

Т.В. Захарова, П.И. Карпов, В.М. Бугаевский

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИСТОЧНИКА АКТИВНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОЭНЦЕФАЛОГРАФИИ *

Введение

Наиболее неизученным и сложным органом в живой природе является головной мозг человека, который является очень чувствительным к оперативному вмешательству и требует вследствие этого безопасных и безболезненных методов исследования.

Головной мозг состоит из большого числа (до 200 миллиардов) нейронов, связанных между собой особыми связями, превращающими наш мозг во взаимосвязанную сеть. Взаимодействуя посредством этих связей, нейроны формируют электрические импульсы, которые управляют деятельностью всего организма. Ввиду высокой сложности организации мозга, его работа до сих пор не является достаточно изученной областью.

Данная статья продолжает цикл работ, посвященных неинвазивным предоперационным методам локализации невосполнимых зон головного мозга человека. Точность определения таких зон напрямую влияет на исход операции.

Сверхслабые магнитные поля мозга обнаруживаются специальным устройством, называемым магнитоэнцефалографом. А технология, использующая эти устройства и позволяющая измерять и визуализировать магнитные поля, называется магнитоэнцефалографией (МЭГ). Порядок биомагнитных полей, излучаемых головным мозгом, измеряется в фемтотеслах (это 10^{-15} Тесла), что в миллионы раз слабее магнитного поля Земли. Такие измерения стали возможны благодаря применению СКВИДов (от англ. SQUID, Superconducting Quantum Interference Device — «сверхпроводящий квантовый интерферометр») – специальных магнитометров, обладающих достаточной чувствительностью для регистрации очень малых магнитных полей.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, номер проекта 15-07-02652.

Свойство сверхпроводимости достигается путем охлаждения сенсоров жидким гелием до очень низкой температуры. Детали устройства МЭГ-оборудования можно найти в [1].

В России, начиная с 2008 года, московским Центром нейрокогнитивных исследований (МЭГ-Центром) стали проводиться записи и исследования биомагнитных полей, магнитоэнцефаллограмм. На базе МЭГ-Центра авторами был разработан и верифицирован на реальных данных новый метод локализации источника активности в сферической и эллипсоидальной моделях [2, 3, 4, 5, 6, 7].

Результатом проведения магнитоэнцефалографии являются большие массивы данных, несущие информацию о процессах, происходящих в головном мозге. В ходе обработки этих данных перед исследователем ставится обратная задача, заключающаяся в пространственной реконструкции источников МЭГ-сигналов в коре головного мозга.

На настоящий момент не существует универсальных инструментов для точного в достаточной степени решения такой обратной задачи при анализе МЭГ-сигналов. Одному и тому же распределению потенциалов на поверхности головы могут соответствовать различные зоны активности коры головного мозга. Однако, при некоторых предположениях: источники потенциала дискретные, источники относятся к различным функциональным областям мозга, располагаются относительно неглубоко, задача имеет однозначное решение.

Магнитная энцефалография предоставляет уникальную возможность неинвазивного изучения нейронных процессов, происходящих в мозге. МЭГ с высокой точностью регистрирует электрические сигналы и позволяет найти решение в сочетании с магнитно-резонансной томографией (МРТ) с высокой временной частотой. Квазистатическое магнитное поле, вызванное нейронными источниками значительно менее чувствительно к анизотропии проводящих свойств головных тканей, чем электрический потенциал на коже головы. Таким образом, в отличие от ЭЭГ, МЭГ имеет более простую и точную модель объемного проводника, связывающего геометрические свойства нейронного источника с сигналами на сенсорах. Поэтому МЭГ потенциально позволяет более точно локализовать активные источники на основе регистрируемых данных.

МЭГ может использоваться для определения функциональных областей мозга, которые по-разному активируются в зависимости от эксперимента, и позволяет регистрировать слабые и сверхслабые изменения электрической активности мозга в ответ на раздражитель (звуковой, моторный, световой и т.д.).

