

А. А. Арсеньев

**ЛЕКЦИИ
ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ
ДЛЯ НАЧИНАЮЩИХ СПЕЦИАЛИСТОВ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ**

Издание 2-е, исправленное и дополненное



Москва ♦ Ижевск

2011

УДК 517.11
ББК 22.162
А853

Интернет-магазин

MATHESIS

<http://shop.rcd.ru>

- физика
 - математика
 - биология
 - нефтегазовые технологии
-

Арсеньев А. А.

Лекции по функциональному анализу для начинающих специалистов по математической физике. — Изд. 2-е, исп. и доп. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. — 524 с.

В книге изложены основы функционального анализа в традиционном для университетского учебника объеме. Изложение рассчитано на читателя, имеющего минимальную начальную математическую подготовку в объеме курса анализа и линейной алгебры для технических вузов и все доказательства приведены подробно. С полными доказательствами приведены необходимые сведения из теории интеграла, теории функций и общей топологии. В учебнике рассмотрен ряд тем (теория возмущений, теория рассеяния, преобразование Вейля и др.), которые будут интересны специализирующимся в математической физике читателям.

ISBN 978-5-93972-895-9

ББК 22.162

© А. А. Арсеньев, 2011

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

Оглавление

Предисловие	vi
ГЛАВА 1. Элементарные сведения о интеграле и мере	1
1.1. Интеграл Лебега	1
1.1.1. Основные структуры, используемые при построении интеграла по схеме Даниэля	1
1.1.2. Множества меры ноль	11
1.1.3. Построение интеграла по схеме Даниэля	18
1.1.4. Предельный переход в интеграле Лебега	33
1.1.5. Пространства $L^p(X)$	42
1.2. Мера и измеримые функции	48
1.2.1. Сводка основных определений теории меры	48
1.2.2. Построение меры множества в схеме Даниэля	55
1.2.3. Измеримые функции	64
1.2.4. Сходимость по мере	66
1.2.5. Функция Кантора	70
1.2.6. Теорема Фубини	72
1.2.7. Разложение Лебега и теорема Радона–Никодима	76
1.2.8. Счетно-аддитивные функции множеств и теорема Хана	80
1.2.9. Общий вид линейного непрерывного функционала на пространстве $L^p(X)$	84
1.2.10. Функции с ограниченной вариацией и абсолютно непрерывные функции	87
1.3. Комментарии и литературные указания	102
ГЛАВА 2. Метрические и топологические пространства	105
2.1. Метрические пространства	105
2.1.1. Расстояние и связанные с ним понятия	105
2.1.2. Сходимость в метрическом пространстве	107
2.1.3. Принцип сжимающих отображений	112
2.2. Топологические пространства	114
2.2.1. Определение топологического пространства	114

2.2.2.	Замкнутые множества	119
2.2.3.	Непрерывные отображения	123
2.2.4.	Аксиомы отделимости	127
2.3.	Компактные пространства	132
2.4.	Фильтры, ультрафильтры и теорема Тихонова	147
2.5.	Комментарии и литературные указания	154
ГЛАВА 3. Банаховы пространства		157
3.1.	Основные определения	157
3.2.	Пространство линейных отображений	163
3.3.	Основные принципы	167
3.3.1.	Принцип равномерной ограниченности и теорема Банаха–Штейнгауза	167
3.3.2.	Теорема об открытом отображении и ее следствия	172
3.3.3.	Теорема Хана-Банаха	178
3.4.	Сопряженное пространство и элементы теории двойственности	181
3.4.1.	Сопряженное пространство	181
3.4.2.	Сопряженный оператор	188
3.5.	Банаховы алгебры и операторное исчисление	192
3.5.1.	Предварительные сведения	192
3.5.2.	Резольвента и спектр	196
3.5.3.	Операторное исчисление	202
3.6.	Изолированные особые точки резольвенты	212
3.6.1.	Общий случай	212
3.6.2.	Строение резольвенты в окрестности полюса	215
3.7.	Возмущение изолированного собственного значения	219
3.7.1.	Зависящие от параметра проекторы	219
3.7.2.	Аналитическое возмущение изолированного собственного значения	224
3.8.	Компактные операторы	232
3.8.1.	Определения и основные свойства компактных операторов	232
3.8.2.	Теория Рисса–Шаудера	238
3.9.	Резольвента и спектр неограниченных операторов	247
3.10.	Полугруппы операторов в банаховом пространстве	255
3.10.1.	Теорема Хилле–Филлипса–Йосиды	260
3.10.2.	Абстрактная задача Коши	268
3.10.3.	Некоторые равенства, связанные с теорией полугрупп	269
3.11.	Комментарии и литературные указания	274

