

Ян Цзяньсюнь

МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ИЗ СЕЙСМИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Введение

В настоящее время активно развиваются сейсмические методы для исследования строения земли. В сейсмологии главным направлением является анализ сейсмических данных получаемых на сейсмических станциях. Эти сигналы состоят из ряда сейсмических волн, вызванных атмосферными процессами, цунами, а также небольшими подвижками в земной коре. Сейсмический сигнал включает в себя еще и суммарную ошибку приборов. Из сейсмических волн необходимо выделить поверхностные волны, которые распространяются вдоль земной поверхности. По этим волнам возможно определять осредненное строение земных недр в районе измерительной станции.

Теоритически считается, что сейсмический сигнал состоит из нескольких бегущих волн, микросейсмического сигнала, а также некоторой суммарной ошибки приборов, то есть:

$$U_0(t) = u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_n(t) + f(t) + \delta(t)$$

где $U_0(t)$ – натуральные сейсмические данные, $u_1(t), \dots, u_n(t)$ – бегущие волны, $f(t)$ – микросейсмический сигнал, $\delta(t)$ – ошибка измерений.

Постановка задачи

Если на одной станции измерены сейсмические данные, то путем обработки этих данных можно выделить бегущую волну, и смысл выделения заключается в следующем: если мы проводим интегрирование над усреднением, потом интегрируем, то быстро меняющиеся случайные сигналы пропадают, а медленные сигналы, которые медленно распространены, раздаются (появляются). В результате если мы производим интегрирование несколько раз (в настоящей статье мы проинтегрируем дважды), то мы получаем сигнал свободных случайных помех (такой метод может считаться методом фильтрации). В этом сигнале явно видно структуру бегущей волны, т.е. изменение амплитуды синусоиды. Тогда этим сигналом

можно приблизить уравнение бегущей волны и найти бегущую поверхностную волну.

При распространении сейсмических волн сейсмометром записываются сигналы колебания. У каждого сейсмометра существуют функция характеристики прибора и записываемые сигналы $Y(t)$, которые имеют вид свертки:

$$Y(t) = x(t) * i(t),$$

где $x(t)$ – фактические сигналы движения на земной поверхности, а $i(t)$ – характеристика прибора. Поэтому для получения фактических сейсмических сигналов необходимо удалить характеристику прибора $i(t)$.

После удаления характеристики прибора выбираем удобные данные для обработки сейсмических сигналов. Пусть имеются данные $U_0(t)$, $t = 0, \dots, T$, где T – временной интервал измерений, а $U_0(t)$ – колебание по времени. Проведем численный анализ выбранных данных. Определим

$$\bar{U}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T U_0(t) dt, \quad (1)$$

$$\tilde{U}_0(t) = U_0(t) - \bar{U}_0, \quad (2)$$

где \bar{U}_0 – среднее значение данных, а \tilde{U}_0 – изменение сигнала относительно среднего значения \bar{U}_0 . Из полученных $\tilde{U}_0(t)$ мы хотим выделить низкочастотную составляющую. Для этого проинтегрируем $\tilde{U}_0(t)$ и найдем $U_1(t)$:

$$U_1(t) = \int_0^t \tilde{U}_0(t) dt, \quad (3)$$

При интегрировании высокочастотная составляющая уменьшается по сравнению с низкочастотной частью, т.к.

$$\int_0^t \cos \omega t dt = \frac{1}{\omega} \sin \omega t, \quad \int_0^t d\tau \int_0^\tau \cos \omega t dt = -\frac{1}{\omega^2} \cos \omega t - \text{const}$$

const можно убрать за счет выделения среднего значения. Если частоты составляющих в сейсмическом сигнале существенно отличаются, то достаточно провести двукратное интегрирование, чтобы выделить низкочастотный сигнал. Получим:

$$\tilde{U}_1(t) = U_1(t) - \frac{1}{T} \int_0^T U_1(t) dt, \quad (4)$$

$$U_2(t) = \int_0^t \tilde{U}_1(t) dt, \quad (5)$$

$$\tilde{U}_2(t) = U_2(t) - \frac{1}{T} \int_0^T U_2(t) dt. \quad (6)$$

После выделения низкочастотного сигнала его приближают функцией вида $S(t) = A \sin(\frac{2\pi t}{T} + \varphi)$, где A – амплитуда, φ – фаза, T – период бегущей волны. Таким образом, приближенную функцию можно представить в виде:

$$S(t) = R(t, T, \varphi, A)$$

где под R понимаем алгоритм определения при заданных T, φ, A . Незвестные T, φ и A определяются из условия минимизации функции:

$$\int_0^T (\tilde{U}_2(t) - R(t, T, \varphi, A))^2 dt = \Phi(T, \varphi, A). \quad (7)$$