1. Вывод математической модели МЭГ-сигналов

Электромагнитное поле, создаваемое нейронной активностью, можно описать с помощью классической электродинамики сплошных сред [11]. Если заданы источники (плотность тока \mathbf{j} , плотность заряда ρ), а также материальные параметры (проводимость среды σ , ее диэлектрическая проницаемость ϵ и магнитная проницаемость μ), то электромагнитное поле может быть найдено, используя уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},\end{aligned}\tag{1}$$

а также материальные уравнения:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E},\end{aligned}\tag{2}$$

где \mathbf{E} и \mathbf{D} – напряженность и индукция электрического поля, \mathbf{H} и \mathbf{B} – напряженность и индукция магнитного поля.

Для описания электромагнитных сигналов мы используем два стандартных для МЭГ приближения [1]. Во-первых, мы считаем, что магнитная проницаемость всех тканей головы равна магнитной проницаемости вакуума: $\mu = \mu_0$, таким образом $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Во-вторых мы используем приближение малых частот, а именно пренебрегаем временными производными в правых частях уравнений Максвелла. Покажем, почему при моделировании головного мозга это можно сделать.

Сначала рассмотрим временную производную электрического поля $\partial \mathbf{E} / \partial t$. Характерные для нейромагнетизма частоты составляют $f = \omega / 2\pi \lesssim 100$ Гц. Для того, чтобы слагаемое с временной производной было мало по сравнению с омическим током $|\epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t| \ll |\sigma \mathbf{E}|$, необходимо, чтобы выполнялось $\epsilon \omega / \sigma \ll 1$. Для характерных значений параметров [13] для серого вещества головного мозга $\sigma = 0,3$ Ом⁻¹ м⁻¹, $\epsilon = \times 10^5 \epsilon_0$, находим $\epsilon \omega / \sigma \approx 2 \times 10^{-3}$.

Теперь рассмотрим временную производную магнитного поля $\partial \mathbf{B} / \partial t$. Пренебрегая в (1) временной производной электрического поля, получим:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) \approx -i\omega\mu_0\sigma\mathbf{E}. \quad (3)$$

Выделим из электрического поля безвихревую часть $\mathbf{E} = -\nabla\phi + \delta\mathbf{E}$. Предположим, что в области головы $\delta\mathbf{E} \ll \mathbf{E}$ и покажем, что это предположение самосогласованно. Из (3) имеем:

$$\nabla \times \nabla \times \delta\mathbf{E} \approx -\frac{i}{\lambda^2}\mathbf{E}, \quad (4)$$

где $\lambda = (\omega\mu_0\sigma)^{-1/2}$. Характерное расстояние, на котором изменяется δE – это характерный размер головы R , т.е. $\nabla \times \nabla \times \delta\mathbf{E} \sim \delta\mathbf{E}/R^2$, а значит

$$\delta E \sim \frac{R^2}{\lambda^2}\mathbf{E}. \quad (5)$$

Для указанных выше значений параметров имеем $\lambda \approx 65$ м, что намного больше характерного размера головы $R \sim 0.1$ м, таким образом $\delta E \sim 2 \times 10^{-6} E$ и мы приходим к тому, что условие $\delta E \ll E$ выполнено самосогласованно с хорошей точностью, следовательно поле можно приближенно считать безвихревым: $\mathbf{E} \approx \nabla\phi$. Таким образом, слагаемыми с временными производными в уравнениях Максвелла можно пренебречь при выполнении условий

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon\omega}{\sigma} &\ll 1, \\ \mu_0\sigma\omega R^2 &\ll 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Перейдем теперь к рассмотрению источников электромагнитного поля. Раздражитель активирует небольшой участок коры головного мозга, что вызывает возникновение первичного тока \mathbf{j}^P . В то же время возникают индуцируемые объемные токи \mathbf{j}^V в области вокруг участка. Таким образом, в формировании магнитного поля \mathbf{B} участвуют как первичный, так и объемные токи (рис.1).