3.11.1. Определение линейного пространства	274
3.11.2. Определение фактор-пространства	275
3.11.3. Определение прямой суммы пространств	276
ГЛАВА 4. Гильбертовы пространства	278
4.1. Основные определения	278
4.1.1. Скалярное произведение и норма	278
4.1.2. Ортонормированные системы	282
4.2. Теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве	288
4.3. Понятие гильбертова сопряжения и ограниченные самосо- пряженные операторы в гильбертовом пространстве	296
4.4. Компактные самосопряженные операторы, операторы Гильберта- Шмидта и ядерные операторы	301
4.4.1. Компактные самосопряженные операторы	301
4.4.2. Полярное разложение оператора и характеристиче- ские числа	305
4.4.3. Операторы Гильберта-Шмидта	311
4.4.4. Ядерные операторы	317
4.5. Спектральное разложение ограниченных самосопряженных операторов	321
4.6. Спектральное разложение унитарных операторов	339
4.7. Гильбертово сопряжение неограниченных операторов	345
4.8. Оснащение гильбертова пространства и билинейные формы	361
4.8.1. Оснащение гильбертова пространства	361
4.8.2. Полуограниченные эрмитовы формы и расширение операторов по Фридрихсу	367
4.9. Преобразование Келли и спектральное разложение неогра- ниченных операторов	372
4.10. Комментарии и литературные указания	383
ГЛАВА 5. Элементы математической теории рассеяния	385
5.1. Абсолютно непрерывный и сингулярный спектр оператора	385
5.2. Волновые операторы и оператор рассеяния	391
5.3. Признаки существования волновых операторов и принцип инвариантности волновых операторов	395
5.4. Формулы для матрицы рассеяния	405
5.5. Комментарии и литературные указания	411

ГЛАВА 6. Распределения	413
6.1. Пространство пробных функций	413
6.1.1. Пространство Шварца	414
6.1.2. Сходимость в пространстве $S(\mathbb{R}^d)$	418
6.1.3. Непрерывные операторы в пространстве основных функций	419
6.1.4. Пространство пробных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$	421
6.2. Распределения	423
6.2.1. Медленно растущие распределения	423
6.2.2. Сходимость в пространстве распределений	428
6.2.3. Случай пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$	430
6.2.4. Примеры вычисления пределов распределений	431
6.2.5. Дифференцирование и преобразование Фурье распре- делений	436
6.2.6. Действие аффинной группы на распределения	442
6.2.7. Свертка распределения и функции	443
6.2.8. Прямое произведение распределений	445
6.3. Фундаментальные решения дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами	449
6.3.1. Существование фундаментального решения для диф- ференциального оператора с постоянными коэффици- ентами	450
6.3.2. Примеры вычисления фундаментальных решений	456
6.4. Пространства Соболева	463
6.4.1. Преобразование Фурье–Планшереля	463
6.4.2. Определение и основные свойства пространств Собо- лева	465
6.4.3. Теоремы вложения	471
6.4.4. Пространства $\dot{H}^p(D)$	477
6.5. Комментарии и литературные указания	480
6.5.1. Преобразование Фурье	480
6.5.2. Литературные комментарии	481
ПРИЛОЖЕНИЕ А.	482
А.1. Преобразование Вейля	482
А.2. Теорема Дж. фон Неймана о единственности представления КПС в форме Вейля	493
А.3. Указатель обозначений	500
А.3.1. Обозначения, связанные с теорией множеств	500
А.3.2. Обозначения, связанные с теорией меры и интеграла	502

A.3.3. Обозначения, связанные с теорией метрических и топологических пространств	503
A.3.4. Обозначения, связанные с теорией банаховых пространств	503
A.3.5. Обозначения, связанные с теорией гильбертовых пространств	503
Литература	505
Предметный указатель	509