

*М.А. Зыкова<sup>1</sup>, В.В. Лопушенко<sup>2</sup>*

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИФРАКЦИИ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ**

### **Введение**

Задача рассеяния электромагнитных волн лежит в основе большинства теоретических и экспериментальных методов почти во всём электромагнитном спектре, от радиоволн до оптики и рентгеновских лучей. В последнее время интерес учёных вызывают задачи плазмоники [1] для разработки приложений в области биомедицинских [2,3], энергетических и информационных технологий [4], а также при конструировании современных интегральных схем [5]. Недавно исследовалось рассеяние света частицами песка, которое возникает при дистанционном наблюдении за регионами с различными типами песка [6], в том числе и при изучении влияния заряженных частиц песка на радиолокацию [7,8] и оптические свойства морских аэрозолей [9]. В работе [10] изучалось изменение в спектрах отражения объектов, подвергшихся космическому атмосферному воздействию, посредством механизмов светорассеяния. Большой интерес вызывает также рассеяние света в сложных частицах типа ядро – мантия [11,12,13].

Задачи рассеяния являются отдельным классом задач электродинамики, для которых точное аналитическое решение можно получить только в некоторых случаях. В большинстве задач используют приближённые методы с весьма сложным математическим аппаратом. Одними из наиболее популярных подходов являются прямые методы и полуаналитические объёмные и поверхностные методы. Прямые методы применяются непосредственно к системе уравнений Максвелла. Например, метод конечных разностей во временной области (FDTD) [14] и метод конечных элементов в частотной области (FEM) [15], а также их различные модификации с применением разрывного метода Галёркина [16]. К полуаналитическим поверхностным методам относятся: метод поверхностных интегральных уравнений (SIE) [17,18], метод Т-матриц [9,10,19], метод дискретных источников [13]. К полуаналитическим объёмным методам относятся:

---

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМиК, Москва, РФ., s02210101@gse.cs.msu.ru

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМиК, Москва, РФ., lopushnk@cs.msu.ru

приближение дискретными диполями (DDA) [1,20] и метод объёмных интегральных уравнений [21,22,23,24].

Метод интегральных уравнений – один из наиболее универсальных и мощных инструментов в теории рассеяния. В классическом варианте метод применяется для вычисления решения, являющегося функцией пространственных переменных. Однако, при этом возникает необходимость выделения особенности в интегральном уравнении.

В данной работе рассматривается обобщение метода [24] для решения задач рассеяния плоских электромагнитных волн на объектах произвольной формы в свободном пространстве. Предложено решать интегральное уравнение в спектральной области с применением теоремы отсчётов и быстрых алгоритмов вычисления свёрток. В задаче дифракции на диэлектрическом однородном и слоистом эллипсоиде выписаны аналитические представления для всех функций, входящих в интегральное уравнение. При этом в численной схеме метода удалось избавиться от особенностей с помощью подхода, аналогичного [25]. В работе показано, что полученное решение интегрального уравнения в спектральной области даёт удобный способ вычисления диаграммы рассеяния.

### Постановка задачи

Рассмотрим объёмное интегральное уравнение теории дифракции [21,22]

$$\mathbf{E}(M_0) = \mathbf{E}^0(M_0) + \int_V (k_1^2 - k_0^2) \mathbf{G}(M, M_0) \mathbf{E}(M) dV_M, \quad M_0 \in V, \quad (1)$$

решением которого является поле  $\mathbf{E}(M_0)$ , которое формируется при рассеянии поля внешнего возбуждения  $\mathbf{E}^0(M_0)$  на однородном теле  $V$  с волновым числом  $k_1$ , расположенном в среде с волновым числом  $k_0$ , а  $\mathbf{G}(M, M_0)$  – матрица фундаментальных решений [21] векторного уравнения для электрического поля, записанного в свободном пространстве. Переведём его в спектральную область. Для этого введём функции

$$\Delta K = \begin{cases} k_1^2 - k_0^2, & M \in V \\ 0, & M \notin V \end{cases}$$

$$V_i(M_0) = \Delta K E_i(M_0), \quad i = x, y, z$$

$$V_i^0(M_0) = \Delta K E_i^0(M_0) = \Delta K e_i e^{-ik_0(z \cos(\theta_0) - x \sin(\theta_0))},$$