Обычно при такой активности возбуждается около нескольких десятков тысяч нейронов. Так как длина протекающего первичного тока пренебрежимо мала по сравнению с характерными размерами головы, то удобно полагать, что активность создается электрическим

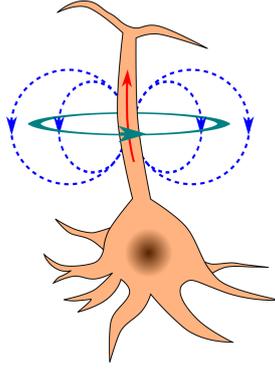


Рис. 1. Возникновение токов в нейроне. Объемный и первичный токи

диполем \mathbf{Q} (в области МЭГ обычно называемым токовым), которая хорошо аппроксимируется δ -функцией Дирака [1]:

$$\mathbf{j}^P = \mathbf{Q}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q). \quad (7)$$

Таким образом, выражение для полной плотности тока \mathbf{j} можно переписать в виде:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^P + \mathbf{j}^V = \mathbf{j}^P + \sigma\mathbf{E} = \mathbf{Q}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) - \sigma\text{grad}\varphi. \quad (8)$$

2. Магнитное поле проводника произвольной формы

Выведем формулу расчета нормальной компоненты магнитной индукции на поверхности головы для случая произвольной геометрии.

Введем следующие обозначения:

$\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки В (в которой измеряется магнитная индукция);

$\mathbf{r}' = (x', y', z')$ — радиус-вектор точки А (источников поля);

$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x', y - y', z - z')$;

$\mathbf{j} = \mathbf{j}(r')$ — плотность тока в точке А.

Запишем закон Био-Савара-Лапласа для поля, создаваемого в точке В источником, находящимся в точке А:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{R}]}{R^3} dv'. \quad (9)$$

Для того, чтобы найти суммарное значение вектора магнитной индукции в точке В от всех источников, требуется проинтегрировать

выражение (9) по всем точкам пространства:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{R}]}{R^3} dv'. \quad (10)$$

Пусть grad' – оператор градиента по координатам (x', y', z') . Воспользуемся тем, что $\text{grad}'(1/R) = -\text{grad}(1/R) = \mathbf{R}/R^3$ и формулами (8), (10).

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{R}]}{R^3} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{j}^p, \mathbf{R}]}{R^3} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\sigma \text{grad}'\varphi, \mathbf{R}]}{R^3} dv'. \quad (11)$$

Обозначим второй интеграл за I :

$$I = \int \left[\sigma \text{grad}'\varphi, \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right] dv' = \int \left[\sigma \text{grad}'\varphi, \text{grad}' \frac{1}{R} \right] dv'.$$

Принимая во внимание формулу ротора произведения $\text{rot} f \mathbf{a} = f \text{rot} \mathbf{a} + [\text{grad} f, \mathbf{a}]$, имеем:

$$\left[\sigma \text{grad}'\varphi, \text{grad}' \frac{1}{R} \right] = -\text{rot}' \left(\frac{\sigma \text{grad}'\varphi}{R} \right) + \frac{1}{R} \text{rot}' (\sigma \text{grad}'\varphi).$$

Тогда интеграл I преобразуется к виду:

$$I = - \int \text{rot}' \left(\frac{\sigma \text{grad}'\varphi}{R} \right) dv' + \int \frac{1}{R} \text{rot}' (\sigma \text{grad}'\varphi) dv'.$$

Если в формуле ротора произведения в качестве аргумента стоит градиент скалярной функции, то формула упрощается: $\text{rot}(\sigma \text{grad}\varphi) = [\text{grad}\sigma, \text{grad}\varphi]$. Применяя ее ко второму слагаемому, получим:

$$I = - \int \text{rot}' \left(\frac{\sigma \text{grad}'\varphi}{R} \right) dv' - \int \frac{1}{R} \text{rot}' (\varphi \text{grad}'\sigma) dv'.$$