Запишем условия оптимальности первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial A} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial T} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Из системы (8) найдём параметры T, φ, A и уточним функцию $S(t)$. Продифференцируем $S(t)$ и получим:

$$u(t) = \frac{d^2 S(t)}{dt^2}. \quad (9)$$

где $u(t)$ – функция бегущей волны. Вычтем $u(t)$ из натуральных данных $U_0(t)$:

$$\mathcal{U}_1(t) = U_0(t) - u(t). \quad (10)$$

Натуральные данные, записываемые сейсмометром, имеют несколько бегущих волн. Поэтому с помощью уравнений (1) -(10) можно вычислить (выделить) бегущие волны.

Обработка сейсмических данных

В действительности период каждой бегущей волны, которая была выделена из сейсмических данных, будет постепенно снижаться. Теоретически в однородном слоистом полупространстве существует от 1 до 3 бегущих волн. Для вычисления количества бегущих волн, мы введем уравнение волны Рэлея и проанализируем его.[1]-[2] Рассмотрим уравнение Рэлея в виде:

$$R = \beta^2 - 4\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - k_p^2} \sqrt{\alpha^2 - k_s^2}, \quad (11)$$

где $k_p^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}$, $k_s^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}$, $\beta^2 = (2\alpha^2 - k_s^2)^2$.

При распространении волн на земной поверхности, уравнение (11) имеет вид

$$R = \beta^2 - 4\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - k_p^2} \sqrt{\alpha^2 - k_s^2} = 0. \quad (12)$$

Введем новые переменные:

$$a = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}, x = \frac{k_p}{\alpha}, \quad (12a)$$

Так как получим:

$$\frac{\lambda}{\mu} = a - 2, \quad \frac{v_p}{v_s} = \frac{\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}}{\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}} = \sqrt{a} \quad (12b)$$

где v_p, v_s – скорость продольной и поперечной волн.

Обозначим $k_p^2 = \frac{k_s^2}{a}$, $k_s^2 = ak_p^2$, $\frac{k_s}{\alpha} = \sqrt{a}x$. Из формулы (12) получаем

$$R = (2 - ax^2)^2 - 4\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - ax^2} = 0, \text{ при } x \in [0, \infty) \quad (13)$$

или

$$a^4x^6 - 8a^3x^4 + 24a^2x^2 - 16ax^2 - 16a + 16 = 0, \text{ при } x \in [0, \infty) \quad (14)$$

С помощью новой модели глобальной коры (crust 1.0) [3]-[4] получим приближенные параметры среды на земной поверхности некоторого

района, в котором сейсмометр показывает: $v_p = 3.81, v_s = 1.94, \rho = 0.92$. Тогда мы сможем получить коэффициент Ламе $\lambda \approx 6.43, \mu \approx 3.46$ и сразу найдем $a \approx 3.86$. Поэтому из уравнения (14) имеем:

$$\phi(x) = a^4 x^6 - 8a^3 x^4 + 24a^2 x^2 - 16ax^2 - 16a + 16. \quad (15)$$

Подставив полученный a , найдем

$$\phi(x) \approx 222x^6 - 460x^4 + 295.8x^2 - 45.76 \quad (16)$$

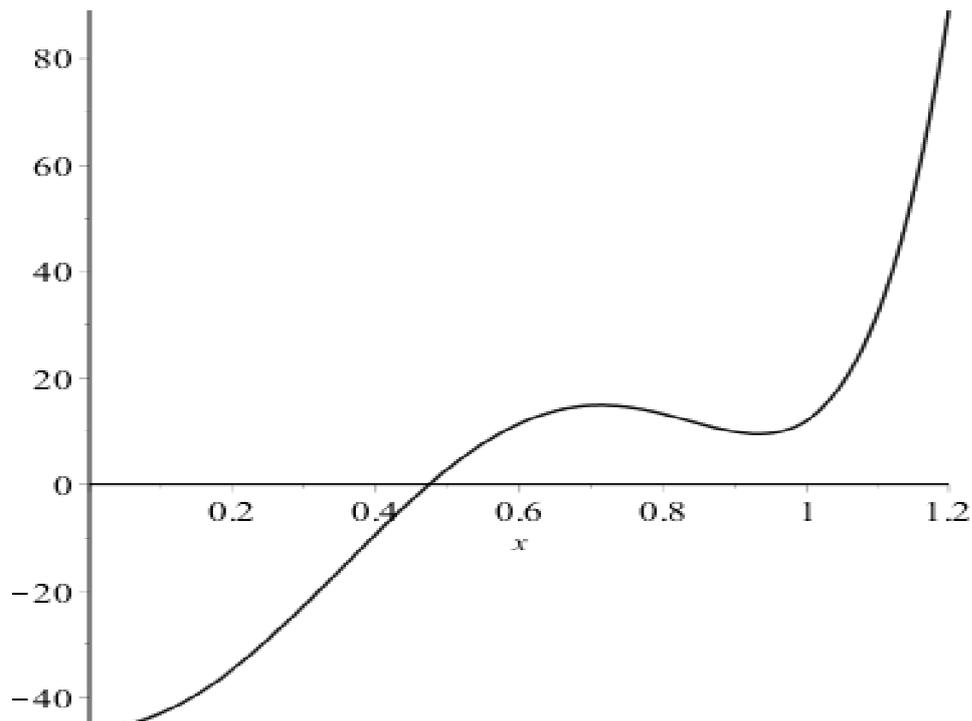


Рисунок 1. На графике формулы (16) мы легко видим одну точку при $\phi(x) = 0$.

Тогда уравнение $222x^6 - 460x^4 + 295.8x^2 - 45.76 = 0$ имеет единственный действительный корень $x_1 = 0.474$ (Рисунок.1). Таким образом, можно считать, что в этом случае колебание, которое распространяется в этом районе, имеет только одну бегущую волну. При этом количество бегущих волн связано с параметром a . Поскольку $a = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}$, то $a > 2$. Возьмем например: когда параметр a принадлежит интервалу $a \in (2,5]$, проведем следующий эксперимент: при каждом a построим график функции (15). Результаты вычислений см. на Рисунке 2.