которые отличны от нуля только внутри объема  $V$ ,  $e_i$  – декартовы компоненты вектора поляризации плоской волны  $e^{-ik_0(z \cos(\theta_0) - x \sin(\theta_0))}$  (внешнее возбуждение), падающей на тело  $V$  под углом  $\theta_0$  в полуплоскости  $\varphi = \pi$ . Умножая обе части уравнения (1) на  $\Delta K$  и применяя к обеим частям уравнения трехмерное преобразование Фурье  $\hat{\mathbf{V}} = F[\mathbf{V}]$  и теорему о свертке, получим покомпонентно

$$\begin{aligned}
\widehat{V}_x &= \widehat{V}_x^0 + \frac{1}{(2\pi)^3} \widehat{K} * (\widehat{G}_{xx}\widehat{V}_x + \widehat{G}_{xy}\widehat{V}_y + \widehat{G}_{xz}\widehat{V}_z), \\
\widehat{V}_y &= \widehat{V}_y^0 + \frac{1}{(2\pi)^3} \widehat{K} * (\widehat{G}_{yx}\widehat{V}_x + \widehat{G}_{yy}\widehat{V}_y + \widehat{G}_{yz}\widehat{V}_z), \\
\widehat{V}_z &= \widehat{V}_z^0 + \frac{1}{(2\pi)^3} \widehat{K} * (\widehat{G}_{zx}\widehat{V}_x + \widehat{G}_{zy}\widehat{V}_y + \widehat{G}_{zz}\widehat{V}_z).
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь приняты обозначения для образов Фурье

$$\widehat{V}_i = F[V_i], \quad \widehat{V}_i^0 = F[V_i^0], \quad \widehat{K} = F[\Delta K], \quad \widehat{G}_{ij} = F[G_{ij}],$$

$i, j = x, y, z.$

В векторном виде систему (2) можно записать следующим образом

$$\widehat{V} + \frac{1}{(2\pi)^3} [\widehat{K} * (\widehat{G}\widehat{V})] = \widehat{V}^0, \tag{3}$$

где  $\widehat{V}$ ,  $\widehat{K}$ ,  $\widehat{G}$ ,  $\widehat{V}^0$  - функции спектральных координат  $(p, q, s)$ , соответствующих пространственным координатам  $(x, y, z)$  и  $\widehat{K} = \widehat{K}\mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  - диагональная единичная матрица. В каждом из уравнений (2) используется операция трехмерной свертки, обозначаемая знаком  $*$ .

Уравнение (3) является представлением исходного уравнения в спектральной области. В данной работе предложен численный метод решения уравнения (3) для определения неизвестной функции  $\widehat{V}$ .

### Аналитические представления используемых в уравнении функций

Для решения уравнения (3) необходимо численно или аналитически находить значения функций, входящих в это уравнение. Рассмотрим область  $V$  в виде однородного эллипсоида с полуосями  $a, b, c$  по переменным  $x, y$  и  $z$  соответственно. В этом случае функцию  $\widehat{K}$  можно выписать аналитически:

$$\begin{aligned}
\widehat{K}(p, q, s) &= \iiint_V (k_1^2 - k_0^2) e^{-i(px+qy+sz)} dx dy dz = \\
&= 4\pi \frac{abc}{v^2} (k_1^2 - k_0^2) \left( \frac{\sin(v)}{v} - \cos(v) \right), \\
v^2 &= (pa)^2 + (qb)^2 + (sc)^2 \text{ и при } v \rightarrow 0 \\
\lim_{v \rightarrow 0} \widehat{K}(p, q, s) &= \frac{4\pi}{3} abc(k_1^2 - k_0^2).
\end{aligned} \tag{4}$$

В предположении, что в качестве внешнего возбуждения рассматривается плоская волна, правая часть в уравнении (3) определяется выражением

$$\begin{aligned}
\widehat{V}^0 &= F[\mathbf{V}^0] = F[\Delta K \mathbf{e}_i e^{-ik_0(z\cos(\theta_0) - x\sin(\theta_0))}] = \\
&= \mathbf{e}_i \widehat{K}(p - k_0\sin(\theta_0), q, s + k_0\cos(\theta_0)),
\end{aligned}$$

где функция  $\widehat{K}$  задана соотношением (4).

Матричные элементы  $\widehat{G}_{ij}$  определяются согласно [21] и имеют вид:

$$\begin{aligned}
F[G_{xx}] &= \frac{1}{4\pi} \left( F[g] + \frac{1}{k_0^2} F \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] \right) = \frac{1}{4\pi} \left( 1 - \frac{p^2}{k_0^2} \right) F[g], \\
F[G_{xy}] &= F[G_{yx}] = F \left[ \frac{1}{4\pi k_0^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] = -\frac{pq}{4\pi k_0^2} F[g], \\
F[G_{xz}] &= F[G_{zx}] = -\frac{ps}{4\pi k_0^2} F[g], \\
F[G_{yy}] &= \frac{1}{4\pi} \left( F[g] + \frac{1}{k_0^2} F \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \right) = \frac{1}{4\pi} \left( 1 - \frac{q^2}{k_0^2} \right) F[g], \\
F[G_{yz}] &= F[G_{zy}] = -\frac{qs}{4\pi k_0^2} F[g], \\
F[G_{zz}] &= \frac{1}{4\pi} \left( 1 - \frac{s^2}{k_0^2} \right) F[g].
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь  $g(M, M_0) = \frac{e^{ik_0 R_{MM_0}}}{R_{MM_0}}$  – фундаментальное решение скалярного уравнения Гельмгольца в свободном пространстве, которому соответствует Фурье-образ