Применяя повторно формулу ротора произведения, имеем:

$$\frac{1}{R} \text{rot}' (\varphi \text{grad}'\sigma) = \left[\varphi \text{grad}'\sigma, \text{grad}' \frac{1}{R} \right] + \text{rot}' \left(\frac{\varphi \text{grad}'\sigma}{R} \right).$$

Тогда интеграл I преобразуется к виду:

$$I = - \int \text{rot}' \left(\frac{\sigma \text{grad}'\varphi}{R} \right) dv' - \int \text{rot}' \left(\frac{\varphi \text{grad}'\sigma}{R} \right) dv' - \int \left[\varphi \text{grad}'\sigma, \text{grad}' \frac{1}{R} \right] dv'.$$

Воспользовавшись свойствами градиента и ротора, получим:

$$\begin{aligned} I &= - \int \operatorname{rot}' \left(\frac{\sigma \operatorname{grad}' \varphi}{R} + \frac{\varphi \operatorname{grad}' \sigma}{R} \right) dv' - \int \left[\varphi \operatorname{grad}' \sigma, \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right] dv' = \\ &= - \int \operatorname{rot}' \left(\frac{\operatorname{grad}'(\sigma \varphi)}{R} \right) dv' - \int \left[\varphi \operatorname{grad}' \sigma, \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right] dv'. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение (11) преобразуется к виду:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\mathbf{j}^p + \varphi \operatorname{grad}' \sigma, \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right] dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \operatorname{rot}' \left(\frac{\operatorname{grad}'(\sigma \varphi)}{R} \right) dv'. \quad (12)$$

Обозначим второй интеграл за J . Рассмотрим шар B_ρ и соответствующую ему сферу S_ρ :

$$B_\rho = \{r : |r| < \rho\}; \quad S_\rho = \{r : |r| = \rho\}.$$

Радиус ρ выберем так, чтобы область головы полностью лежала в шаре B_ρ , тогда интеграл J можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} J &= \iiint \operatorname{rot}' \left(\frac{\operatorname{grad}'(\sigma \varphi)}{R} \right) dv' = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \iiint_{B_\rho} \operatorname{rot}' \left(\frac{\operatorname{grad}'(\sigma \varphi)}{R} \right) dv' = \\ &= - \lim_{\rho \rightarrow \infty} \iint_{S_\rho} \left[\frac{\operatorname{grad}'(\sigma \varphi)}{R}, \mathbf{n} \right] ds' = \\ &= - \lim_{\rho \rightarrow \infty} \iint_{S_\rho} \left(\left[\frac{\sigma \operatorname{grad}' \varphi}{R}, \mathbf{n} \right] + \left[\frac{\varphi \operatorname{grad}' \sigma}{R}, \mathbf{n} \right] \right) ds'. \end{aligned}$$

Проводимость среды σ вне головы тождественно равна нулю, поэтому первое слагаемое в подынтегральном выражении обращается в ноль. Так как область головы полностью лежит внутри шара B_ρ , а $\operatorname{grad}' \sigma$ отличен от нуля только внутри головы и на ее границе, имеем, что и второе слагаемое в подынтегральном выражении обращается в ноль.

Таким образом, интеграл J равен 0, и выражение (12) принимает вид:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\mathbf{j}^p + \varphi \operatorname{grad}' \sigma, \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right] dv'. \quad (13)$$

3. Математическая постановка задачи локализации источника активности головного мозга

В данной работе рассматривается сферическая модель головы. Она является самой простой и позволяет получить аналитические решения, но, в то же время, улавливает большинство принципиальных эффектов [10].