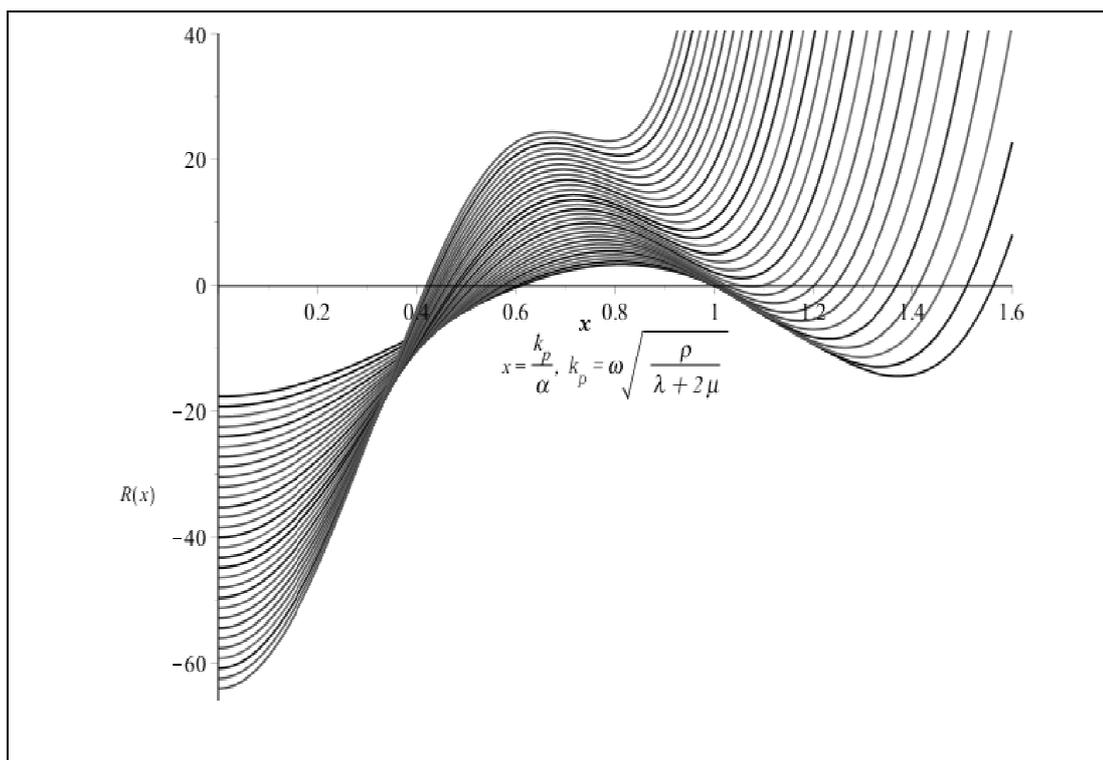


Рисунок 2. $R_n(x) = a_i^4 x^6 - 8a_i^3 x^4 + 24a_i^2 x^2 - 16a_i x^2 - 16a_i + 16$, где $a_i = 2 + \Delta a n, n = 1..30, \Delta a = 0.1$.

Из рисунка видно, что корни уравнения (14) существуют в трех случаях и зависят от параметра a . Таким образом, для нахождения корней уравнения (14) нам нужно определить параметр a .

Пусть вводится замена $y = x^2$ в уравнение (14) получаем:

$$a^4 y^3 - 8a^3 y^2 + 24a^2 y - 16a y - 16a + 16 = 0 \quad (17)$$

С помощью дискриминанта кубического уравнения получаем:

$$\Delta = \left(-\frac{8}{3} \cdot \frac{9a - 5}{a^4} + \frac{512}{27a^3} \right)^2 + \left(-\frac{64}{9} a^4 + \frac{8}{3} \cdot \frac{3a - 2}{a^3} \right)^3 \quad (18)$$

Тогда по формуле (18) имеем следующие условия для решения корней уравнения:

1. При $\Delta > 0, a \leq 3.11041835$, уравнение (17) имеет три вещественных корня, т.е. уравнение (14) имеет три вещественных корня.
2. При $\Delta = 0, a \approx 3.11041835$, уравнение (17) имеет два вещественных корня, т.е. уравнение (14) имеет два вещественных корня.
3. При $\Delta < 0, a \geq 3.11041835$, уравнение (17) имеет один вещественный корень, т.е. уравнение (14) имеет один вещественный корень.

Результаты вычислительного эксперимента

Для проверки осуществляемого метода были выбраны данные по нескольким сейсмическим станциям (номера станций: k011, k012) из сейсмической группы в районе Северного Китая и проведен численный эксперимент. Сначала для исследований выбирались сейсмические данные по вертикальному направлению из станции №k012 (географические координаты: 41°13'02.3"N, 114°17'38.8"E) за 5 дней. По каждому из дней были взяты натуральные данные на четырех больших отрезках времени. Отрезки брались в секундах (40000-42000, 50000-52000, 60000-62000, 70000-72000). После этого данные были дважды проинтегрированы. В результате получились сглаженные картинки (такой метод может считаться методом фильтрации). С помощью уравнений (1)-(6) были проанализированы полученные графики $U_1(t)$ и $U_2(t)$ и выбраны сравнительно устойчивые части. Для этих частей были вычислены приближенные функции $S(t)$ и найдены их периоды (таблица 1). Таким образом, были найдены первые бегущие волны и средний период колебания около 121 секунд.

Таблица 1

| первый день | T(s) | второй день | T(s) | третий день | T(s) | 4-ый день | T(s) | 5-ый день | T(s) |
|-------------|-------|-------------|-------|-------------|------|-------------|-------|-------------|------|
| 41350-41600 | 116 | 40100-40400 | 115 | 40100-40400 | 120 | 40090-40390 | 116 | 40900-41150 | 118 |
| 50500-50800 | 120 | 41450-41750 | 117 | 41360-41660 | 124 | 40570-40840 | 112 | 41230-41480 | 121 |
| 51000-51400 | 120 | 50000-50300 | 123 | 50690-50990 | 112 | 50630-50880 | 115 | 50350-50650 | 118 |
| 51700-52000 | 119 | 51420-51720 | 113 | 51250-51550 | 124 | 51150-51350 | 114 | 51450-51750 | 122 |
| 60500-60800 | 124 | 60400-60800 | 127 | 60000-60300 | 119 | 60200-60500 | 118 | 60500-60800 | 120 |
| 61120-61420 | 127 | 61150-61450 | 128 | 61700-62000 | 115 | 61160-61460 | 122 | 61000-61300 | 127 |
| 61450-61750 | 125 | 61500-61800 | 125 | | | | | 61370-61610 | 126 |
| 70050-70450 | 124.7 | 70100-70400 | 121 | 70250-70550 | 128 | 70190-70490 | 126 | 70100-70400 | 124 |
| 71260-71560 | 121 | 71300-71600 | 122.5 | 71300-71600 | 119 | 71360-71610 | 125.5 | 71350-71650 | 129 |

