ДМИТРИЕВ, Н. В. АЛЕКСЕЕВА

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Одним из геофизических методов изучения земных недр является предложенный А. Н. Тихоновым [1] метод магнитотеллурического зондирования (МТЗ). Он состоит в определении электрических характеристик Земли по изучению частотной зависимости отношения на земной поверхности горизонтальных составляющих естественного электромагнитного (так называемого магнитотеллурического) поля. Математически прямая задача МТЗ в одномерном случае сводится [2] к определению адмитанса Земли:

$$Y(\omega) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{du}{dz} \Big|_{z=0}, \quad (1)$$

где функция $u(z)$, имеет физический смысл нормированного электрического поля:

$$u(z) = \frac{E(z)}{E(z=0)} \quad (\text{точка } z=0 \text{ на поверхности Земли}),$$

и является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} u''(z) + i\omega\mu_0\sigma(z)u(z) &= 0, \quad 0 < z < H, \\ u(z=0) &= 1, \\ u'(z=H) &= i\sqrt{i\omega\mu_0\sigma_H}u(z=H). \end{aligned} \quad (2)$$

Обратная задача МТЗ состоит в определении геоэлектрического разреза, т. е. функции $\sigma(z)$ на отрезке $[0, H]$ и числа σ_H , по известной частотной зависимости адмитанса $Y(\omega)$. Эта задача имеет единственное решение [3].

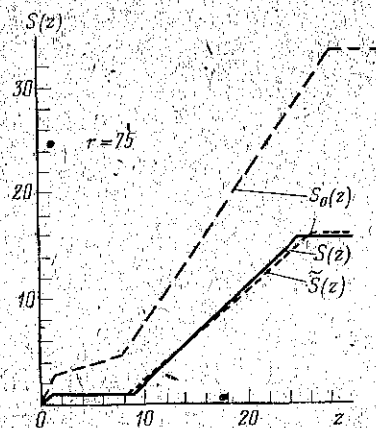


Рис. 2

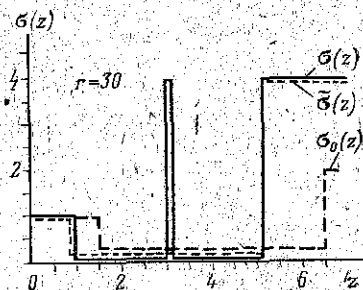


Рис. 3

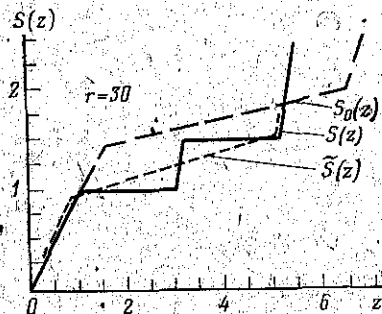


Рис. 4

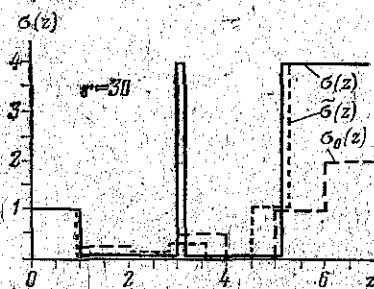


Рис. 5

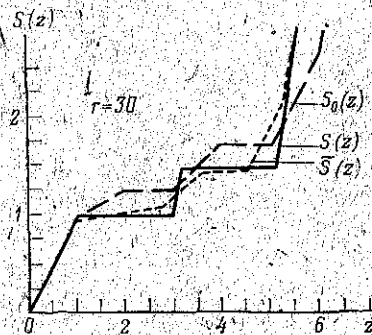


Рис. 6

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Скугаревская О. А. Теоретические основы методов электромагнитных зондирования. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1977, № 1, с. 84—89.
2. Дмитриев В. И., Федорова Э. А. Численные методы в задачах геофизики. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1980. Вып. 32, с. 150—183.
3. Anderson W. L. Numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering. — Geophysics, 1979, v. 44, p. 1287—1305.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач, М.: Наука, 1979.

В. И. ДМИТРИЕВ, Н. В. АЛЕКСЕЕВА

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Одним из геофизических методов изучения земных недр является предложенный А. Н. Тихоновым [1] метод магнитотеллурического зондирования (МТЗ). Он состоит в определении электрических характеристик Земли по изучению частотной зависимости отношения на земной поверхности горизонтальных составляющих естественного электромагнитного (так называемого магнитотеллурического) поля. Математически прямая задача МТЗ в одномерном случае сводится [2] к определению адмитанса Земли:

$$Y(\omega) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{du}{dz} \Big|_{z=0}, \quad (1)$$

где функция $u(z)$, имеет физический смысл нормированного электрического поля:

$$u(z) = \frac{E(z)}{E(z=0)} \quad (\text{точка } z=0 \text{ на поверхности Земли}),$$

и является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} u''(z) + i\omega\mu_0\sigma(z)u(z) &= 0, \quad 0 < z < H, \\ u(z=0) &= 1, \\ u'(z=H) &= i\sqrt{i\omega\mu_0\sigma_H}u(z=H). \end{aligned} \quad (2)$$

Обратная задача МТЗ состоит в определении геоэлектрического разреза, т. е. функции $\sigma(z)$ на отрезке $[0, H]$ и числа σ_H , по известной частотной зависимости адмитанса $Y(\omega)$. Эта задача имеет единственное решение [3].

Развитие методов решения обратной задачи МТЗ прошло длительный путь от ручного метода подбора до создания автоматизированных систем интерпретации на ЭВМ [2, 4—8]. Специфика этих методов связана с неустойчивостью задачи к входным данным, которая проявляется в существовании сильно различающихся геоэлектрических разрезов, порождающих близкие частотные характеристики адмитансов. Для правильной интерпретации экспериментальных данных зондирования необходимо использовать априорные сведения об искомом геоэлектрическом разрезе [9]. Дополнительная информация может иметь как количественный характер (например, число слоев, границы изменения их проводимости), так и качественный (число точек разрыва функции $\sigma(z)$, гладкость между разрывами). Соответственно она либо учитывается при выборе достаточно узкого класса решений, на котором задача является устойчивой [4—5], либо служит для построения регуляризирующих алгоритмов получения устойчивого решения [7—8]. Однако резкое ухудшение устойчивости при увеличении числа слоев разреза в первом случае, сложность регуляризирующих алгоритмов — во втором, а также слабая разрешающая способность самого метода не позволяют останавливаться на достигнутом, а вынуждают к поискам новых путей решения обратной задачи МТЗ.

Один из подходов к решению обратной задачи МТЗ связан с рассмотрением так называемой интегральной проводимости, определяемой формулой:

$$S(z) = \int_0^z \sigma(\xi) d\xi, \quad z \geq 0.$$

Как будет показано ниже, обратная задача МТЗ для интегральной проводимости является устойчивой к входным данным, поэтому удобно в качестве предварительного этапа интерпретации находить именно $S(z)$. Для определения методики построения $S(z)$ по известному адмитансу $Y(\omega)$ рассмотрим постановку прямой задачи. С этой целью получим соотношения, позволяющие по заданной функции $S(z)$ вычислить адмитанс $Y(\omega)$. Так как $\sigma(z) = S'(z)$, то, проинтегрировав дифференциальное уравнение (2) в пределах от z до H , учитывая граничное условие для функции $u(z)$ в точке $z=H$, получим

$$u'(H) - u'(z) + i\omega\mu_0 \left\{ [S(H) - S(z)] \frac{u'(H)}{i\sqrt{i\omega\mu_0\sigma_H}} + \int_z^H [S(z) - S(\xi)] u'(\xi) d\xi \right\} = 0. \quad (3)$$

Однородное интегральное уравнение (3) относительно функции $u'(z)$ является нагруженным. Чтобы избавиться от величины $u'(H)$, введем новую функцию

$$y(z) = u'(z)/u'(H),$$

имеющую физический смысл нормированного на значение в точке $z=H$ магнитного поля. Как видно из формулы (1), адмитанс $Y(\omega)$ выражается через $y(z)$ следующим образом:

$$Y(\omega) = - \frac{y(0)}{i\omega\mu_0 \int_0^H y(\xi) d\xi + i\sqrt{\frac{i\omega\mu_0}{\sigma_H}}}, \quad (4)$$

а сама функция $y(z)$, как следует из (3), является решением интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода:

$$y(z) - i\omega\mu_0 \int_z^H K(z, \xi) y(\xi) d\xi = f(z), \quad 0 \leq z \leq H, \quad (5)$$

$$K(z, \xi) = S(z) - S(\xi); \quad f(z) = 1 + i\sqrt{\frac{i\omega\mu_0}{\sigma_H}} K(z, H).$$

Таким образом, прямая задача МТЗ, состоящая в определении частотной зависимости адмитанса $Y(\omega)$ по распределению интегральной проводимости, может быть записана в операторном виде:

$$A_S[S(z)] = Y(\omega), \quad S(z) \in X_S, \quad Y(\omega) \in L_2[\omega_h, \omega_b], \quad (6)$$

где A_S — оператор прямой задачи расчета теоретического значения адмитанса по известному распределению интегральной проводимости, определенный формулами (4) — (5), а метрическое пространство X_S задано следующим образом:

$$X_S \begin{cases} z \in [0, H]: & S(z) \text{ — неубывающая функция,} \\ & S(H) \leq S_{\max}, \quad S(0) = 0; \\ z > H: & S(z) = S(H) + \sigma_H(z - H), \quad \sigma_{\min} \leq \sigma_H \leq \sigma_{\max}; \\ & \rho_{X_S}(S_1, S_2) = \|S_1 - S_2\|_{L_2[0, H]} + |S_1(H) - S_2(H)| + |\sigma_H^{(1)} - \sigma_H^{(2)}| \end{cases}$$

(неубывание функции $S(z)$ вытекает из ее определения и положительности распределения проводимости $\sigma(z)$, ограниченность интегральной проводимости в точке $z=H$ следует из физических соображений). Нетрудно показать, что алгоритмы (1) — (2) и (4) — (5) вычисления теоретического значения адмитанса $Y(\omega)$ соответственно по распределению проводимости или интегральной проводимости (т. е. прямые задачи) являются эквивалентными.

Сформулируем обратную задачу: по заданной частотной зависимости адмитанса $Y(\omega) \in L_2[\omega_h, \omega_b]$ требуется найти распределение интегральной проводимости $S(z) \in X_S$, если известно, что функции $Y(\omega)$ и $S(z)$ связаны соотношением (6). Перейдем к анализу устойчивости этой обратной задачи. Предварительно докажем две теоремы относительно свойств метрического пространства X_S и оператора A_S .

Теорема 1. Метрическое пространство X_S компактно.

Доказательство данной теоремы непосредственно следует из

компактности множества неубывающих ограниченных на $[a, b]$ функций в метрике пространства $L_2[a, b]$ [9].

Теорема 2. Оператор A_s прямой задачи МТЗ для распределения интегральной проводимости, определенный формулами (4) — (5), непрерывен на метрических пространствах (X_s, L_2) .

Доказательству этой теоремы предшлели четыре леммы.