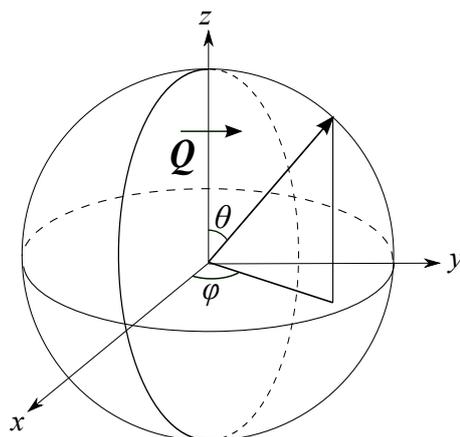


Рис. 2. Геометрия задачи

В данной модели мы полагаем, что форма головы аппроксимируется сферой радиуса R и, что проводимость среды $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(|\mathbf{r}|)$ является симметричной функцией относительно центра сферы. Кроме того, предполагается, что магнитное поле создается одним токовым диполем \mathbf{Q} с радиус-вектором \mathbf{r}_Q . Так как радиальная компонента токового диполя не создает магнитного поля на поверхности сферы, то, не теряя общности можно считать, что $\mathbf{Q} \perp \mathbf{r}_Q$ и ввести систему координат так, как показано на рис.2: $\mathbf{Q} \parallel y$, $\mathbf{r}_Q \parallel z$.

В сделанных предположениях оказывается возможным решение не только прямой, но и обратной задачи. Прямая задача предполагает нахождение магнитного поля на поверхности головы, зная положение и ориентацию токового диполя. Обратная задача предполагает реконструкцию положения и ориентации источника по заданному магнитному полю на поверхности головы.

4. Прямая задача

Для локализации источника активности прежде необходимо рассмотреть прямую задачу, которая в нашем частном случае сферической геометрии имеет точное аналитическое решение.

Воспользовавшись представлениями (7), (13), получим:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\mathbf{Q}, \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\varphi \text{grad}' \sigma, \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dv'. \quad (14)$$

Введем единичный вектор $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ и разложим вектор магнитной индукции \mathbf{B} на радиальную \mathbf{B}_r и тангенциальную \mathbf{B}_τ компоненты. В силу описанных выше условий, касающихся σ , имеем:

$$\left\langle \left[\varphi \text{grad}' \sigma, \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right], \mathbf{e}_r \right\rangle \simeq \langle [\mathbf{r}', \mathbf{r} - \mathbf{r}'], \mathbf{r} \rangle = 0,$$

$$\left\langle \left[\mathbf{Q}, \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|^3} \right], \mathbf{e}_r \right\rangle = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|^3} \langle [\mathbf{Q}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_Q], \mathbf{e}_r \rangle = -\frac{\langle [\mathbf{Q}, \mathbf{r}_Q], \mathbf{e}_r \rangle}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|^3}.$$

Легко видеть, что вклад в радиальную компоненту \mathbf{B} дает только \mathbf{j}^P . Таким образом, выражение для \mathbf{B}_r принимает вид:

$$\mathbf{B}_r = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\langle [\mathbf{Q}, \mathbf{r}_Q], \mathbf{e}_r \rangle}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|^3}. \quad (15)$$

Подчеркнем, что данная формула применима только при выполнении условий (6), в частности, при фиксированной частоте проводимость не может быть ни слишком большой, ни слишком маленькой: $\epsilon\omega \ll \sigma \ll (\mu_0\sigma R^2)^{-1}$. Более точная оценка границ применимости формулы (15) требует специальных исследований.

При переходе к сферическим координатам, выражение (15) запишется следующим образом:

$$B_r = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Qr_Q \sin \theta \cos \varphi}{(r^2 + r_Q^2 - 2rr_Q \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}. \quad (16)$$

Заметим, что $|B_r|$ достигает локального максимума по φ при $\cos \varphi = \pm 1$, то есть при $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$.