С помощью уравнений (9) -(10) мы сможем вычесть бегущую волну по каждому выбранному отрезку, и найти новые данные. Метод, который использовался для подсчета первых бегущих волн, позволяет вычислить вторые бегущие волны из полученных новых данных. Получены периоды вторых бегущих волн и средний период колебания около 70 секунд (таблица 2).

Таблица 2

| первый день | T(s) | второй день | T(s) | третий день | T(s) | 4-ый день | T(s) | 5-ый день | T(s) |
|-------------|------|-------------|------|-------------|------|-------------|------|-------------|------|
| 41355-41485 | 70 | 40020-40150 | 69 | 40245-40275 | 66 | 40210-40310 | 69.8 | 41345-41465 | 68.5 |
| 50670-50800 | 76 | 41450-41585 | 69 | 41520-51650 | 74 | 40610-40740 | 65 | 50355-50465 | 63 |
| 51200-51330 | 75 | 50060-50190 | 71 | 50790-50920 | 65 | 50745-50865 | 62 | 51625-51745 | 69 |
| 51700-51830 | 69 | 51425-51525 | 70.5 | 51260-51390 | 68 | 51200-51330 | 70 | 51460-51580 | 70 |
| 60665-60795 | 71.5 | 60668-60798 | 71 | 60000-60130 | 68.6 | 60300-60410 | 69 | 60660-60790 | 70.4 |
| 61060-61190 | 69 | 61200-61330 | 70 | 61868-61998 | 69.3 | 61315-61445 | 72 | 60500-60630 | 71.8 |
| 61450-61580 | 67 | 61668-61798 | 72 | | | | | 61300-61420 | 70.8 |
| 70120-70250 | 72 | 70110-70240 | 69.5 | 70250-70390 | 71.8 | 70250-70380 | 71 | 61435-61565 | 73 |
| 71300-71430 | 75 | 71465-71595 | 71 | 71465-71595 | 72 | 71450-71580 | 71.5 | 70250-70380 | 65.5 |

Таким образом, мы выделили две поверхностные бегущие волны из выбранных сейсмических данных. Считается, что уравнение (14) имеет два вещественных корня, т.е. $a \approx 3.11041835$. Тогда согласно (12а)-(12б) мы можем определить следующие параметры на земной поверхности:

$$\frac{\lambda}{\mu} \approx 1.11041835, \quad \frac{v_p}{v_s} \approx 1.67$$

где v_p – продольная скорость, v_s – поперечная скорость.

Используя более 6000 записей землетрясений в районе $38^{\circ}00' \sim 41^{\circ}00'N$, $113^{\circ}00' \sim 120^{\circ}00'E$ (с 1 января 1989 года по 30 сентября 1998, балл $ML \geq 1$), с помощью техники инверсии на нескольких сейсмических станциях китайские научные сотрудники рассчитали соотношение сейсмической скорости до времени прихода Р-волны и S-волны.

Результат расчета V_p/V_s равен около 1.67[4]. В [5] тоже отмечено, что на близком изучаемом районе параметр V_p/V_s земной поверхности равен 1.67~1.69. Таким образом, полученный ответ нашего метода хорошо совпадает с результатами в [4]-[5].

При найденном a получим корни уравнения (17): $y_1 \approx 0.273$, $y_2 \approx 1.149$, из $y = x^2$ мы сразу найдем $x_1 \approx 0.522$, $x_2 \approx 1.072$. тогда формулы (12а) имеют вид:

$$x_1 = \frac{k_{p1}}{\alpha} = \frac{\omega_1 \sqrt{\frac{\rho}{\lambda+2\mu}}}{\alpha} = \frac{\omega_1}{\alpha v_p} \approx 0.522,$$

$$x_2 = \frac{k_{p2}}{\alpha} = \frac{\omega_2 \sqrt{\frac{\rho}{\lambda+2\mu}}}{\alpha} = \frac{\omega_2}{\alpha v_p} \approx 1.072$$

где ω_1, ω_2 – частоты первой и второй выделенных поверхностных бегущих волн. Откуда получаются следующие формулы:

$$v_p = \frac{\omega_1}{0.522\alpha}, \quad v_p = \frac{\omega_2}{1.072\alpha}$$

Используя полученные периоды первой и второй бегущих волн рисуем следующие картинки.