Лемма 1. Если ядро $K(z, \xi)$ и правая часть $f(z)$ интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода

$$y(z) - \lambda \int_z^H K(z, \xi) y(\xi) d\xi = f(z), \quad 0 \leq z \leq H, \quad (7)$$

ограничены, то для модуля его решения в произвольной точке $z \in [0, H]$ справедлива оценка:

$$|y(z)| \leq M_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda M_1 H|^n}{n!}, \quad (8)$$

где

$$M_1 = \sup_{\xi, z \in [0, H]} |K(z, \xi)|, \quad M_2 = \sup_{z \in [0, H]} |f(z)|.$$

Доказательство. Требуемую оценку (8) несложно получить, если искать решение интегрального уравнения (7) в виде ряда по степеням λ :

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n(z). \quad (9)$$

Подставляя это разложение в интегральное уравнение (7) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , находим неизвестные функции $y_n(z)$, $n=0, 1, \dots$: $y_n = K^n f$, где K^n есть n -я степень интегрального оператора Вольтерра. Сходимость формального функционального ряда (9) докажем с помощью построения мажорантного ряда. В силу ограниченности ядра $K(z, \xi)$ и правой части $f(z)$ интегрального уравнения (7) для членов ряда (9) справедлива оценка:

$$|\lambda^n K^n f| \leq M_2 \frac{|\lambda M_1 H|^n}{n!},$$

поэтому

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K^n f \right| \leq M_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda M_1 H|^n}{n!}.$$

Последний ряд сходится при любых значениях констант λ , M , H , откуда следует сходимость функционального ряда в формуле (9) и оценка (8) для решения $y(z)$ интегрального уравнения (7).

Лемма 2. Для модуля решения $y(z)$ интегрального уравнения (5) в точке $z=0$ при любом $\omega \in [\omega_n, \omega_b]$ справедлива оценка: $|y(0)| \geq 1$.

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из убывания модуля функции $u'(z)$, так как $y(0) = u'(z=0)/u'(z=H)$, где функция $u(z)$ есть решение дифференциальной задачи (2). Покажем, что $\frac{d}{dz} |u'(z)|^2 < 0$, откуда следует, что функция $|u'(z)|$ убывает. Вычислим искомую производную:

$$(|u'(z)|^2)' = u''(z) \bar{u}'(z) + u'(z) \bar{u}''(z),$$

где функция $\bar{u}(z)$ есть комплексно-сопряженная к $u(z)$. В соответствии с уравнением (2):

$$u''(z) = -i\omega\mu_0\sigma(z)u(z),$$

$$\bar{u}''(z) = i\omega\mu_0\sigma(z)\bar{u}(z),$$

поэтому имеем

$$(|u'(z)|^2)' = i\omega\mu_0\sigma(z) [\bar{u}(z)u'(z) - u(z)\bar{u}'(z)].$$

Введем функцию $W(z) = \bar{u}(z)u'(z)$. Тогда искомую производную запишем в виде

$$(|u'(z)|^2)' = -2\omega\mu_0\sigma(z) \operatorname{Im} W(z).$$

Для доказательства отрицательности производной квадрата модуля функции $u'(z)$ достаточно показать, что $\operatorname{Im} W(z) > 0$. Вычислим производную функции $W(z)$:

$$W'(z) = |u'(z)|^2 - i\omega\mu_0\sigma(z) |u(z)|^2.$$

Интегрируем полученное равенство в пределах от z до H :

$$W(H) - W(z) = \int_z^H |u'(\xi)|^2 d\xi - i\omega\mu_0 \int_z^H \sigma(\xi) |u(\xi)|^2 d\xi.$$

В силу граничного условия (2) на функцию $u(z)$ в точке $z=H$ имеем:

$$W(H) = (-1 + i) \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_H}{2}} |u(H)|^2,$$

поэтому

$$W(z) = - \left(\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_H}{2}} |u(H)|^2 + \int_z^H |u'(\xi)|^2 d\xi \right) + i \left(\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_H}{2}} |u(H)|^2 + \omega\mu_0 \int_z^H \sigma(\xi) |u(\xi)|^2 d\xi \right).$$

Отсюда следует, что $\operatorname{Im} W(z) > 0$ и поэтому $(|u'(z)|^2)' < 0$, что и означает убывание модуля функции $u'(z)$. Лемма доказана.

Лемма 3. Модуль адмитанса $Y(\omega)$ на частотном отрезке $[\omega_n, \omega_b]$ ограничен сверху константой $S_{\max} + \sqrt{\frac{\sigma_{\max}}{\omega_{\min} \mu_0}}$.

Доказательство. Введем функцию $Y(z, \omega) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{u'(z)}{u(z)}$, где $u(z)$ есть решение краевой задачи (2). Функция $Y(z, \omega)$, являющаяся решением дифференциальной задачи

$$Y'(z, \omega) + i\omega\mu_0 Y^2(z, \omega) = -\sigma(z), \quad 0 \leq z < H,$$

$$Y(H, \omega) = \sqrt{i \frac{\sigma_H}{\omega\mu_0}}, \quad \operatorname{Im} Y(z, \omega) > 0,$$

в точке $z=0$ (т. е. адмитанс $Y(\omega)$) представима в виде

$$Y(\omega) = \int_0^H \sigma(z) e^{i\omega\mu_0 \int_0^z Y(\xi, \omega) d\xi} dz + \sqrt{i \frac{\sigma_H}{\omega\mu_0}} e^{i\omega\mu_0 \int_0^H Y(\xi, \omega) d\xi}$$

Оценим модуль адмитанса

$$|Y(\omega)| \leq \int_0^H \sigma(z) e^{-\omega\mu_0 \int_0^z \operatorname{Im} Y(\xi, \omega) d\xi} dz + \sqrt{\frac{\sigma_H}{\omega\mu_0}} e^{-\omega\mu_0 \int_0^H \operatorname{Im} Y(\xi, \omega) d\xi}$$

Так как $\operatorname{Im} Y(\xi, \omega) > 0$, то значения экспонент не превосходят единицы, поэтому

$$|Y(\omega)| \leq \int_0^H \sigma(z) dz + \sqrt{\frac{\sigma_H}{\omega\mu_0}} \leq S_{\max} + \sqrt{\frac{\sigma_{\max}}{\omega_{\min}\mu_0}}$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Если расстояние между функциями $S_1(z)$ и $S_2(z)$ в метрике пространства X_S меньше некоторого числа δ , то справедливы следующие оценки:

$$a) \|S_1 - S_2\|_{L_2[0, H]} < \delta;$$

$$b) |S_1(H) - S_2(H)| < \delta,$$

$$в) \left| \frac{1}{\sqrt{\sigma_H^{(1)}}} - \frac{1}{\sqrt{\sigma_H^{(2)}}} \right| < \frac{\delta}{2\sigma_{\min}^{3/2}},$$

$$г) \int_0^H \int_0^H |\Delta K(z, \xi)| dz d\xi < 2H\sqrt{H}\delta, \text{ где } \Delta K(z, \xi) = K_1(z, \xi) - K_2(z, \xi);$$

$$д) \int_0^H |\Delta K(z, H)| dz < \sqrt{H}(1 + \sqrt{H})\delta.$$

Доказательство утверждений леммы непосредственно следует из определения расстояния в метрическом пространстве X_S .

Перейдем к доказательству теоремы 2. Покажем, что для произвольного положительного числа ε существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что из условия $\rho_{X_S}(S_1, S_2) < \delta(\varepsilon)$ следует неравенство

$\rho_{L_2}(Y_1, Y_2) < \varepsilon$, где $Y_1(\omega) = A_S[S_1(z)]$; $Y_2(\omega) = A_S[S_2(z)]$. Пусть расстояние между функциями $S_1(z)$ и $S_2(z)$ в метрике пространства X_S меньше некоторого числа δ . Оценим расстояние между соответствующими адмитансами в метрике пространства $L_2[\omega_h, \omega_b]$. С этой целью оценим сначала модуль разности $Y_1(\omega) - Y_2(\omega)$. Из формулы (4) следует, что

$$|Y_1(\omega) - Y_2(\omega)| \leq \left| \frac{Y_1(\omega) Y_2(\omega)}{y_1(0) y_2(0)} \right| \left\{ |\Delta y(0)| \left[\omega\mu_0 \int_0^H |y_1(z)| dz + \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{\sigma_H^{(1)}}} \right] + \omega\mu_0 |y_1(0)| \left| \frac{1}{\sqrt{\sigma_H^{(1)}}} - \frac{1}{\sqrt{\sigma_H^{(2)}}} \right| \right\}, \quad (10)$$

где функция $\Delta y(z) = y_1(z) - y_2(z)$ является решением интегрального уравнения:

$$\Delta y(z) - i\omega\mu_0 \int_z^H K_2(z, \xi) \Delta y(\xi) d\xi = \Delta f(z), \quad 0 \leq z \leq H,$$

$$\Delta f(z) = i\omega\mu_0 \int_z^H \Delta K(z, \xi) y_1(\xi) d\xi + i \sqrt{\frac{i\omega\mu_0}{\sigma_H^{(1)}}} \Delta K(z, H) + i \sqrt{i\omega\mu_0} K_2(z, H) \left[\frac{1}{\sqrt{\sigma_H^{(1)}}} - \frac{1}{\sqrt{\sigma_H^{(2)}}} \right].$$

Получим несколько вспомогательных оценок, которые позволяют нам равномерно по $\omega \in [\omega_h, \omega_b]$ оценить модуль разности адмитансов.

1) В соответствии с леммой 3 для модулей адмитансов $Y_1(\omega)$ и $Y_2(\omega)$ при любом $\omega \in [\omega_h, \omega_b]$ справедлива оценка:

$$|Y_k(\omega)| \leq S_{\max} + \sqrt{\frac{\sigma_{\max}}{\omega_{\min}\mu_0}}, \quad k = 1, 2.$$

2) В соответствии с леммой 2 для модулей функций $y_1(z)$ и $y_2(z)$ в точке $z=0$ справедлива оценка: $|y_k(0)| \geq 1, k = 1, 2$.