Найдем при каких углах θ достигается локальный экстремум B_r . Из условия $\partial B_r / \partial \theta = 0$ следует, что экстремумы достигаются при

$$\cos \theta_m = \frac{-(r^2 + r_Q^2) + \sqrt{(r^2 + r_Q^2)^2 + 12r^2 r_Q^2}}{2rr_Q}. \quad (17)$$

Обобщая полученные выше результаты, имеем, что B_r достигает локальных экстремумов при $\cos \varphi = \pm 1$ и $\theta = \theta_m$, причем минимума при $\varphi = 0$ и максимума при $\varphi = \pi$, а $|B_r|$ – локальных максимумов.

5. Обратная задача

Теперь рассмотрим обратную задачу, которая состоит в нахождении источника активности по известным значениям магнитной индукции.

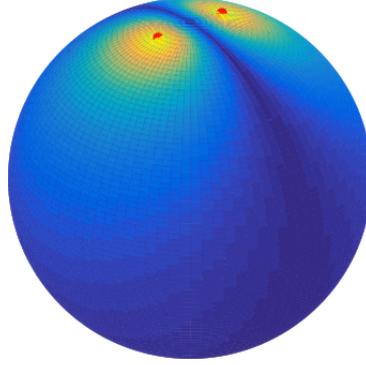


Рис. 3. Обратная задача в однодипольной сферической модели

Выразим r_Q из выражения (17). Для удобства введем обозначения:

$$y = \cos \theta, \quad x = r_Q \geq 0.$$

Тогда

$$y = \frac{-(x^2 + r^2) + \sqrt{(x^2 + r^2)^2 + 12x^2r^2}}{2xr}.$$

Отсюда можно получить уравнение

$$4rx(yx^2 + r(y^2 - 3)x + r^2y) = 0.$$

Решение $x = 0$ соответствует тому, что диполь Q находится в центре сферы, и значения B_r во всех точках сферы одинаковые. Данный случай — вырожденный, поэтому исключаем его из рассмотрения.

Рассмотрим оставшиеся два решения:

$$x = r \frac{(3 - y^2) \pm \sqrt{(3 - y^2)^2 - 4y^2}}{2y}.$$

Отсюда

$$r_Q = r \frac{(3 - \cos^2 \theta) \pm \sqrt{(3 - \cos^2 \theta)^2 - 4 \cos^2 \theta}}{2 \cos \theta}. \quad (18)$$

Несложными алгебраическими преобразованиями можно показать, что при $y \in (0, 1]$:

$$\left(\frac{r_Q}{r}\right)^+ = \frac{(3 - y^2) + \sqrt{(3 - y^2)^2 - 4y^2}}{2y} \geq 1, \text{ и}$$

$$\left(\frac{r_Q}{r}\right)^- = \frac{(3 - y^2) - \sqrt{(3 - y^2)^2 - 4y^2}}{2y} \leq 1.$$

Значит существует единственное подходящее решение:

$$r_Q = r \frac{(3 - \cos^2 \theta) - \sqrt{(3 - \cos^2 \theta)^2 - 4 \cos^2 \theta}}{2 \cos \theta}. \quad (19)$$

Итак, в однодипольной модели обратная задача решается следующим образом. Требуется найти на поверхности сферы две точки \mathbf{r}_{\max} и \mathbf{r}_{\min} , соответствующие максимальному и минимальному значению радиальной компоненты магнитного поля B_r (см. рис. 3). Тогда источник лежит в плоскости симметрии этих точек, на расстоянии r_Q от центра сферы, которое задается формулой (19), где θ — половина угла между векторами \mathbf{r}_{\max} и \mathbf{r}_{\min} .

6. Качественные оценки для эллипсоидального случая

Рассмотрим эллипсоидальную модель. Известно, что геометрию типичного человеческого мозга можно аппроксимировать как эллипсоид с полуосями $6 \times 6,5 \times 9$ см [15]. Так как две из полуосей примерно равны друг другу, то можно рассмотреть приближение эллипсоида вращения, а именно вытянутого эллипсоида.