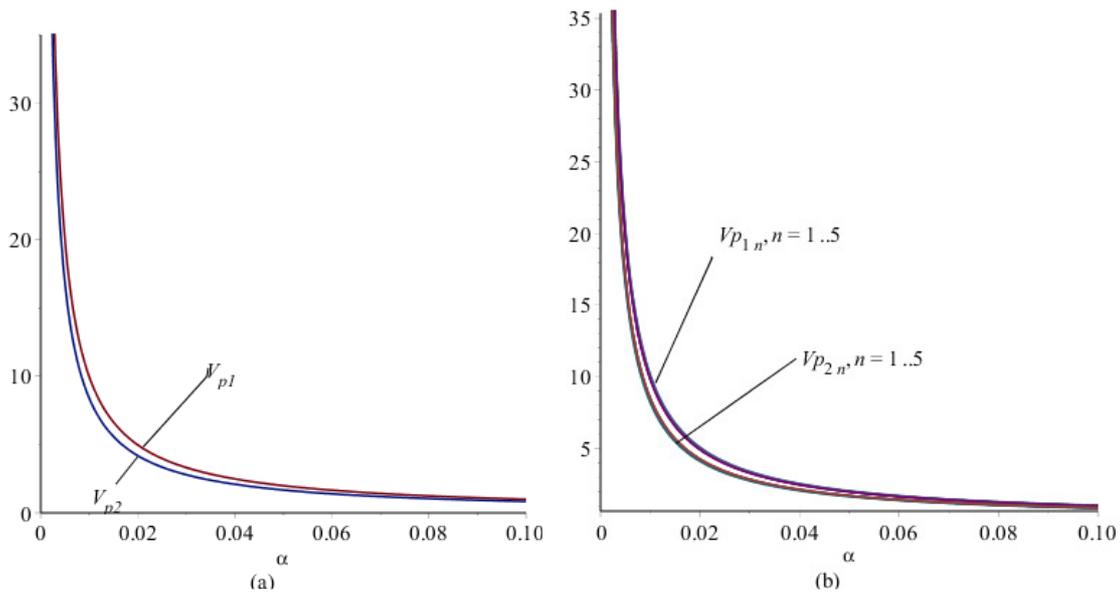


Рисунок. 3. а). применение средней частоты первой и второй бегущих волн. б). Применение частоты первой и второй волн на 5 дней (по каждому дню берем среднюю частоту)

Из рисунка видно, что продольные скорости v_p хорошо совпадают с разными случаями. Считается, что полученные результаты настоящей статьи устойчивы.

Благодарю уважаемого китайского профессора Дин Чжифэн (Professor Ding Zhifeng, Institute of Geophysics, China Earth quake Administration) за предоставленные сейсмические данные в районе Северного Китая. В настоящей статье эти данные использовались для проверки нашего метода.

Литература

1. *В.И. Дмитриев, Г.В. Аккуратов*, Математическое моделирование сейсмического частотного зондирования. –М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1985, с.39-66.
2. *Gabi Laske, Guy Masters, Zhitu Ma, and Mike Pasyanos*, Update on CRUST1.0 - A 1-degree Global Model of Earth's Crust, Geophysical Research Abstracts Vol. 15, EGU2013-2658, 2013 EGU General Assembly 2013.
3. *Pasyanos, M.E., Masters, G., Laske, G. and Ma, Z.*, LITHO1.0 – An Updated Crust and Lithospheric Model of the Earth Developed Using Multiple Data Constraints, Abstract T11D-09 presented at 2012 Fall Meeting, AGU, San Francisco, Calif., 3-7 Dec, 2012.
4. *Zhang Tianzhong, Gao Ajia, Huang Rongliang, Liu Qingfang*, Continuous monitoring of focal medium parameters and their changed before Zhangbei earthquake, EARTHQUAKE, Vol. 20, Supplement Sept. , 2000.
5. *ZHANG Xuemin, DIAO Guiling, SHU Peiyi, LIU Suying*, Study on wave velocity ratio (V_p/V_s) of underground media in north China, Seismology and geology, Vol.26, No.2, June, 2004