3) В соответствии с леммой 1 при любом $\omega \in [\omega_h, \omega_b]$ для модулей $|y_1(z)|$ и $|\Delta y(z)|$ в произвольной точке $z \in [0, H]$ справедливы оценки:

$$|y_1(z)| \leq F_1 \cdot M,$$

$$|\Delta y(z)| \leq \left\{ \omega_{\max}\mu_0 M \int_z^H |\Delta K(z, \xi)| d\xi + \sqrt{\frac{\omega_{\max}\mu_0}{\sigma_{\min}}} |\Delta K(z, H)| + \sqrt{\omega_{\max}\mu_0} S_{\max} \left| \frac{1}{\sqrt{\sigma_H^{(1)}}} - \frac{1}{\sqrt{\sigma_H^{(2)}}} \right| \right\} \cdot M,$$

где

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega_{\max} \mu_0 S_{\max} H)^n}{n!},$$

$$F_1 = 1 + \sqrt{\frac{\omega_{\max} \mu_0}{\sigma_{\min}}} S_{\max}.$$

Отсюда получаем, что

$$|\Delta y(0)| \leq \left\{ \omega_{\max} \mu_0 F_1 M \sqrt{H} \|S_1 - S_2\|_{L_2[0, H]} + \sqrt{\frac{\omega_{\max} \mu_0}{\sigma_{\min}}} |S_1(H) - S_2(H)| + \sqrt{\omega_{\max} \mu_0} S_{\max} \left| \frac{1}{\sqrt{\sigma_H^{(1)}}} - \frac{1}{\sqrt{\sigma_H^{(2)}}} \right| \right\} \cdot M;$$

$$\int_0^H |\Delta y(z)| dz \leq \left\{ \omega_{\max} \mu_0 F_1 M \int_0^H \int_0^H |\Delta K(z, \xi)| dz d\xi + \sqrt{\frac{\omega_{\max} \mu_0}{\sigma_{\min}}} \int_0^H |\Delta K(z, H)| dz + \sqrt{\omega_{\max} \mu_0} S_{\max} H \left| \frac{1}{\sqrt{\sigma_H^{(1)}}} - \frac{1}{\sqrt{\sigma_H^{(2)}}} \right| \right\} \cdot M.$$

С учетом полученных неравенств и неравенств леммы 4 оценка (10) для модуля разности адмитансов примет вид

$$|Y_1(\omega) - Y_2(\omega)| \leq \left\{ S_{\max} + \sqrt{\frac{\sigma_{\max}}{\omega_{\min} \mu_0}} \right\}^2 \left\{ F_2 \left[\omega_{\max} \mu_0 F_1 M H + \sqrt{\frac{\omega_{\max} \mu_0}{\sigma_{\min}}} \right] + \omega_{\max} \mu_0 F_1 F_3 M + \sqrt{\frac{\omega_{\max} \mu_0}{\sigma_{\min}}} \frac{F_1 \cdot M}{2\sigma_{\min}} \right\} \cdot \delta,$$

где

$$F_2 = M \cdot \left\{ \omega_{\max} \mu_0 F_1 M \sqrt{H} + \sqrt{\frac{\omega_{\max} \mu_0}{\sigma_{\min}}} \left(1 + \frac{S_{\max}}{2 \cdot \sigma_{\min}} \right) \right\},$$

$$F_3 = M \cdot \left\{ 2\omega_{\max} \mu_0 F_1 M H \sqrt{H} + \sqrt{\frac{\omega_{\max} \mu_0}{\sigma_{\min}}} (1 + \sqrt{H}) + \sqrt{\frac{\omega_{\max} \mu_0}{\sigma_{\min}}} \frac{S_{\max} H}{2 \cdot \sigma_{\min}} \right\}.$$

Выбирая число δ из условия

$$\delta < \frac{\varepsilon}{F \sqrt{\omega_B - \omega_H}},$$

где

$$F = \left(S_{\max} + \sqrt{\frac{\sigma_{\max}}{\omega_{\min} \mu_0}} \right)^2 \left\{ F_2 \left[\omega_{\max} \mu_0 F_1 M H + \sqrt{\frac{\omega_{\max} \mu_0}{\sigma_{\min}}} \right] + \omega_{\max} \mu_0 F_1 F_3 M + \sqrt{\frac{\omega_{\max} \mu_0}{\sigma_{\min}}} \frac{F_1 M}{2\sigma_{\min}} \right\},$$

гарантируем выполнение неравенства

$$\rho_{L_2[\omega_H, \omega_B]}(Y_1, Y_2) = \sqrt{\int_{\omega_H}^{\omega_B} |Y_1(\omega) - Y_2(\omega)|^2 d\omega} < \varepsilon,$$

что и доказывает непрерывность оператора A_S прямой задачи МТЗ для интегральной проводимости на метрических пространствах (X_S, L_2) .

Следствие. Обратная задача МТЗ

$$A_\sigma[\sigma(z)] = Y(\omega), \quad \sigma(z) \in X_\sigma, \quad Y(\omega) \in L_2[\omega_H, \omega_B], \quad (11)$$

где A_σ — оператор прямой задачи расчета адмитанса по заданному распределению проводимости, определенный формулами (1) — (2), не является устойчивой на метрических пространствах (X_σ, L_2) , где X_σ определено следующим образом:

$$X_\sigma = \left\{ \begin{array}{l} \sigma(z) \text{ — кусочно-непрерывная функция,} \\ z \in [0, H]: \sigma(z) > 0, \\ \int_0^H \sigma^2(\xi) d\xi < \infty; \\ z \geq H: \sigma(z) = \sigma_H, \quad \sigma_{\min} \leq \sigma_H \leq \sigma_{\max}; \\ \rho_{X_\sigma}(\sigma_1, \sigma_2) = \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L_2[0, H]} + |\sigma_H^{(1)} - \sigma_H^{(2)}|. \end{array} \right.$$

Доказательство. Для иллюстрации неустойчивости обратной задачи (11) на метрических пространствах (X_σ, L_2) достаточно указать такую сходящуюся в $L_2[\omega_H, \omega_B]$ последовательность адмитансов $\{Y^{(n)}(\omega)\}_{n \rightarrow \infty} \rightarrow Y(\omega)$, что соответствующая последовательность $\{\sigma^{(n)}(z)\}$ не сходится к элементу $\sigma(z)$ в метрике пространства X_σ . Рассмотрим произвольную функцию $\sigma(z) \in X_\sigma$ и построим последовательность $\{\sigma^{(n)}(z)\} \in X_\sigma$ по формуле

$$\sigma^{(n)}(z) = \sigma(z), \quad z \notin [z_0, z_0 + 1/n],$$

$$\sigma^{(n)}(z) = \sigma(z) + \varphi_n, \quad z \in [z_0, z_0 + 1/n],$$

где неизвестные положительные константы φ_n будут определены позже. Вычислим расстояние между функциями $\sigma^{(n)}(z)$ и $\sigma(z)$ и между соответствующими распределениями интегральной прово-

димости $S^{(n)}(z)$ и $S(z)$:

$$\rho_{X_\sigma}(\sigma, \sigma^{(n)}) = \frac{\varphi_n}{\sqrt{n}}, \quad \rho_{X_S}(S, S^{(n)}) = \frac{\varphi_n}{n} \sqrt{H - z_0 - 1/n}, \quad (12)$$

Полагая $\varphi_n = n^\alpha$, где $1/2 < \alpha < 1$, из формул (12) при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\rho_{X_\sigma}(\sigma, \sigma^{(n)}) \rightarrow \infty, \quad \rho_{X_S}(S, S^{(n)}) \rightarrow 0,$$

т. е. последовательность $\{\sigma^{(n)}(z)\}$ не сходится к элементу $\sigma(z) \in X_\sigma$, в то время как $\{S^{(n)}(z)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S(z)$. В силу непрерывности оператора A_S (по теореме 2) соответствующая последовательность адмитансов $\{Y^{(n)}(\omega)\}$, где $Y^{(n)}(\omega) = A_S[S^{(n)}(z)]$, сходится к элементу $Y(\omega) = A_S[S(z)] = A_\sigma[\sigma(z)]$. Таким образом, построены требуемые последовательности

$$\{\sigma^{(n)}(z)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma(z), \quad \{Y^{(n)}(\omega)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Y(\omega),$$

иллюстрирующие неустойчивость обратной задачи (11) на метрических пространствах (X_σ, L_2) .

Теорема 3. Обратная задача МТЗ для распределения интегральной проводимости (6) является устойчивой на метрических пространствах (X_S, L_2) .

Доказательство. Доказательство данного утверждения непосредственно следует из теоремы о непрерывном отображении компакта [9], в силу которой обратное отображение будет непрерывно на L_2 , что и означает устойчивость обратной задачи на пространствах (X_S, L_2) .

Таким образом, имеем устойчивую задачу МТЗ для распределения интегральной проводимости $S(z)$ и неустойчивую задачу для распределения проводимости $\sigma(z)$. Поэтому предлагается следующий подход к решению обратной задачи МТЗ, состоящий из двух этапов.

Первый этап. Решение устойчивой обратной задачи определения функции $S(z)$.

Следует отметить, что непосредственное определение распределения интегральной проводимости $S(z)$ из условия

$$\rho_{L_2}(A_S[S(z)], Y_0(\omega)) \leq \delta,$$

где $Y_0(\omega)$ — экспериментальная частотная зависимость адмитанса, δ — погрешность задания экспериментальных данных, связано с определенными вычислительными трудностями, так как требует решения интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода (5) при вычислении теоретического значения адмитанса (4). В то же время для определения теоретического значения адмитанса по заданному распределению проводимости в [4] предложена несложная рекуррентная формула. Поэтому в силу простоты расчета прямой задачи МТЗ (11) целесообразно сначала определить некоторое

распределение проводимости $\sigma(z)$ из условия

$$\rho_{L_2}(A_\sigma[\sigma(z)], Y_0(\omega)) \leq \delta.$$

Вследствие неустойчивости обратной задачи (11) найденную функцию $\sigma(z)$ нельзя взять в качестве приближенного решения, однако соответствующее распределение интегральной проводимости будет стремиться к истинному при стремлении к нулю погрешности δ экспериментальных данных.

Второй этап. Решение неустойчивой задачи численного дифференцирования функции $S(z)$ для определения распределения проводимости $\sigma(z)$.

Целесообразность данного подхода состоит в следующем:

1) распределение интегральной проводимости $S(z)$ само по себе часто несет необходимую практическую информацию, так что процесс интерпретации экспериментальных данных может быть закончен уже на первом этапе;

2) если же после определения функции $S(z)$ нам требуется найти и функцию $\sigma(z)$, то мы приходим к некорректной задаче численного дифференцирования. Однако использование априорной информации об искомом геоэлектрическом разрезе при регуляризации этой задачи значительно проще, чем решение неустойчивой обратной задачи (11), так как фактически сводится к приближению $S(z)$ кусочно-линейной непрерывной монотонно возрастающей функцией с заданным числом участков линейности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры. — ДАН СССР, т. 73, № 2, 1950, с. 295—297.
2. Тихонов А. Н., Шахсуваров Д. Н. О возможности использования импеданса естественного электромагнитного поля Земли для изучения ее верхних слоев. — Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1956, № 4, с. 410—418.
3. Тихонов А. Н. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований. — ЖВМ и МФ, 1965, т. 5, № 3, с. 545—548.
4. Дмитриев В. И. Прямая и обратная задачи магнитотеллурического зондирования слоистой среды. — Изв. АН СССР, сер. физика Земли, 1970, № 1, с. 64—69.
5. Дмитриев В. И., Руднева Т. Л. Об обратной задаче глубинного магнитотеллурического зондирования. — В кн.: Вычислительные методы и программирование, М.: Изд-во МГУ, 1973, Вып. 20, с. 241—245.
6. Дмитриев В. И. Обратные задачи электромагнитного зондирования. — Изв. АН СССР, сер. физика Земли, 1977, № 1, с. 19—23.
7. Гласко В. Б., Кулик Н. И., Тихонов А. Н. Об определении геоэлектрического разреза на основе метода регуляризации. — ЖВМ и МФ, 1972, т. 12, № 1, с. 139—149.
8. Тихонов А. Н., Гласко В. Б., Кулик Н. И. Регуляризирующие алгоритмы для нелинейных задач и обратная задача магнитотеллурического зондирования. — В кн.: Вычислительные методы и программирование, М.: Изд-во МГУ, 1973, Вып. 20, с. 158—174.
9. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ НАД СЛОИСТОЙ СРЕДОЙ С ОСЕСИММЕТРИЧНЫМ ПОДНЯТИЕМ

Изучение моделей, возникающих в теории магнитотеллурических зондирований (МТЗ), наиболее полно описывающих реальную геофизическую ситуацию, приводит к решению граничных задач электродинамики неоднородных сред. К настоящему времени наиболее полно исследован класс моделей двумерно-неоднородных сред, позволяющий оценить влияние неоднородных включений, бесконечно протяженных вдоль некоторой оси [1, 2].