Таким образом, эллипсоид аппроксимирует человеческий мозг намного точнее, чем сфера и, при этом, прямая задача для эллипсоидальной модели остается аналитически решаемой [16, 17], что облегчает поиск решения обратной задачи.

На рис. 4 приведено сравнение точных решений прямой задачи сферической и эллипсоидальной модели. Качественно эти графики очень похожи: имеется по 2 максимума нормальной компоненты магнитного поля $|B_n|$. Для диполей, лежащих не слишком глубоко внутри головного мозга $r_Q > R/2$ первичное магнитное поле доминирует над объемным $B_n^v/B_n^p < 0,1$ [16], поэтому можно приближенно использовать результат сферической модели. Для этого надо провести сечение эллипсоида, проходящее через точки максимумов, по нормали к его поверхности, найти радиус кривизны полученного сечения вблизи точек максимумов и воспользоваться формулой (19).

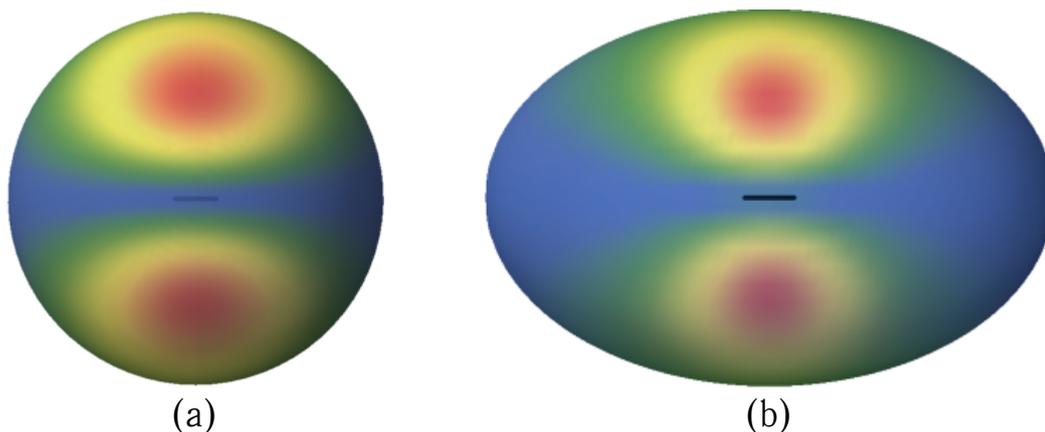


Рис. 4. Распределение нормальной компоненты магнитного поля $|B_n|$, создаваемого диполем $\mathbf{Q} = \mathbf{e}_y Q$, расположенным в точке $\mathbf{r}_Q = \mathbf{e}_z R/2$ внутри а) сферы радиуса R , б) эллипсоида с полуосями $a = 1,5R$, $b = c = R$, вытянутого вдоль оси y .

7. Заключение

Для проверки корректности формулы (19) были взяты 100 случайно расположенных (расстояние r_Q в диапазоне от 42 мм до 85 мм) токовых диполей с моментом $Q = 10^{-8}$ А·м. По формуле (16) было построено распределение значения радиальной компоненты магнитной индукции B_r на поверхности сферы радиуса 87.5 мм. Численными методами были найдены точки \mathbf{r}_{\max} и \mathbf{r}_{\min} , в которых достигаются локальные максимум и минимум B_r , а затем был вычислен косинус угла между соответствующими векторами:

$$\cos 2\theta = \cos(\mathbf{r}_{\max}, \mathbf{r}_{\min}).$$

Далее определяется $\cos \theta$ и, в силу симметрии обратной задачи (см. рис. 3), по формуле (19) вычисляются координаты источника.

Было выяснено, что отклонение получившегося значения r'_Q отличается от истинного значения r_Q не более, чем на $5 \cdot 10^{-3}$ мм.