$$\widehat{g} = F[g] = \frac{4\pi}{p^2 + q^2 + s^2 - k_0^2}$$

с особенностью в точках  $\{(p, q, s) : p^2 + q^2 + s^2 = k_0^2\}$ .

В отличие от классической схемы выделения особенности, применяемой при решении уравнения (1) в пространственных переменных [22], мы будем следовать подходу [25], предполагающему построение «эквивалентной» функции Грина.

Рассмотрим функцию  $g_0$  с ограниченным носителем, совпадающую с исходной функцией  $g$  в шаре  $V_{R_\varphi} = \{(x, y, z) : |x^2 + y^2 + z^2| \leq R_\varphi\}$ , который включает область изменения аргументов матрицы  $\mathbf{G}$  при интегрировании по области  $V$  в (1) и принимающую нулевые значения вне этого шара. Тогда в пределах области интегрирования новая функция будет идентична исходной. Фурье-образ построенной таким образом эквивалентной функции вычисляется аналитически и имеет вид:

$$\widehat{g}_0 = 4\pi \left( \frac{1 - e^{ik_0 R_\varphi} \cos \rho R_\varphi}{\rho^2 - k_0^2} + \frac{ik_0 R_\varphi e^{ik_0 R_\varphi} \sin \rho R_\varphi}{(\rho^2 - k_0^2) \rho R_\varphi} \right), \tag{6}$$

где  $\rho^2 = p^2 + q^2 + s^2$ .

Как видно из (6),  $\widehat{g}_0$  особенности не имеет. При численном решении (3) для вычисления матричных элементов по формулам (5) будем использовать эквивалентную функцию  $\widehat{g}_0 = F[g_0]$ , обозначая новую матрицу  $\widehat{\mathbf{G}}^0$ .

Таким образом, выписаны аналитические представления всех функций, входящих в интегральное уравнение (3) для случая рассеяния плоской электромагнитной волны проникаемым эллипсоидом.

### Численная схема решения интегрального уравнения

Дискретизацию уравнения (3) удобно выполнить с помощью теоремы отсчетов [26]. Так как все функции, входящие в уравнение, отличны от нуля в ограниченных пространственных областях, их Фурье-образы можно представить рядами Котельникова. При этом теорема отсчетов определяет правило выбора предельных шагов дискретизации  $\Delta_p, \Delta_q, \Delta_s$  по максимальным размерам пространственных областей.

В предположении убывания решения  $\widehat{V}(p, q, s)$  на бесконечности, представим его конечным рядом Котельникова:

$$\widehat{V} = \sum_{i=-N_p}^{N_p} \sum_{j=-N_q}^{N_q} \sum_{k=-N_s}^{N_s} \widehat{V}_{ijk} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta_p}(p - \Delta_p i)\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta_q}(q - \Delta_q j)\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta_s}(s - \Delta_s k)\right). \quad (7)$$

Здесь  $\widehat{V}_{ijk} = \widehat{V}(\Delta_p i, \Delta_q j, \Delta_s k)$  – искомые значения в узлах дискретной частотной сетки.

Если использовать аналогичные представления для известных функций  $\widehat{K}, \widehat{G}^0, \widehat{V}^0$  и подставить их в уравнение (3), получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\widehat{V}_{mnl} = \widehat{V}_{mnl}^0 + \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{i=-N_p}^{N_p} \sum_{j=-N_q}^{N_q} \sum_{k=-N_s}^{N_s} \Delta_p \Delta_q \Delta_s \widehat{K}_{i-m, j-n, k-l} \widehat{G}_{ijk}^0 \widehat{V}_{ijk}. \quad (8)$$

Здесь:  $i, m \in [-N_p, N_p], j, n \in [-N_q, N_q], k, l \in [-N_s, N_s]$ .

В СЛАУ (8) будем дополнять функцию  $\widehat{K}$  нулями при вычислении дискретной свёртки, т. е. считать, что  $\widehat{K}_{ijk} = 0$  при

$$|i| > 2N_p, |j| > 2N_q, |k| > 2N_s.$$

СЛАУ (8) решалась с помощью обобщенного метода минимальных невязок GMRES с использованием управляющей функции, реализующей умножение матрицы системы (8) на вектор решения. Необходимый диапазон в частотной области и количество слагаемых в рядах Котельникова выбирались из условия хорошей аппроксимации входящих в интегральное уравнение функций.