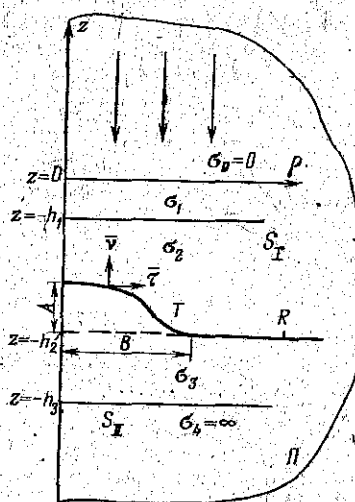
Анализ трехмерных моделей в общей постановке приводит к трехмерным, и векторным задачам, решение которых требует применения тензорного аппарата. В то же время можно выделить достаточно широкий класс моделей сред, обладающих симметрией вращения, в рамках которых удается учитывать взаимное влияние различных элементов структуры.

Так, в работе [3] на примере идеально-проводящего диска, погруженного в слоистую среду, проведен анализ основных закономерностей поведения электромагнитного поля в присутствии осесимметричной неоднородности. В этом случае рассмотрено включение, толщина которого много меньше глубины залегания, а проводимость бесконечна. В то же время

для развития теории МТЗ большой интерес представляют осесимметричные включения конечных размеров и проводимости. Анализ этих моделей может быть проведен на основе метода, предложенного в работе [4], основная идея которого состоит в сведении трехмерной векторной задачи к скалярным задачам в азимутальной полуплоскости относительно n -х гармоник азимутальных компонент поля.

В настоящей работе рассмотрено квазистационарное поле над слоистой средой с осесимметричным поднятием. Трехмерная векторная задача сведена к скалярным задачам в азимутальной полуплоскости относительно первых гармоник азимутальных компонент поля. Получена система одномерных интегральных уравнений I рода.

Пусть неоднородная Земля моделируется горизонтально-одно-



родной слоистой средой. Граница высокоомного слоя имеет осесимметрическое поднятие мощности A и максимального радиуса B (см. рисунок). Считаем, что поднятие описывается в азимутальной полуплоскости

$$\Pi\{(p, z): p \geq 0, -\infty < z < \infty\}$$

непрерывно дифференцируемой функцией $z=l(\rho)$, $0 \leq \rho \leq B$.

Таким образом, проводимость $\sigma(M)$ является кусочно-постоянной функцией координат ρ и z . Магнитную проницаемость считаем постоянной и равной магнитной проницаемости вакуума ($\mu = \mu_0$).

В среде возбуждается квазистационарное электромагнитное поле плоской волной, нормально падающей на слоистую среду (зависимость от времени $e^{-i\omega t}$).

Требуется определить векторы напряженности электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$, удовлетворяющие системе уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \bar{E} = i\omega\mu \bar{H}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \sigma \bar{E} + \bar{j},$$

условиям непрерывности касательных компонент на всех границах разрыва $\sigma(M)$ и следующим условием на бесконечности:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R\bar{E} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R\bar{H} = 0.$$

Представим векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в виде рядов Фурье по азимутальной координате φ [5]. Из уравнений Максвелла n -е гармоники цилиндрических компонент выражаются через n -е гармоники азимутальных компонент $E_{\varphi}^{(n)}(\rho, z) = u(\rho, z)$ и $H_{\varphi}^{(n)}(\rho, z) = v(\rho, z)$, которые являются решениями следующей граничной задачи в полуплоскости Π (при фиксированном n).

1. Удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (в области постоянной проводимости $\sigma(M)$):

$$\hat{L}\bar{U} = \bar{F}; \quad (2)$$

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}; \quad \bar{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}; \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} f_e \\ f_m \end{pmatrix};$$

$$L_{11} = L_{22} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(1 - \frac{2n^2}{a}\right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \left(\alpha - \frac{a^*}{a}\right) \frac{1}{\rho^2};$$

$$L_{12} = -i\omega\mu\Theta(M); L_{21} = \sigma\Theta(M); \Theta(M) = \frac{-2in}{a} \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\alpha = k^2 \rho^2 - n^2; \quad \alpha^* = k^2 \rho^2 + n^2; \quad k^2(M) = i\omega \mu \sigma(M);$$

$$f_e(M) = -\frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\alpha}{\rho^2} j_\Phi^{(n)} + \frac{in}{\rho} \left[\frac{\partial j_z^{(n)}}{\partial z} + \frac{\partial j_\rho^{(n)}}{\partial \rho} - \frac{\alpha^*}{\alpha} j_\rho^{(n)} \right] \right\};$$

$$f_m(M) = -\frac{2n^2}{\alpha\rho} j_z^{(n)} + \frac{\partial j_z^{(n)}}{\partial\rho} - \frac{\partial j_\rho^{(n)}}{\partial z}.$$

2. На границах разрыва $\sigma(\rho, z)$ выполнены условия, которые следуют из непрерывности касательных компонент поля:

$$[\bar{U}] = 0; \quad (3)$$

$$\left[\hat{Z} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \nu} \right] = \frac{n}{\omega \rho} \left[\frac{1}{\alpha} \right] \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \tau} + \frac{\bar{U}}{\rho} \cos(\widehat{\nu z}) \right) - \left[\hat{Z} \right] \frac{\bar{U}}{\rho} \cos(\widehat{\nu \rho});$$

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu}{\alpha} \\ -i\sigma & 0 \end{pmatrix};$$

τ, ν — касательная и нормаль к границе разрыва.

3. На оси симметрии $OZ (\rho \rightarrow 0)$ выполнено краевое условие

$$\bar{U}(\rho, z) = \begin{cases} O(\rho^{|n|-1}) & (n \neq 0), \\ 0 & (n = 0). \end{cases}$$

4. На бесконечности при $r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \rightarrow \infty$ потребуем убывания $\bar{U}(\rho, z)$ (в проводящей среде)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \bar{U}(M) = 0.$$

Чтобы свести поставленную задачу (1) — (4) к одномерным интегральным уравнениям по наименьшему числу границ, получим интегральные представления решения в азимутальной полуплоскости для горизонтально-однородной среды. Это требует построения соответствующей матрицы фундаментальных решений

$$\hat{G}(M, M_0) = \begin{pmatrix} G_{11}(M, M_0) & G_{12}(M, M_0) \\ G_{21}(M, M_0) & G_{22}(M, M_0) \end{pmatrix},$$

обладающей следующими свойствами:

1) удовлетворяет системам уравнений:

$$L \bar{V}_1 = 0 \text{ и } L \bar{V}_2 = 0 \text{ по точке } M,$$

$$M \bar{W}_1 = 0 \text{ и } M \bar{W}_2 = 0 \text{ по точке } M_0,$$

где

$$\bar{W}_1 = \{G_{11}, G_{12}\}, \bar{W}_2 = \{G_{21}, G_{22}\},$$

$$\bar{V}_1 = \{G_{11}, G_{21}\}, \bar{V}_2 = \{G_{12}, G_{22}\},$$

M — дифференциальное выражение, сопряженное L ;

2) при совпадении аргументов $G_{11}(M, M_0)$ и $G_{22}(M, M_0)$ имеют логарифмическую особенность, G_{12} и G_{21} — регулярны;

3) в окрестности оси симметрии выполнены условия

$$G_{ik} = O(\rho_0^{|n|+2}), \quad \rho_0 \rightarrow 0, \quad \rho \text{ фиксировано.}$$

$$G_{ik} = \begin{cases} O(\rho^{|n|-1}) & (n \neq 0), \\ 0 & (n = 0), \end{cases} \quad \rho \rightarrow 0, \quad \rho_0 \text{ фиксировано;}$$

4) на границах слоев выполнены условия сопряжения по обеим точкам:

а) по точке $M(\rho, z)$:

$$[\bar{W}_1] = 0,$$

$$[\bar{W}_2] = 0,$$

$$\left[-\frac{\mu}{\alpha} \frac{\partial \bar{W}_2}{\partial z} + \frac{n}{\omega \rho \alpha} \left(\frac{\partial \bar{W}_1}{\partial \rho} + \frac{\bar{W}_1}{\rho} \right) \right] = 0,$$

$$\left[\frac{\sigma}{\alpha} \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial z} + \frac{n}{\omega \rho \alpha} \left(\frac{\partial \bar{W}_2}{\partial \rho} + \frac{\bar{W}_2}{\rho} \right) \right] = 0;$$

б) по точке $M_0(\rho_0, z_0)$:

$$\left[\frac{\bar{W}_j}{\hat{Z}} \right] = 0,$$

$$\left[\frac{n}{i \gamma \rho_0} \frac{\partial \bar{W}_j}{\partial \rho_0} - \frac{\partial \bar{W}_j}{\partial z_0} + 2i n \bar{W}_j \left(\frac{1}{\rho_0^2 \hat{\gamma}} + \frac{\hat{\gamma}}{\alpha_0} \right) \right] = 0, \quad j = 1, 2,$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -i \omega \mu_0 \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

5) на бесконечности — условия убывания ($\text{Im } k > 0$)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r G_{ik} = 0.$$

В работе [6] проведено построение матрицы фундаментальных решений для горизонтально-однородной среды, использующее тензорную функцию точечного источника слоистой среды, полученной в [7].

Получим интегральные уравнения. Разобьем рассматриваемую полуплоскость Π на две области S_I и S_{II} , разделенные границей T слоя с осесимметричным поднятием. При этом параметры $k_{1,2}(z) = i \omega \mu_0 \sigma(z)$ допускают непрерывное продолжение на всю полуплоскость Π и результаты продолжения $\tilde{k}_{1,2}(z)$ равны:

$$\tilde{k}_1 = \begin{cases} k_0, & z > 0, \\ k_1, & -h_1 < z < 0, \text{ (для области } S_I), \\ k_2, & z < -h_1 \end{cases}$$

$$\tilde{k}_2 = \begin{cases} k_3, & -h_3 < z, \\ k_4, & z < -h_3 \text{ (для области } S_{II}). \end{cases}$$

Таким образом, области S_I и S_{II} заполнены горизонтально-однородными средами, допускающими построение матриц фундаментальных решений.