Литература

1. Hamalainen M., Hari R., Ilmoniemi R., Knuutila J., Lounasmaa O.V. Magnetoencephalography – theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain // Reviews of Modern Physics, 1993. Vol. 65, pp. 413–497.
2. Захарова Т.В., Никифоров С.Ю., Гончаренко М.Б., Драницына М.А., Климов Г.А., Хазиахметов М.С., Чаянов Н.В. Методы

обработки сигналов для локализации невосполнимых областей головного мозга. // Системы и средства информатики, 2012, ч. 22, No. 2, с. 157–176.

3. *Хазиахметов М. Ш., Захарова Т. В.* Об алгоритмах нахождения опорных точек миограммы для использования в локализации невосполнимых областей головного мозга // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: Межвузовский сборник научных трудов. Т. 25. — Пермь: ПГНИУ, 2013. Т.25, с. 56–63.
4. *Захарова Т. В., Гончаренко М. Б., Никифоров С. Ю.* Метод решения обратной задачи магнитоэнцефалографии, основанный на кластеризации поверхности мозга // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: Межвузовский сборник научных трудов. Т.25. — Пермь: ПГНИУ, 2013. С. 120–125.
5. *Dranitsyna M., Zakharova T., Allakhverdiyeva V., Chshenyavskaya E.* Probability density function of myogram noise and its role in localization of brain activity // XXXII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Trondheim, Norway, 2014, pp. 25–26.
6. *Бенинг В.Е., Драницына М.А., Захарова Т.В., Карпов П.И.* Решение обратной задачи в многодипольной модели источников магнитоэнцефалограмм методом независимых компонент // Информатика и ее применения, 2014. — Т. 8, № 2. С. 79–87.
7. *Allakhverdiyeva V. M., Chshenyavskaya E. V., Dranitsyna M. A., Karpov P. I., Zakharova T. V.* Approach for inverse problem solving, assuming gamma distribution of myogram noise within rest intervals and utilizing Independent component analysis // Journal of Mathematical Sciences, 2016. Vol. 214, No.1, pp.3–11.
8. *Baillet S., Mosher J. C., Leahy R. M.* Electromagnetic Brain Mapping // IEEE Signal Processing Magazine, 2001. Vol. 18, No. 6, pp. 14–30.
9. *Sarvas J.* Basic mathematical and electromagnetic concepts of the biomagnetic inverse problem // Physics in Medicine and Biology, 1987. Vol. 32. pp. 11–22.
10. *Uitert R., Weinstein D., Johnson C.* Can a Spherical Model Substitute for a Realistic Head Model in Forward and Inverse MEG Simulations?

// Proc. 13th Int. Conf. on Biomagnetism, Jena, Germany, 2002, pp. 798–800.

11. *Ландау Л.Д., Питаевский Л.П., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред // Физматлит, Москва, 2005.
12. *Стреттон Дж.А.* Теория электромагнетизма // ОГИЗ, 1948.
13. *Hasgall P.A., Di Gennaro F., Baumgartner C., Neufeld E., Gosselin M.C., Payne D., Klingenbock A., Kuster N.* “IT’IS Database for thermal and electromagnetic parameters of biological tissues,” Version 3.0, September 01st, 2015, DOI: 10.13099/VIP21000-03-0. www.itis.ethz.ch/database
14. *Ilmoniemi R. J., Hamalainen M. S., and Knuutila J.* The forward and inverse problems in the spherical model // Biomagnetism: Applications and Theory, H. Weinberg, G. Stroink, and T. Katila, Eds. New York: Pergamon, 1985, pp. 278–282.
15. *Dassios G.* The magnetic potential for the ellipsoidal MEG problem // Journal of Computational Mathematics, 2007. Vol. 25, pp. 145–156.
16. *Cuffin B., Cohen D.* Magnetic fields of a dipole in special volume conductor shapes // IEEE Trans. Biomed. Eng., 1977. Vol. BME-24, pp. 372–381.
17. *de Munck J. C.* The potential distribution in a layered anisotropic spheroidal volume conductor // J. Appl. Phys., 1988. Vol. 64, pp. 464-470.