### Обобщение алгоритма на случай слоистой частицы

Рассмотрим область в виде частицы ядро-оболочка, в которой и ядро, и оболочка имеют форму трехосного эллипсоида. Для начала

предположим, что ядро с волновым числом  $k_2$  и оболочка с волновым числом  $k_1$  концентричны. Тогда функция  $\hat{K}$  примет вид:

$$\hat{K} = 4\pi \frac{a_1 b_1 c_1}{v_1^2} (k_1^2 - k_0^2) \left( \frac{\sin(v_1)}{v_1} - \cos(v_1) \right) + 4\pi \frac{a_2 b_2 c_2}{v_2^2} (k_2^2 - k_1^2) \left( \frac{\sin(v_2)}{v_2} - \cos(v_2) \right), \quad (9)$$

где  $a_1, b_1, c_1$  – полуоси внешнего эллипсоида,  $a_2, b_2, c_2$  – полуоси внутреннего эллипсоида, а

$$v_1^2 = (pa_1)^2 + (qb_1)^2 + (sc_1)^2, \quad v_2^2 = (pa_2)^2 + (qb_2)^2 + (sc_2)^2. \quad (10)$$

При смещении ядра получим

$$\hat{K} = 4\pi \frac{a_1 b_1 c_1}{v_1^2} (k_1^2 - k_0^2) \left( \frac{\sin(v_1)}{v_1} - \cos(v_1) \right) + e^{-i(px_0 + qy_0 + sz_0)} 4\pi \frac{a_2 b_2 c_2}{v_2^2} (k_2^2 - k_1^2) \left( \frac{\sin(v_2)}{v_2} - \cos(v_2) \right). \quad (11)$$

Здесь  $x_0, y_0, z_0$  задают смещение ядра по осям  $x, y$  и  $z$  соответственно. Из (9) и (11) видно, что функция слоистой частицы может быть вычислена с помощью функции однородной частицы (4) и при смещении ядра во втором слагаемом появляется множитель с параметрами смещения.

Рассмотрим, как преобразуется второе слагаемое в (9) при повороте ядра. В этом случае преобразование Фурье

$$\hat{K} = \iiint_{\tilde{V}} (k_2^2 - k_1^2) e^{-i(p\tilde{x} + q\tilde{y} + s\tilde{z})} d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z}$$

где координаты преобразуются с помощью матрицы поворота

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\sin \gamma \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \gamma - \sin \beta \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

а  $\alpha, \beta, \gamma$  – задают углы поворота вокруг осей  $X, Y$  и  $Z$  соответственно, принимает вид

$$\hat{K} = (k_2^2 - k_1^2) \iiint_V e^{-i(\tilde{p}x + \tilde{q}y + \tilde{s}z)} dx dy dz, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= p \cos \beta \cos \gamma + q(\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha) + s(\sin \alpha \sin \gamma - \sin \beta \cos \alpha \cos \gamma), \\ \tilde{q} &= -(p \sin \gamma \cos \beta + q(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma) - s(\sin \alpha \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha)), \\ \tilde{s} &= p \sin \beta - q \sin \alpha \cos \beta + s \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

Таким образом, для вычисления функции повернутого ядра (12) можно применить формулу (4):

$$\hat{K} = 4\pi \frac{a_2 b_2 c_2}{v^2} (k_2^2 - k_1^2) \left( \frac{\sin(v)}{v} - \cos(v) \right), \quad (13)$$

$$\text{где } v^2 = (\tilde{p}a_2)^2 + (\tilde{q}b_2)^2 + (\tilde{s}c_2)^2.$$

### Связь диаграммы рассеяния с решением интегрального уравнения

В предыдущих разделах был рассмотрен алгоритм решения объемного интегрального уравнения дифракции (1) с переходом в область пространственных частот. Рассмотрим, как можно вычислить диаграмму рассеяния, используя полученное решение уравнения (3). Для этого необходимо выписать представление рассеянного поля

$$\mathbf{E}^{sc}(\mathbf{M}_0) = \mathbf{E}(\mathbf{M}_0) - \mathbf{E}_0(\mathbf{M}_0)$$

при удалении точки наблюдения  $\mathbf{M}_0(x_0, y_0, z_0)$  от рассеивателя или, в сферических координатах  $\mathbf{M}_0(R, \theta, \phi)$ , при  $R \rightarrow \infty$ ,  $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ .

Так как при больших  $R$  с учетом представления

$$\frac{e^{ik_0 R_{MM_0}}}{R_{MM_0}} \approx \frac{e^{ik_0 R}}{R} e^{-ik_0(\sin\theta \cos\phi x + \sin\theta \sin\phi y + \cos\theta z)} \quad (14)$$

матричные элементы (5) принимают вид

$$G_{xx} = \frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R} (1 - \sin^2\theta \cos^2\phi) e^{-ik_0(\sin\theta \cos\phi x + \sin\theta \sin\phi y + \cos\theta z)},$$

$$G_{yy} = \frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R} (1 - \sin^2\theta \sin^2\phi) e^{-ik_0(\sin\theta \cos\phi x + \sin\theta \sin\phi y + \cos\theta z)},$$

$$G_{zz} = \frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R} (1 - \cos^2\theta) e^{-ik_0(\sin\theta \cos\phi x + \sin\theta \sin\phi y + \cos\theta z)},$$

$$G_{xy} = G_{yx} = \frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R} (-\sin^2\theta \sin\phi \cos\phi) e^{-ik_0(\sin\theta \cos\phi x + \sin\theta \sin\phi y + \cos\theta z)},$$

$$G_{xz} = G_{zx} = \frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R} (-\sin\theta \cos\theta \cos\phi) e^{-ik_0(\sin\theta \cos\phi x + \sin\theta \sin\phi y + \cos\theta z)},$$

$$G_{yz} = G_{zy} = \frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R} (-\sin\theta \cos\theta \sin\phi) e^{-ik_0(\sin\theta \cos\phi x + \sin\theta \sin\phi y + \cos\theta z)},$$

для рассеянного поля получим при  $R \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{sc}(\theta, \phi) &\approx \frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R} \int_V \bar{\mathbf{G}}\mathbf{V}(\mathbf{M}) e^{ik_0(\sin\theta \cos\phi x + \sin\theta \sin\phi y + \cos\theta z)} dx dy dz \approx \\ &\frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R} \bar{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{V}}(k_0 \sin\theta \cos\phi, k_0 \sin\theta \sin\phi, k_0 \cos\theta). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $\bar{\mathbf{G}}$  матрица, зависящая от углов рассеяния  $(\theta, \phi)$ .

С учетом определения диаграммы рассеяния  $\mathbf{F}(\theta, \phi)$

$$\mathbf{E}^{\text{sc}}(\theta, \phi) = \frac{e^{ik_0 R}}{R} \mathbf{F}(\theta, \phi),$$

получаем соотношение, определяющее связь диаграммы с решением  $\widehat{\mathbf{V}}$  уравнения (3)

$$\mathbf{F}(\theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \overline{\mathbf{G}}(\theta, \phi) \widehat{\mathbf{V}}(k_0 \sin\theta \cos\phi, k_0 \sin\theta \sin\phi, k_0 \cos\theta). \quad (16)$$

Полученное представление для диаграммы дает возможность прямого вычисления её компонент без выполнения обратного преобразования Фурье. Кроме того, представление решения в виде (7) позволяет использовать интерполирующие свойства ряда Котельникова для вычисления интенсивности рассеянного поля при любых углах. Интенсивность рассеянного поля для заданного угла падения  $\theta_0$  определяется как квадрат модуля диаграммы

$$I(\theta, \phi) = (\mathbf{F}(\theta, \phi), \mathbf{F}^*(\theta, \phi)) \quad (17)$$

### Численные результаты

Предложенный метод был использован для решения задачи дифракции Р-поляризованной плоской волны  $\lambda = 0.450$ , падающей под углом  $\theta_0 = 30^\circ$  на однородный сфероид с волновым числом  $k_1 = k_0 n_1$ ,  $n_1 = 1.59$ ,  $k_0 = 2\pi/\lambda$ . Будем без ограничения общности полагать, что все величины безразмерны.