Будем искать решение $\bar{U}(M)$ задачи в виде потенциалов про-

$$\bar{U}(M) = \begin{cases} \int_T \hat{G}_1(M, M_0) \bar{\xi}(M_0) dM_0 + \bar{U}^0(M), & M \in S_I, \\ \int_T \hat{G}_2(M, M_0) \bar{\Theta}(M_0) dM_0, & M \in S_{II}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\hat{G}_1$ и $\hat{G}_2$ — матрицы фундаментальных решений для сред областей S_I и S_{II} .

$$\bar{\xi} = \{\xi_1, \xi_2\}, \quad \bar{\Theta} = \{\Theta_1, \Theta_2\}$$

неизвестные плотности потенциалов,

$$T = \begin{cases} z = l(\rho), & 0 \leq \rho \leq B, \\ z = -h_2, & B < \rho < \infty. \end{cases}$$

Подставляя (4) в граничные условия (3), получим систему одномерных интегральных уравнений:

$$\int_T \{\hat{K}_{11}(M, M_0) \bar{\xi}(M_0) + \hat{K}_{12}(M, M_0) \bar{\Theta}(M_0)\} dM_0 = \bar{U}^0(M), \quad (5)$$

$$2\pi(\hat{Z}_1(M) \bar{\xi}(M) + \hat{Z}_2(M) \bar{\Theta}(M)) + \int_T \{\hat{K}_{21} \bar{\xi}(M_0) + \hat{K}_{22} \bar{\Theta}(M_0)\} dM_0 = \hat{Z}_1 \frac{\partial \bar{U}^0(M)}{\partial \nu},$$

где $\hat{K}_{11} = -\hat{G}_1(M, M_0)$; $\hat{K}_{12} = \hat{G}_2(M, M_0)$;

$$\hat{K}_{21} = \hat{Z}_1 \frac{\partial \hat{G}_1}{\partial \nu}; \quad \hat{K}_{22} = [\hat{Z}] \frac{\hat{G}_2}{\rho} \cos(\widehat{\nu \rho}) - \hat{Z}_2 \frac{\partial \hat{G}_2}{\partial \nu} - \frac{n}{\omega \rho} \left[\frac{1}{\alpha} \right] \left(\frac{\partial \hat{G}_2}{\partial \tau} + \frac{\hat{G}_2}{\rho} \cos(\widehat{\nu \hat{z}}) \right),$$

[.] — разность предельных значений на контуре.

Отметим, что полученные интегральные уравнения являются одномерной системой уравнений 1 рода по полубесконечному промежутку. Ядра интегральных операторов строятся из элементов МФР $\hat{G}_1$ и $\hat{G}_2$, учитывающих слоистую структуру среды.

При численном решении систему интегральных уравнений по полубесконечному промежутку сведем к системе на некотором конечном промежутке, учитывая характер поведения решения на бесконечности при $\rho \rightarrow \infty$. Так, решение системы $\bar{\xi}(M)$, $\bar{\Theta}(M)$ при $\rho \rightarrow \infty$, когда влияние поднятия границы слоя невелико, стремится к постоянным значениям $\bar{\xi}^0$, $\bar{\Theta}^0$ плотностей потенциалов в отсутствие поднятия.

Тогда систему интегральных уравнений (5) можно заменить следующей:

$$\begin{aligned} \int_{T_R} \{\hat{K}_{11} \bar{\xi} + \hat{K}_{12} \bar{\Theta}\} dM_0 &= \bar{U}^0 - \bar{\xi}^0 \int_R^{\infty} \hat{K}_{11} d\rho_0 - \bar{\Theta}^0 \int_R^{\infty} \hat{K}_{12} d\rho_0, \\ 2\pi(\hat{Z}_1 \bar{\xi}(M) + \hat{Z}_2 \bar{\Theta}(M)) + \int_{T_R} \{\hat{K}_{21} \bar{\xi} + \hat{K}_{22} \bar{\Theta}\} dM_0 &= \\ &= \hat{Z}_1 \frac{\partial \bar{U}^0}{\partial \nu} - \bar{\xi}^0 \int_R^{\infty} \hat{K}_{21} d\rho_0 - \bar{\Theta}^0 \int_R^{\infty} \hat{K}_{22} d\rho_0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$T_R = \begin{cases} z = l(\rho), & 0 \leq \rho \leq B, \\ z = -h_2, & B < \rho \leq R. \end{cases}$$

На основе кусочно-постоянной аппроксимации плотности потенциалов $\bar{\xi}(M)$ и $\bar{\Theta}(M)$ система уравнений (6) сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Решая эту систему и определяя вектор-решение, можно найти различные характеристики электромагнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Мершикова Н. А. Метод интегральных уравнений при моделировании электромагнитных зондирований неоднородных сред. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1980. Вып. 32, с. 200—215.
2. Дмитриев В. И., Барашков И. С. О расчете магнитотеллурического поля магнитной поляризации в двумерно-неоднородной среде. — В кн.: Численные методы в геофизических исследованиях. М.: Изд-во МГУ, 1979.
3. Дмитриев В. И., Барашков И. С. Метод численного исследования магнитотеллурических полей в слоистой среде при наличии осесимметричной неоднородности. — В кн.: Численные методы в геофизических исследованиях. М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 3—15.
4. Захаров Е. В. Метод решения граничных задач электродинамики для неоднородных сред с осевой симметрией. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1978. Вып. 28, с. 232.
5. Еремин Ю. А., Захаров Е. В., Несмеянова Н. И. Метод фундаментальных решений в задачах дифракции электромагнитных волн на телах вращения. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1980. Вып. 32, с. 28—44.
6. Барашков И. С., Дмитриев В. И. Метод двумерных интегральных уравнений расчета магнитотеллурических полей в слоистой среде при наличии осесимметричной неоднородности. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1982. Вып. 36, с. 14—27.
7. Дмитриев В. И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. М.: Изд-во МГУ, 1969.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Решению задач дифракции на телах вращения в однородной среде посвящено большое число работ (см., например, [1—2]). В основе построения вычислительных алгоритмов для этого класса дифракционных задач лежат векторные представления электромагнитных полей в произвольной трехмерной области, заполненной однородной средой (формула Стреттона — Чу или ее аналоги), а симметрия вращения используется только на последующих этапах алгоритмизации. Если тело вращения расположено в слоистой среде, то такой подход требует применения весьма сложного тензорного аппарата и построения матриц фундаментальных решений большой размерности.

Известно, однако, что для структур, обладающих плоскостной симметрией (параметры среды не зависят от одной из декартовых координат), векторные задачи дифракции непосредственно сводятся к граничным задачам для уравнения Гельмгольца на плоскости.

В данной работе рассмотрен другой достаточно широкий класс задач дифракции электромагнитных волн в структурах, обладающих симметрией вращения [3—5]. Этот класс задач сведен к граничным задачам на полуплоскости для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа. Переход к задачам на полуплоскости дает возможность формализовать процесс алгоритмизации рассматриваемого класса дифракционных задач и, в частности, получить для них достаточно простые по структуре одномерные интегральные уравнения.

Пусть имеется среда, обладающая симметрией вращения, диэлектрическая проницаемость $\epsilon(M)$ и магнитная проницаемость $\mu(M)$ которой являются комплекснозначными, кусочно-постоянными функциями переменных ρ и z — цилиндрической системы координат $\{\rho, \varphi, z\}$, связанной с осью вращения. В дальнейшем под такой средой будем понимать одну из следующих трех структур: плоскопараллельная слоистая среда (границы разрыва — плоскости $z = z_i$), цилиндрическая слоистая среда (границы разрыва — цилиндры $\rho = \rho_i$), сферическая слоистая среда (границы разрыва — сферы $r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = r_i$). В одном из слоев соосно со средой расположено однородное (ϵ_0, μ_0) тело вращения, ограниченное гладкой поверхностью S с образующей Γ . В среде возбуждается гармоническое во времени электромагнитное поле ($e^{-i\omega t}$), источники которого расположены вне S .

Задача состоит в определении векторов электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$, удовлетворяющих уравнениям Максвелла, условиям

непрерывности касательных компонент на всех границах разрыва ϵ и μ и убыванию на бесконечности: $\lim_{R \rightarrow \infty} R\vec{E} = 0, \lim_{R \rightarrow \infty} R\vec{H} = 0$.

Будем предполагать, что характеристики задачи обеспечивают существование и единственность решения поставленной задачи. В дальнейшем под векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$ вне S будем понимать дифракционное поле, возникающее в слоистой среде при наличии тела вращения, а поле $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ в слоистой среде при отсутствии тела будем считать известным.

Представим векторы $\vec{E}\{E_\rho, E_\varphi, E_z\}, \vec{H}\{H_\rho, H_\varphi, H_z\}$ в виде рядов Фурье по азимутальной координате φ , после чего из уравнений Максвелла n -е гармоники цилиндрических компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ выражаются с помощью n -х гармоник азимутальных компонент $E_\varphi^{(n)}(M) = u(M)$ и $H_\varphi^{(n)}(M) = v(M)$, которые являются решениями граничной задачи на полуплоскости $\Pi\{\rho > 0, \varphi = 0, -\infty < z < \infty\}$ (при фиксированном n).

I. Удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\widehat{L}\vec{W} = 0;$$

$$\widehat{L} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}; \quad \vec{W} = \begin{pmatrix} E_\varphi^{(n)} \\ H_\varphi^{(n)} \end{pmatrix};$$

$$L_{11} = L_{22} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \left(1 - \frac{2n^2}{\alpha}\right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \left(\alpha - \frac{\alpha^*}{\alpha}\right) \frac{1}{\rho^2};$$

$$L_{12} = \mu\Theta(M); \quad L_{21} = -\epsilon\Theta(M); \quad \Theta(M) = \frac{2\omega n}{\alpha} \frac{\partial}{\partial z}; \quad (1)$$

$$\alpha = k^2 \rho^2 - n^2, \quad k^2(M) = \begin{cases} \omega^2 \mu_0 \epsilon_0, & M \in \Omega, \\ \omega^2 \mu(M) \epsilon(M), & M \in \Omega, \end{cases}$$

Ω — сечение тела азимутальной полуплоскостью Π .

II. На границах разрыва слоистой среды:

$$[\vec{W}] = 0; \quad \left[\widehat{Z} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \nu}\right] - \psi(\vec{W}) = 0; \quad (2)$$

На контуре Γ :

$$[\vec{W}] = -\vec{W}^0; \quad \left[\widehat{Z} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \nu}\right] - \psi(\vec{W}_i) = -\widehat{Z}_e \frac{\partial \vec{W}^0}{\partial \nu}. \quad (3)$$

Здесь индексы i и e означают, что берутся значения изнутри или извне тела;

$$\psi(\vec{W}) = \frac{n}{\omega \rho} \left[\frac{1}{\alpha}\right] \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial \tau} + \frac{\vec{W}}{\rho} \cos(\widehat{\nu z})\right) - [\widehat{Z}] \frac{\vec{W}}{\rho} \cos(\widehat{\nu \rho}),$$

$\tau, \bar{\nu}$ — векторы касательной и внешней нормали;

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu}{a} \\ -\frac{\varepsilon}{a} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{W}^0 = \begin{pmatrix} E_{\Phi}^{0(n)} \\ H_{\Phi}^{0(n)} \end{pmatrix}.$$

Если тело — идеальный проводник, то граничные условия на Γ распадаются

$$u = -u^0; \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + \frac{\cos(\widehat{\nu \rho})}{\rho} \right) v = - \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + \frac{\cos(\widehat{\nu \rho})}{\rho} \right) v^0.$$

III. Условия на оси симметрии θZ (при $\rho \rightarrow 0$):

$$\bar{W}(\rho, z) = O(\rho^{|n|-1}) \quad (n \neq 0), \quad \bar{W}(\rho, z) = 0 \quad (n = 0).$$

IV. Условия на бесконечности при $r \rightarrow \infty$:

$$\bar{W} = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Дальнейшая редукция поставленной скалярной задачи (I—IV) к интегральным уравнениям основана на получении интегрального представления решения в полуплоскости II и требует построения матриц фундаментальных решений (МФР) [6].

Введем МФР второго порядка

$$\hat{G}(M, M_0) = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Элементы матрицы удовлетворяют по координатам разных точек системе дифференциальных уравнений (1) и сопряженной ей системе (в силу несамосопряженности дифференциального выражения L). При совпадении аргументов G_{11} и G_{22} имеют особенность типа $2 \ln \frac{1}{r}$ независимо от индекса n ($r = [(\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}$); недиагональные элементы регулярны. В окрестности линии $\rho = 0$ элементы матрицы имеют следующий характер поведения:

$$\left. \begin{aligned} G_{ij} &= O(\rho_0^{|n|+2}) \text{ при } \rho_0 \rightarrow 0 \text{ и фиксированном } \rho, \\ G_{ij} &= O(\rho^{|n|-1}) \quad (n \neq 0), \\ G_{ij} &= O(\rho) \quad (n = 0), \end{aligned} \right\} \text{ при } \rho \rightarrow 0 \text{ и фиксированном } \rho_0.$$

На границах слоев выполняются условия сопряжения по обеим точкам, на бесконечности выполняются условия убывания

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r G_{ij} = 0, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}.$$

В частности для однородной среды МФР имеет вид

$$\begin{aligned} G_{11} &= G_{22} = \frac{\rho^3}{a} \left[k^2 \frac{S_{n-1} + S_{n+1}}{2} - \frac{n^2}{\rho \rho_0} S_n \right]; \\ G_{12} &= \mu \Theta(M, M_0); \quad G_{21} = -\varepsilon \Theta; \quad \Theta = \frac{\omega \rho^3}{a} \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{S_{n-1} - S_{n+1}}{2}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$S_n = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-in\psi} d\varphi.$$

Построение МФР рассматриваемых слоистых сред сводится к решению краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и основано на возможности представления функций S_n или в виде интегральных преобразований по ρ или z , или в виде рядов по присоединенным функциям Лежандра. При этом особенность при совпадении аргументов выделяется с помощью МФР однородной среды (5) [7].

Применим МФР для получения интегральных уравнений. Будем искать решение $\bar{W}$ в виде потенциалов простого слоя.

$$\bar{W}(M) = \int_{\Gamma} \bar{G}_1 \bar{\eta}_1 dL_{M_0}, \quad M \in \Omega, \quad (6)$$

$$\bar{W}(M) = \int_{\Gamma} \bar{G}_2 \bar{\eta}_2 dL_{M_0}, \quad M \in \bar{\Omega}.$$

Здесь G_1 и G_2 — МФР соответственно внутренней и внешней сред, $\bar{\eta}_1 = \{\eta_1^{(1)}, \eta_1^{(2)}\}$, $\bar{\eta}_2 = \{\eta_2^{(1)}, \eta_2^{(2)}\}$ — неизвестные вектор-функции.

Представления (6) удовлетворяют всем условиям задачи за исключением условий на контуре Γ . Подставляя (6) в условия (II), получим систему интегральных уравнений по контуру Γ для определения η_1, η_2 :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \{\bar{G}_2 \bar{\eta}_2 - \bar{G}_1 \bar{\eta}_1\} dL_{M_0} = -W^0(M), \\ & 2\pi (\bar{Z}_1 \bar{\eta}_1(M) + \bar{Z}_2 \bar{\eta}_2(M)) - \int_{\Gamma} \left\{ \bar{Z}_2 \frac{\partial \bar{G}_2}{\partial \nu} \bar{\eta}_2 - \left[\bar{Z}_1 \frac{\partial \bar{G}_1}{\partial \nu} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{n}{\omega \rho} \left[\frac{1}{a} \right] \frac{\partial \bar{G}_1}{\partial \tau} + \bar{G}_1 \left(\frac{n}{\omega \rho^3} \left[\frac{1}{a} \right] \cos(\widehat{\nu z}) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - (\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) \frac{\cos(\widehat{\nu \rho})}{\rho} \right) \right] \bar{\eta}_1 \right\} dL_{M_0} = \bar{Z}_2 \frac{\partial \bar{W}^0}{\partial \nu}. \end{aligned} \quad (7)$$

Система (7) содержит интегралы только по образующей тела вращения, а слоистая структура вмещающей среды учитывается МФР $G_2(M, M_0)$, из элементов которой строятся ядра интегральных операторов. Кроме того, структура ядер достаточно проста (они содержат элементы G_1 и G_2 , их нормальные и касательные производные), что допускает применение эффективных численных алгоритмов.

1. Васильев Е. Н. Алгоритмизация задач дифракции на основе интегральных уравнений. — В кн.: Научно-методические статьи по прикладной электродинамике. М.: Высшая школа, 1977. Вып. 1, с. 94—128.
2. Еремин Ю. А., Ильинский А. С., Свешников А. Г. Метод неортогональных рядов в задачах дифракции электромагнитных волн. — ДАН, 1979, т. 247, № 6, с. 1351—1354.
3. Захаров Е. В. Метод решения граничных задач электродинамики для неоднородных сред с осевой симметрией. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1978. Вып. 28, с. 232—238.
4. Еремин Ю. А., Захаров Е. В., Несмеянова Н. И. Метод фундаментальных решений в задачах дифракции электромагнитных волн на телах вращения. В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1980. Вып. 32, с. 28—44.
5. Захаров Е. Н., Несмеянова Н. И. Метод решения осесимметричных задач дифракции электромагнитных полей. — ЖВМ и МФ, 1978, № 2, с. 512—516.
6. Барашков И. С., Дмитриев В. И. Метод двумерных интегральных уравнений расчета магнитотеллурического поля в слоистой среде при наличии осесимметричной неоднородности. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1982. Вып. 36, с. 14—27.
7. Несмеянова Н. И. О построении фундаментальных решений для задач дифракции произвольного электромагнитного поля на телах вращения. — В кн.: Численные методы в геофизике. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 33—41.

А. С. ИЛЬИНСКИЙ, М. М. МУТАЛЛИМОВ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД В ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ЯЧЕИСТЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

Исследование распространения электромагнитных волн в диафрагмированных и гофрированных волноводах является актуальной проблемой математической физики, поскольку устройства на основе периодических волноводов широко применяются при разработке замедляющих систем электронных приборов, в ускорителях элементарных частиц [1]. Гофрированные волноводы нашли применение в технике сверхвысоких частот и антенной технике [2].

Методы расчета ячеистых волноводов разрабатываются достаточно давно. Одной из первых работ, посвященных расчету таких волноводов, является работа [3], в которой рассмотрена задача определения коэффициента фазы симметричной волны в круглом гофрированном волноводе с прямоугольной формой гофра методом частичных областей. Достаточно полная систематизация методов определения характеристик распространения электромагнитных волн в ячеистых волноводах дана в работе [4]. Несмотря на широкое использование спектральных методов при расчетах ячеистых волноводов вопросы их обоснования требуют исследования.

В настоящей работе рассмотрен спектральный метод расчета

пряженных операторов [14—16] и исследовать вопрос о существовании собственных чисел оператор-функций [17]. Поскольку оператор $A(\gamma)$ является вполне непрерывным отображением из l_2 в l_2 , то для приближенного решения задачи применим метод усечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник по дифрагмированным волноводам / Вальднер О. А., Собенин Н. П., Зверев Б. В., Щедрий И. С. М.: Атомиздат, 1977.
2. Ефимов И. Е., Шермина Г. А. Волноводные линии передачи. М.: Связь, 1979.
3. Walkinshaw W. Notes on «Wave guides for slow waves». — J. Appl. Phys., 1949, v. 20, N 6, p. 634—636.
4. Краснушкин П. Е., Ломнев С. П. Методы точного расчета однородных ячеистых волноводов. — Радиотехника и энергетика, 1966, т. 11, № 6, с. 1051—1065.
5. Gans M. I. A general Proof of Floquet's Theorem. — IEEE Trans. 1965, MTT-13, v. 3, p. 384—385.
6. Шишмарев И. А. Введение в теорию эллиптических уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1979.
7. Stummel F. Perturbation of domains in elliptic boundary value problems. — Lect. Notes Math., 1976, v. 503, p. 106—136.
8. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.
9. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Советское радио, 1957.
10. Толстов Г. П. Ряды Фурье. М.: Наука, 1980.
11. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978.
12. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Фinitные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.
13. Чернокожин Е. В., Шестопалов Ю. В. О фредгольмовости интегрального оператора с ядром, имеющим слабую особенность. — Вестн. МГУ. Сер. Вычисл. матем. и киберн., 1982, с. 23—28.
14. Маркус А. С. О голоморфных оператор-функциях. — ДАН, 1958, т. 119, № 6, с. 1099—1102.
15. Маркус А. С., Сигал Е. И. О кратности характеристического числа аналитической оператор-функции. — Матем. исследования, 1970, т. 5, вып. 3, с. 129—147.
16. Трофимов В. П. О корневых подпространствах операторов, аналитически зависящих от параметра. — Матем. исследования, 1968, т. 5, вып. 3, с. 117—125.
17. Вайнник Г. М., Карма О. О. О скорости сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра. — ЖВМ и МФ, 1974, т. 14, № 6, с. 1393—1408.

Е. В. ЗАХАРОВ, И. Г. ЯРМАХОВ

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ МНОГОЭЛЕКТРОДНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ СКВАЖИН

В связи с усложнением горно-геологических условий в ходе освоения новых месторождений нефти и газа, бурением глубоких и сверхглубоких скважин возникает необходимость создания более

совершенных математических моделей при геофизических исследованиях (каротаже) скважин.

Целью работы является изучение математической модели одного нового и имеющего большое практическое значение в общей теории геофизических исследований скважин метода бокового каротажа (многоэлектродного зондирования с регулируемой электрического поля). Численное исследование полей постоянного тока, создаваемых многоэлектродными установками бокового каротажа, позволяет дать количественную оценку вертикальной разрешающей способности и радиальную характеристику зондов бокового каротажа в средах с произвольной вертикальной и радиальной неоднородностью. Математическое моделирование обеспечивает оперативное изучение характера распределения электрического поля многоэлектродных зондов, что особенно важно при проектировании новых установок.

Околоскважинное пространство является существенно неоднородным. Электропроводность изменяется как вдоль оси скважины, так и в зависимости от расстояния до этой оси. Характер электрического поля, возбуждаемого и измеряемого в скважине, зависит от строения горных пород, пересекаемых скважиной, а также от зоны проникновения и глинистой корки на стенках скважины, образующихся при проникновении фильтрата бурового раствора в проницаемые пласты. Кроме того, электрическое поле зависит от типа и конструктивных особенностей зонда бокового каротажа. При этом толщина часто чередующихся пластов с различным удельным сопротивлением достигает 10 см, глубина неоднородной зоны проникновения изменяется от одного до нескольких десятков радиусов скважины, длина многоэлектродного зонда более чем в 200 раз превышает его радиус.

Математическая постановка задачи, позволяющая достаточно полно исследовать закономерности поведения поля для указанных моделей среды и источников, относится к краевой задаче для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами в неоднородном осесимметрическом пространстве [1]. Практически единственным методом, позволяющим эффективно находить решение данной краевой задачи, является метод конечных разностей.