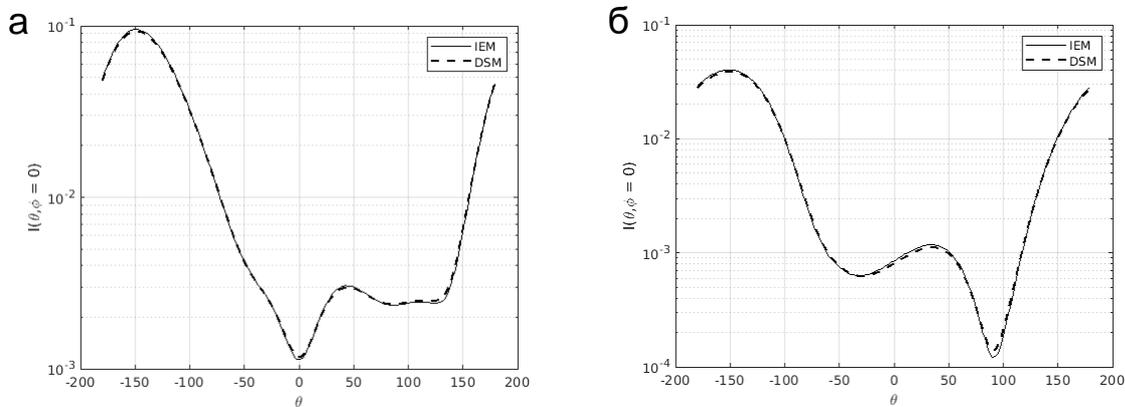


Рис.1 Диаграмма рассеяния однородных сфероидов (4):

- а) - сплюснутый сфероид с полуосями  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 0.1$ ,
- б) - вытянутый сфероид с полуосями  $a = 0.1$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 0.2$

На рис. 1 представлены графики интенсивности рассеянного поля (17) в плоскости падения, полученные с помощью рассмотренной модификации метода интегральных уравнений (ИЕМ) и метода Дискретных источников (DSM) [27] для сплюснутого (а) и вытянутого (б) сфероидов. В обоих случаях можно видеть полное соответствие результатов.

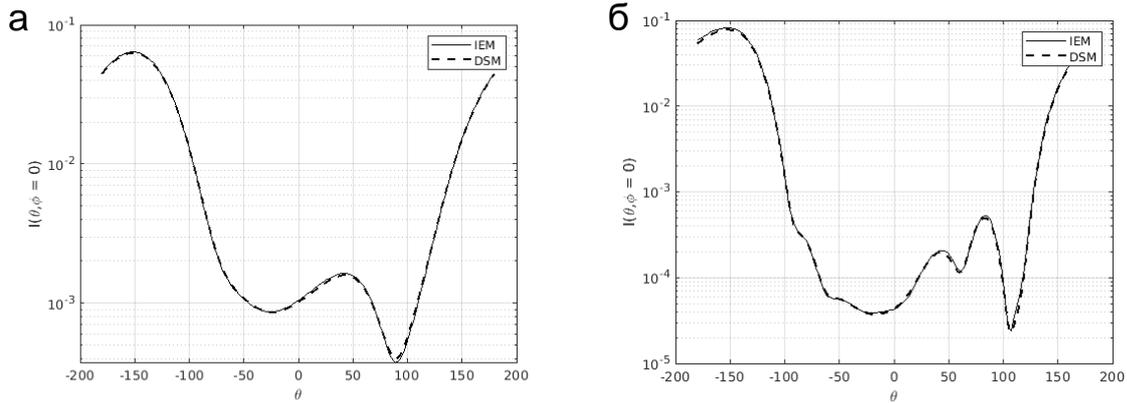


Рис.2 Диаграмма рассеяния вытянутых слоистых сфероидов (9):

- а) оболочка:  $a_1 = 0.125, b_1 = 0.125, c_1 = 0.225$ ;  
 ядро:  $a_2 = 0.100, b_2 = 0.100, c_2 = 0.200$ ;  
 б) оболочка:  $a_1 = 0.099, b_1 = 0.099, c_1 = 0.393$ ;  
 ядро:  $a_2 = 0.074, b_2 = 0.074, c_2 = 0.368$

В задаче дифракции плоской волны на слоистой сфероидальной частице типа «ядро-оболочка» был также выполнен сравнительный анализ результатов, полученных с помощью методов IEM и DSM (Рис. 2).

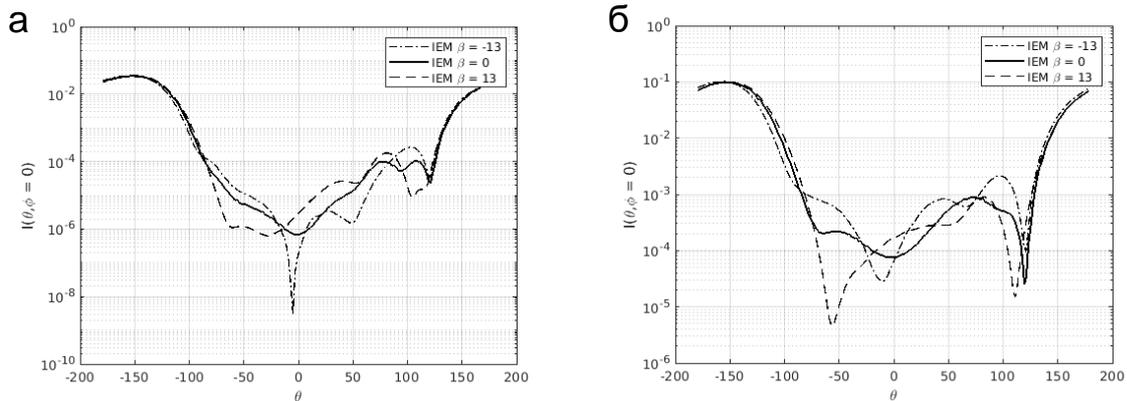


Рис.3 Диаграмма рассеяния сфероидов с поворотом ядра на угол  $\beta$  (13);