Зонд девятиэлектродного бокового каротажа (рис. 1) состоит из двух цилиндрических экранированных электродов B_1 и B_2 длиной по 2,2 м, разделенных изолятором длиной 2,8 м, в центре которого расположен кольцевой электрод A_0 . Симметрично относительно центра A_0 на этом изоляторе расположены еще три пары кольцевых электродов: измерительные M_1M_2 , N_1N_2 и внутренние экранирующие электроды A_1A_2 . Электроды B_1 и B_2 , A_1 и A_2 , M_1 и M_2 , N_1 и N_2 попарно соединены между собой. Через экранированные электроды B_1 и B_2 , A_1 и A_2 пропускается ток той же полярности (режим с большим радиусом исследования БКБ), что и через центральный электрод A_0 , причем сила тока через экранированные электроды автоматически поддерживается такой, чтобы разность потенциалов между электродами M_1 и N_1 (следовательно, и между M_2 и

N_2) равнялась нулю. Электрод противоположной полярности удален на значительное расстояние от зонда. Измеряются потенциал U какого-либо из измерительных электродов и сила тока I_0 через центральный электрод A_0 ; кажущееся удельное сопротивление оп-

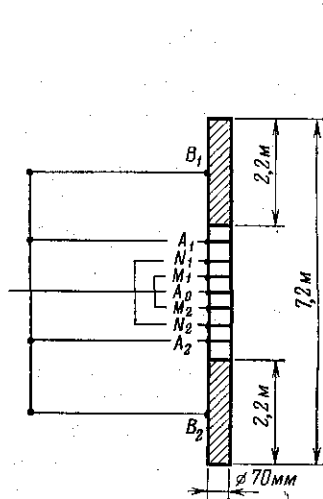


Рис. 1. Зонд девятиэлектродного бокового каротажа

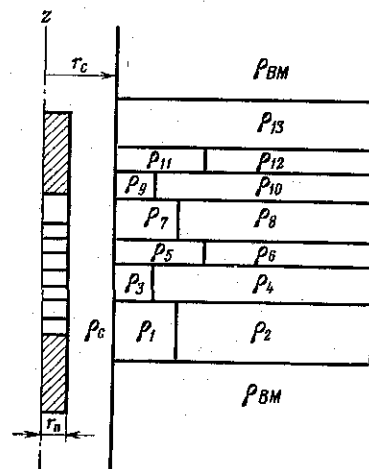


Рис. 2. Модель неоднородной среды, обладающей осевой симметрией

ределяется по формуле $\rho_k = KU/I_0$, где K — коэффициент зонда, зависящий от расстояний между электродами, выбираемый так, чтобы в однородной среде с удельным сопротивлением $\rho_n = \rho_k$ (для зонда на рис. 1 $K=0,7$).

Обычно при многоэлектродном боковом каротаже $I_0 = \text{const}$ и записывается кривая U с глубиной, представляющая в некотором масштабе кривую сопротивления.

В том случае, когда внешние экранирующие электроды B_1 и B_2 используются в качестве обратных токов электродов, установка превращается в девятиэлектродный зонд с малым радиусом исследования БКм.

Пусть цилиндрический зонд с радиусом r_n находится в скважине радиуса r_c . Предполагается, что область Ω распределения потенциала обладает осевой симметрией и состоит из совокупности зон с кусочно-постоянными значениями коэффициента проводимости $\sigma = 1/\rho$, где ρ — удельное сопротивление. Ось симметрии совпадает с осью скважины и прибора, направлена вертикально вверх (рис. 2). Область Ω ограничена цилиндрической поверхностью Γ_R радиуса R и двумя горизонтальными плоскостями $\Gamma_{z=0}$, $\Gamma_{z=H}$. Поскольку высота всех кольцевых электродов значительно меньше расстояний между ними, мы будем полагать, что внутренние электроды A_0 , A_1 , A_2 , M_1 , M_2 , N_1 , N_2 — это окружности, расположенные на изоляторе.

В области Ω распределение потенциала $U(r, z)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma(r, z) r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma(r, z) \frac{\partial U}{\partial z} \right) + I_0 \delta(r, r_0) = 0, \quad (1)$$

где $\delta(r, r_0)$ — дельта функция Дирака, $r_0 = (r_0, z_0)$ — координата электрода A_0 .

На внутренних границах γ раздела двух сред должны выполняться условия непрерывности потенциала и нормальной составляющей тока:

$$\lim [U(r - \varepsilon n) - U(r + \varepsilon n)] = 0 \quad \text{при } r \in \gamma; \quad (2)$$

$$\lim [j_n(r - \varepsilon n) - j_n(r + \varepsilon n)] = 0 \quad \text{при } r \in \gamma;$$

$$\partial U / \partial r = 0 \text{ на оси } Oz \text{ и на поверхности изолятора}; \quad (3)$$

$$U(r, z) = U_A, U_B \text{ на экранирующих электродах } A_1 A_2, B_1 B_2;$$

$$U(r, z) = 0 \text{ при } (r, z) \in \Gamma_{z=0}, \Gamma_{z=H}, \Gamma_R. \quad (4)$$

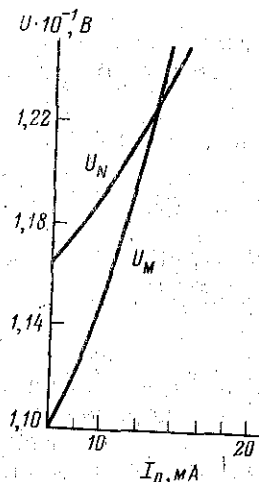
Уравнение (1) с краевыми условиями (2), (3), (4) решается методом конечных разностей. Основной особенностью данной краевой задачи является наличие дополнительных условий (условие регулировки зонда) на распределение потенциала в области задания неоднородного дифференциального уравнения: в некоторой совокупности попарно непересекающихся подобластей величина потенциала должна быть равна одному и тому же значению, причем это заранее не заданное значение потенциала устанавливается посредством выбора соответствующей величины тока I_0 на электроде A_0 . Для нахождения решения задачи (1) — (4) и реализации условия регулировки зонда строится многошаговый вычислительный процесс, подробно описанный в работе [1]. Там же проведено сопоставление результатов численного моделирования с данными аналогового моделирования, показавшее высокую эффективность принятой математической модели.

Рассмотрим теперь весьма важный в практике геофизических исследований скважин вопрос о влиянии неоднородного распределения удельного сопротивления $\rho_{эл}(r)$ в зоне проникновения фильтрата бурового раствора на результаты многоэлектродного каротажа.

Пусть положение токового электрода A_0 при перемещении зонда вдоль оси скважины совпадает с серединой горизонтального пласта конечной мощности $h=2,8$ м с удельным сопротивлением $\rho_n/\rho_c=100$, находящегося в однородной вмещающей среде с сопротивлением $\rho_{вм}/\rho_c=10$. Рассматривались два варианта проникновения: понижающее, когда в зоне проникновения $\rho_{эл}(r) \leq \rho_n$; повышающее, когда $\rho_{эл}(r) \geq \rho_n$.

В результате численного исследования установлено, что на начальном этапе процесса формирования зоны проникновения, когда радиус зоны проникновения $r_{эл} < 4$, показания зондов БКб и БКм

изменяются незначительно от вида функции распределения $\rho_{\text{эл}}(r)$ в зоне проникновения. С увеличением глубины проникновения возрастает зависимость ρ_k от вида функции $\rho_{\text{эл}}(r)$ в зоне проникновения. Например, для линейного закона возрастания $\rho_{\text{эл}}(r)$ от минимального значения $10\rho_c$ до $\rho_n=100\rho_c$ при $1 \leq r \leq 7$ значение $\rho_k/\rho_c=45,75$, тогда как $\rho_k/\rho_c=34,53$ для нелинейной кривой $\rho_{\text{эл}}(r)$ из работы [2].



Рассмотрим зависимость показаний зондов бокового каротажа от вертикальной неоднородности исследуемых пластов. Пусть горизонтальный пласт мощностью 7,2 м состоит из тонких пластов толщиной по 13,3 см с чередующимся удельным сопротивлением $\rho_1/\rho_c=4$, $\rho_2/\rho_c=100$. Такая модель соответствует нефтеносному пласту с удельным сопротивлением $\rho/\rho_c=100$, имеющему непроницаемые глинистые прослои с удельным сопротивлением $\rho/\rho_c=4$. Пусть

Рис. 3. Зависимость потенциалов на измерительных электродах типа M и N от величины тока I_0 на электроде A_0

положение токового электрода A_0 при перемещении зонда вдоль оси скважины совпадает с серединой данного пласта мощностью 7,2 м, находящегося во вмещающих породах с сопротивлением $\rho_{\text{вм}}/\rho_c=51$. Кажущееся сопротивление определяется по расчетной диаграмме зависимости потенциалов на электродах типа M и N при выполнении условия регулировки зонда (рис. 3 — точка пересечения двух кривых). Отсюда для кажущегося сопротивления имеем $\rho_k/\rho_c=0,7 U_{M(N)}/I_0=6,76$. При наличии зоны проникновения фильтра бурового раствора в проницаемых пропластках удельное сопротивление, измеряемое зондом бокового каротажа, определяется в основном слоями с низким удельным сопротивлением и незначительно изменяется при наличии зоны проникновения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров Е. В., Ярмахов И. Г. Численное исследование моделей теории бокового каротажа методом конечных разностей. — В кн.: Математическое моделирование задач геофизики. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 19—30.
2. Ярмахов И. Г. Численное исследование процесса формирования зоны проникновения промывочной жидкости. — В кн.: Численные методы в геофизике. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 87—104.

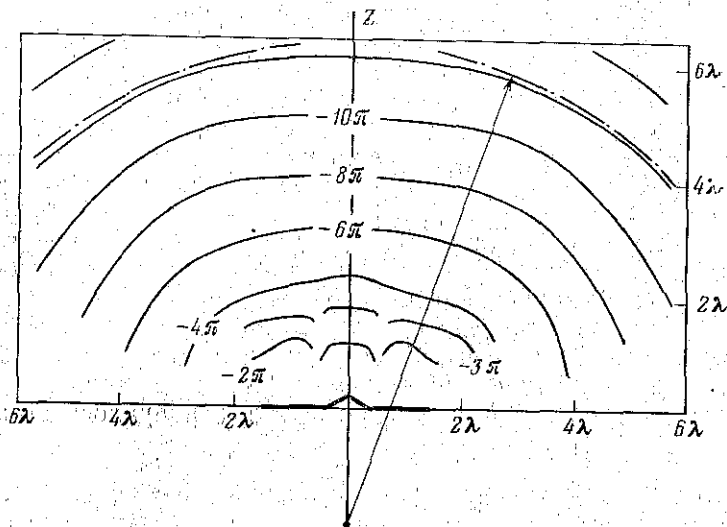


Рис. 5

В заключение автор благодарит Е. В. Захарова и Ю. В. Пименова за постоянное внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Clarricoats P. I. B., Poulton G. T. High-efficiency microwave reflector antennas. — A review. Proceedings of the IEEE, 1977, v. 65, N 10, p. 1470—1504.
2. Давыдов А. Г. Метод решения задач об излучении осесимметричных антенн с произвольным возбуждением. — В кн.: Сборник тез. докл. Научно-технич. конференции, посвященной Дню радио. М.: Радио и связь, 1981. Ч. I, с. 11—12.
3. Давыдов А. Г., Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях вращения. — ДАН СССР, 1983, т. 269, № 2, с. 329—333.
4. Антенны (Современное состояние и проблемы) / Под ред. Л. Д. Бахраха и Д. И. Воскресенского. М.: Советское радио, 1979.

Е. В. ЗАХАРОВ, Е. В. НИКИТИНА

ОБ ОДНОМЕРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ II РОДА В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В последнее время для численного анализа дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих незамкнутых поверхностях (экранах) был успешно применен аппарат одномерных сингулярных интегродифференциальных уравнений I рода [1, 2]. В основе эффективной алгоритмизации этого класса интеграль-

ных уравнений лежит рациональная схема аппроксимации интегродифференциального оператора. Относительная простота программной реализации данной методики делает актуальной проблему сведения и других классов дифракционных задач к одномерным интегродифференциальным уравнениям такого типа.

В настоящей работе к одномерным интегродифференциальным уравнениям II рода сведены задачи дифракции электромагнитных волн на однородных диэлектрических телах вращения. Без ограничения общности метода рассмотрение проведено для случая осесимметричного возбуждения. При выводе используются формулы Грина и фундаментальные решения дифференциальных операторов эллиптического типа в полуплоскости.

Как известно [3], осесимметричная задача дифракции электромагнитных волн на однородном диэлектрическом теле вращения эквивалентна следующей граничной задаче в полуплоскости:

$$\Pi \{-\infty < z < \infty; \quad \rho \geq 0; \quad \varphi = 0\}.$$

Сформулируем эту задачу в удобном для дальнейшего рассмотрения виде. Пусть V^i — область в Π , ограниченная контуром C , V^e — внешняя к контуру C область в Π . Обозначим искомую функцию $u(M) = u(z, \rho)$:

$$u(M) = \begin{cases} u^i(z, \rho), & M \in V^i; \\ u^e(z, \rho) + u^0(z, \rho), & M \in V^e; \end{cases}$$

где $u^0(M)$ — первичное поле.

Функции $u^\alpha(z, \rho)$ ($\alpha = i, e$) удовлетворяют уравнениям

$$\left(\Delta + (1/\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} + k_\alpha^2 - 1/\rho^2 \right) u^\alpha(z, \rho) = 0, \quad (1)$$

где $k_\alpha^2 = \omega^2 \epsilon_\alpha \mu_\alpha$ — волновые числа внутренней и внешней сред. На контуре C выполнены условия сопряжения

$$u^i = u^e + u^0; \quad (1/\gamma \rho) \frac{\partial}{\partial n} (\rho u^i) = (1/\rho) \frac{\partial}{\partial n} (\rho u^e + \rho u^0), \quad (2)$$

где $\gamma = \mu_e/\mu_i$ или $\gamma = \epsilon_e/\epsilon_i$ в зависимости от поляризации. Выполнены также условия на бесконечности при

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} \rightarrow \infty$$

и условия при $\rho = 0$.

Введем фундаментальные решения сопряженного с (1) уравнения:

$$f^\alpha(M, M_0) = \rho S_1^\alpha(M, M_0) = (\rho/2\pi) \int_0^{2\pi} e^{ik_\alpha R} / R e^{i\varphi} d\varphi,$$

где $M = (z, \rho)$; $M_0 = (z_0, \rho_0)$;

$$R^2 = (z - z_0)^2 + \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \varphi.$$

Применив формулу Грина к функциям $u^\alpha(M)$ и $f^\alpha(M, M_0)$ в обла-

сти V^α , получим следующие интегральные представления в точке $M_0 \in V^\alpha$:

$$u^\alpha(M_0) = \int_C \left\{ (1/\rho) \frac{\partial}{\partial n_M} (\rho u^\alpha(M)) f^\alpha(M, M_0) - u^\alpha(M) \frac{\partial f^\alpha(M, M_0)}{\partial n_M} \right\} dl_M, \quad (3)$$

где n — внешняя к V^α нормаль в точке $M \in C$.

Суммируя (3) с учетом граничных условий (2), будем иметь интегральное представление для искомой функции $u(M_0)$ в точке $M_0 \in V^e \cup V^i$ с помощью граничных значений $u(M)$ и $v(M) = (1/\rho) \frac{\partial}{\partial n_M} (\rho u)$ в точке $M \in C$:

$$u(M_0) = \int_C \left\{ \Phi(M, M_0) v(M) - \frac{\partial F(M, M_0)}{\partial n_M} u(M) \right\} dl_M + u^0(M_0), \quad (4)$$

где введены обозначения

$$\Phi = \sqrt{f^i - f^e}; \quad F = f^i - f^e.$$

Отметим, что функция $\Phi(M, M_0)$ имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов, а функция $F(M, M_0)$ ограничена. В силу свойств функций Φ и F и структуры представления (4), оно имеет место на всей полуплоскости Π . Умножая (4) на $1/\rho_0$ и дифференцируя по направлению нормали к контуру C в точке M_0 , найдем выражение для функции $v(M_0)$:

$$v(M_0) = \int_C (1/\rho_0) \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} (\rho_0 \Phi) v(M) dl_M - (1/\rho_0) \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \int_C \rho_0 \frac{\partial F}{\partial n_M} u(M) dl_M + v^0(M_0), \quad (5)$$

где $v^0(M_0) = (1/\rho_0) \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} (\rho_0 u^0)$.

От представлений (4) и (5) обычно переходят к системе одномерных интегральных уравнений Фредгольма II рода, эквивалентной исходной граничной задаче [3]. Однако при алгоритмизации такой системы возникают трудности, связанные с вычислением вторых производных функций $f^\alpha(M, M_0)$. С вычислительной точки зрения целесообразен переход от представлений (4), (5) к интегродифференциальным уравнениям, в которых интегродифференциальный оператор со второй производной может быть вычислен в явном виде.

Для перехода к интегродифференциальным уравнениям введем на полуплоскости Π криволинейную ортогональную систему координат $\{\tau, \nu\}$ с коэффициентами Ламэ $\{h_\tau, h_\nu\}$ таким образом, что контур C совпадает с координатной линией $\nu = q$ и может быть задан параметрически:

$$z = z(\tau, q) = z(\tau); \quad \rho = \rho(\tau, q) = \rho(\tau).$$

Отметим, что нормальная производная по точке M в координатах τ, v может быть выражена следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial n_M} = \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{h_\tau} \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (6)$$

Рассмотрим в криволинейных координатах τ, v ядро интегрального представления (5) $(1/\rho_0) \frac{\partial^2}{\partial n_{M_0} \partial n_M} (\rho_0 F(M, M_0))$, где $M = (\tau, q)$, $M_0 = (\tau_0, v_0)$, и найдем для этого ядра выражение с помощью производных по касательным аргументам τ_0, τ . Для дальнейшего преобразования наряду с функцией S_1^α введем

$$\text{функцию} \quad S_0^\alpha(M, M_0) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} e^{ik_\alpha R} / R d\varphi,$$

которая удовлетворяет следующему уравнению по координатам точек M_0 и M :

$$\left(\Delta + (1/\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} + k_\alpha^2 \right) S_0^\alpha = 0. \quad (7)$$

Как показано в [4], для функций $S_0^\alpha(M, M_0)$ и $S_1^\alpha(M, M_0)$ справедливо соотношение

$$(1/\rho_0) \frac{\partial}{\partial \rho_0} (\rho_0 S_1^\alpha) = - \frac{\partial}{\partial \rho} S_0^\alpha. \quad (8)$$

Используя соотношение (6) для вычисления нормальных производных в точках M_0 и M и соотношение (8), связывающее производные функций S_0^α и S_1^α , можно показать, что

$$\begin{aligned} (1/\rho_0) \frac{\partial^2}{\partial n_{M_0} \partial n_M} (\rho_0 F) = & - \rho \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tau_0 \partial \tau} (S_0^i - S_0^e) + \right. \\ & \left. + \rho' \rho'_0 \left(\Delta + (1/\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} + 1/\rho^2 \right) (S_1^i - S_1^e) + z' z'_0 \left(\Delta + (1/\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \right) (S_0^i - S_0^e) \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где обозначено

$$z' = \frac{\partial z}{\partial \tau}(\tau); \quad z'_0 = \frac{\partial z}{\partial \tau}(\tau_0); \quad \rho' = \frac{\partial \rho}{\partial \tau}(\tau); \quad \rho'_0 = \frac{\partial \rho}{\partial \tau}(\tau_0).$$

Учитывая уравнения (1) и (7), которым удовлетворяют соответственно функции S_0^α и S_1^α , из (9) получим выражение

$$(1/\rho_0) \frac{\partial^2}{\partial n_{M_0} \partial n_M} (\rho_0 F) = - \rho \frac{\partial^2 F_0}{\partial \tau_0 \partial \tau} + \tilde{F}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\tau, \tau_0, q, v_0) = & \rho \{ \rho' \rho'_0 (k_i^2 S_1^i - k_e^2 S_1^e) + z' z'_0 (k_i^2 S_0^i - k_e^2 S_0^e) \}; \\ F_0(\tau, \tau_0, q, v_0) = & S_0^i - S_0^e. \end{aligned}$$

Подставляя (10) в (5) и устремляя в представлениях (4), (5) точку M_0 к контуру C , приходим к системе интегродифференциальных уравнений II рода относительно неизвестных функций $u(\tau)$ и $v(\tau)$:

$$\begin{aligned} u(\tau_0) = & \int_C \left\{ \Phi(\tau, \tau_0) v(\tau) - \frac{\partial F(\tau, \tau_0)}{\partial v} u(\tau) \right\} d\tau + u^0(\tau_0); \\ \beta v(\tau_0) = & \frac{\partial}{\partial \tau_0} \int_C \frac{\partial F_0}{\partial \tau} \rho(\tau) u(\tau) d\tau + \int_C \left\{ (1/\rho_0) \frac{\partial}{\partial v_0} (\rho_0 \Phi) v(\tau) - \tilde{F} u(\tau) \right\} d\tau + \\ & + v^0(\tau_0), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\beta = (\gamma + 1)/2$.

Полученная система представляет собой систему сингулярных интегродифференциальных уравнений, так как интегрированием по частям в (11) можно преобразовать оператор с ядром, содержащим вторые производные по аргументам τ, τ_0 , к интегральному оператору, содержащему функцию $\partial u / \partial \tau$. Однако алгоритмически такой переход нецелесообразен, поскольку при аппроксимации функции $u(\tau)$ этот оператор вычисляется в явном виде и выражается с помощью сеточных значений функции $u(\tau)$.

В силу поведения ядер остальных операторов в (11) после вычисления интегродифференциального оператора при выбранной аппроксимации искомых функций (например, кусочно-постоянная аппроксимация или сплайн-аппроксимация) система уравнений (11) может быть непосредственно сведена к алгебраической системе уравнений.

Отметим также, что с использованием результатов работы [5] изложенная методика переносится и на случай, когда среда одновременно содержит диэлектрические тела и экраны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов А. Г., Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Метод решения задач дифракции электромагнитных волн на бесконечно тонких цилиндрических экранах. — ДАН СССР, 1981, т. 261, № 2, с. 338.
2. Давыдов А. Г., Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях вращения. — ДАН СССР, 1983, т. 269, № 2, с. 329.
3. Захаров Е. В., Несмеянова Н. И. Метод решения осесимметричных задач дифракции электромагнитных полей. — ЖВМ и МФ, 1978, т. 18, № 2, с. 512.
4. Васильев Е. Н. Об одной функции, встречающейся в теории дифракции. — ЖВМ и МФ, 1965, т. 5, с. 841.
5. Захаров Е. В., Никитина Е. В. О методе решения осесимметричных задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях вращения. — В кн.: Численные методы электродинамики. М.: Изд-во МГУ, 1983, с. 61.