- параметры оболочки:  $a_1 = 0.099, b_1 = 0.099, c_1 = 0.393, n_1 = 1.21$ ;  
 а) ядро:  $a_2 = 0.054, b_2 = 0.054, c_2 = 0.268, n_2 = 1.59$ ;  
 б) ядро:  $a_2 = 0.054, b_2 = 0.054, c_2 = 0.268, n_2 = 2.2$

Длина волны  $\lambda = 0.450$ , и угол падения  $\theta_0 = 30^\circ$  были выбраны такими же, как в случае однородных сфероидов. Для волновых чисел ядра и оболочки были взяты соответственно значения  $k_2 = k_0 n_2$ ,  $n_2 = 1.59$ , и  $k_1 = k_0 n_1$ ,  $n_1 = 1.21$ . При этом ядро располагалось в центре оболочки, без смещений и поворотов. На рис. 2а показана интенсивность рассеянного поля для сфероида с соотношением осей ядра 2:1, а на рис. 2б – с соотношением его осей 5:1. В обоих случаях наблюдается полное соответствие с результатами, полученными с помощью метода DSM. Отметим,

что во втором случае в СЛАУ (8) использовались значения параметров  $N_p = 60$ ,  $N_q = 60$ ,  $N_s = 12$ , при которых время вычислений в Matlab составило около 3 минут.

При рассмотрении слоистых частиц с повернутым ядром в функции области частицы (9) второе слагаемое преобразуется к виду (13). На рис. 3 представлены результаты для сфероидальной частицы с вытянутым в отношении 5:1 ядром, повернутым вокруг оси  $Y$  на угол  $\beta = -13^\circ, 0^\circ, 13^\circ$ . Случаи (а) и (б) соответствуют разным показателям преломления ядра. Можно видеть, что у ядра с большим показателем преломления графики расположен выше по оси ординат, так как интенсивность рассеянного поля увеличивается. Поворот ядра оказывает существенное влияние на центральную часть графика, тогда как форма боковых частей меняется мало.

### Заключение

В работе рассмотрен метод решения задачи дифракции на трехмерной неоднородности с переходом в область пространственных частот, обладающий следующими особенностями, которые представляются весьма привлекательными с точки зрения численной реализации:

- использование «эквивалентной» функции фундаментального решения уравнения Гельмгольца позволяет избежать появления особенностей в области пространственных частот;
- представление решения в виде конечных рядов Котельникова даёт удобный способ дискретизации интегрального уравнения, а также интерполяционный метод вычисления решения в произвольных точках;
- в численной схеме метода используются быстрые алгоритмы вычисления трёхмерных свёрток, что повышает его производительность;
- диаграмма рассеяния вычисляется непосредственно из полученного решения без дополнительных преобразований.

Следует также отметить, что в рассмотренных задачах дифракции на сфероидальных однородных и слоистых телах все функции имели аналитические представления. При обобщении метода на случай рассеивателей более сложной структуры потребуется определять значения функции области в (4) с помощью численного интегрирования.

### Литература

1. *Akanksha Bhardwaj, Pradeep Bhatia, Suram Singh Verma* Plasmonic properties of silver coated non-spherical gallium alloy nanoparticles // *Optical and Quantum Electronics* (2023).
2. *Nafeesa Sarfraz, Ibrahim Khan* Plasmonic Gold Nanoparticles (AuNPs): Properties, Synthesis and their Advanced Energy, Environmental and

- Biomedical Applications //Advanced Functional Materials Volume 30, Issue 7 April 1, 2021.
3. *Anand M. Shrivastav, Uroš Cvelbar, Ibrahim Abdulhalim* A comprehensive review on plasmonic-based biosensors used in viral diagnostics // *Communications Biology*, Volume 4, Article number: 70 (2021).
  4. *Lu Wang, Morteza Hasanzadeh Kafshgari, Michel Meunier* Optical Properties and Applications of Plasmonic-Metal Nanoparticles // *Advanced Functional Materials* Volume 30, Issue 51 December 15, 2020.
  5. *Jingjing Zhang, Hao-Chi Zhang, Xin-Xin Gao, Le-Peng Zhang, Ling Yun Niu, Pei-Hang He, Tie-Jun Cui* Integrated spoof plasmonic circuits // *Science Bulletin*, Volume 64, Issue 12, 30 June 2019, Pages 843-855.
  6. *Nataliya Zubko, Olga Muñoz, Evgenij Zubko, Maria Gritsevich, Jesús Escobar-Cerezo, Matthew J. Bergf, Jouni Peltoniemi* Light scattering from volcanic-sand particles in deposited and aerosol form // *Atmospheric Environment*, Volume 215, 15 October 2019.
  7. *Xie Li, Zhong Haichao, Du Zhixin, Zhou Jun* Monte Carlo simulation of electromagnetic wave transmittance in charged sand/dust storms // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 241, January 2020.
  8. *Jiaoyan Ma, Ke Jin, Xiaojing Zheng* Radar Cross-section of a target and attenuation of electromagnetic waves in sandstorms // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 294, January 2023.
  9. *Michael Kahnert, Franz Kanngießer* Optical properties of marine aerosol: modelling the transition from dry, irregularly shaped crystals to brine-coated, dissolving salt particles // *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*.
  10. *Antti Penttilä, Timo Väisänen, Johannes Markkanen, Julia Martikain, Tomáš Kohout, Gorden Videen, Karri Muinonen* Rigorous light-scattering simulations of nanophase iron space weathering effects on reflectance spectra of olivine grains // *Icarus*, Volume 345, 15 July 2020.
  11. *Turichina D.G., Farafonov V.G., Il'in V.B.* Exact solution to the light scattering problem for a core-mantle spheroid with non-confocal layer boundaries // *DAYS on DIFFRACTION 2022*.
  12. *Lobanov Sergey S., Speziale Sergio, Brune Sascha* Modelling Mie scattering in pyrolite in the laser-heated diamond anvil cell: Implications for the core-mantle boundary temperature determination // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*.
  13. *Еремин Ю.А., Лопушенко В.В.* Исследование эффекта пространственной дисперсии в металлической оболочке несферической магнетоплазменной наночастицы // *Оптика и спектроскопия*, 2022, том 130, вып. 10.

14. *Sadeed Bin Sayed, Rui Chen, Huseyin Arda Ulku, Hakan Bagci* A Time Domain Volume Integral Equation Solver to Analyze Electromagnetic Scattering from Nonlinear Dielectric Objects// IEEE Transactions On Antennas And Propagation.
15. *J.-M. Jin* The Finite Element Method in Electromagnetics // Wiley-IEEE, Hoboken, New Jersey 2015.
16. *Martín V.F., Solís D.M., Jericó D., Landesa L., Obelleiro F., Taboada J.M.* Discontinuous Galerkin integral equation method for light scattering from complex nanoparticle assemblies // Optics Express Vol. 31, Issue 2, pp. 1034-1048 (2023).
17. *Gallinet B., Butet J., Martin O.J.F.* Numerical methods for nanophotonics: standard problems and future challenges (Review)// Laser Photon. Rev. 2015. V. 9 (6). P. 577.
18. *Галишишникова Т.Н., Ильинский А.С.* Метод интегральных уравнений в задачах дифракции волн. // М.:МАКС Пресс, 2013 – 248 с.
19. *Mark S. Haynes, Ines Fenni* T-Matrix Backprojection Imaging for Scalar and Vector Electromagnetic Waves // Transactions on antennas and propagation, vol. 71, no. 3, march 2023.
20. *Yuant Tiandho, Ni Luh Wulan Septiani, Gilang Gumilar, Riri Jonuarti, Suprijadi, Brian Yulianto* High Performance Refractive Index-Based Sensor Using Ellipsoid Ag@Au Nanoparticles // Sensors Journal.
21. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. //М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
22. *Самохин А.Б.* Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. // М.: Радио и связь, 1998 – 160 с.
23. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. // М.: Мир, 1987. - 312 с.
24. *Еремин Ю.А., Лопушенко В.В.* Метод интегральных уравнений в спектральной области для анализа плоских дефектов подложки// Дифференциальные уравнения. 2014, Т.50, №9. С.1187-1195.
25. *Felipe Vico, Leslie Greengard, Miguel Ferrando* Fast convolution with free-space Green's functions// Journal of Computational Physics; Volume 323, 15 October 2016, Pages 191-203.
26. *Басараб М.А., Зелкин Е.Г., Кравченко В.Ф., Яковлев В.П.* Цифровая обработка сигналов на основе теоремы Уитаккера-Котельникова-Шеннона. // М.: Радиотехника, 2004.
27. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992.