

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Ю.В. Прохоров, Л.С. Пономаренко

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

2-е издание, исправленное и дополненное

*Допущено УМО по классическому университетскому образованию
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям ВПО 010400 «Прикладная математика
и информатика» и 010300 «Фундаментальная информатика
и информационные технологии»*



Издательство
Московского университета
2012

УДК 519.2
ББК 22.171; 22.172
П84

*Публикуется по решению редакционно-издательского совета
Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор В. В. Сенатов,
доктор физико-математических наук, профессор Д. М. Чибисов

П84 Прохоров Ю.В., Пономаренко Л.С.
Лекции по теории вероятностей и математической статистике:
Учебник. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Издательство Московского университета, 2012. — 256 с. — (Классический университетский учебник).

ISBN 978-5-211-06234-4

Учебник основан на материале годового курса лекций по теории вероятностей и математической статистике, который много лет читался студентам второго курса факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ.

Изложение учебного материала начинается со случая конечных вероятностных пространств, что дает возможность доказывать содержательные теоремы сравнительно простыми средствами. Далее излагаются общие основы теории вероятностей, рассматриваются предельные теоремы, сходимости последовательностей и рядов из случайных величин. Последние главы посвящены задачам математической статистики.

Особое внимание уделяется оценкам вероятностей в виде приближенных формул или в виде неравенств. Учебник содержит много примеров, иллюстрирующих основные понятия теории вероятностей и математической статистики.

Рекомендуется для студентов, обучающихся по специальностям «Прикладная математика и информатика», «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Ключевые слова: вероятность случайного события; независимость случайных величин и случайных событий; математическое ожидание и дисперсия; закон больших чисел; характеристические функции; предельные теоремы; доверительный интервал; несмещенные, состоятельные, эффективные оценки; проверка статистических гипотез.

**УДК 519.2
ББК 22.171; 22.172**

ISBN 978-5-211-06234-4

© Прохоров Ю.В., Пономаренко Л.С., 2012
© Издательство Московского университета, 2012

Предисловие	5
Введение	6
Глава 1. Вероятностное пространство	9
1.1. Конечное вероятностное пространство	10
1.2. Классическая вероятность	11
1.2.1. Генуэзская лотерея	11
1.2.2. Игральные кости	13
1.2.3. Случайные перестановки	15
1.2.4. Игра в бридж	16
1.2.5. Абсолютно случайные последовательности	17
Глава 2. Случайные величины и случайные события	19
2.1. Случайные величины	19
2.2. Операции над случайными событиями	20
2.3. Операции над индикаторами	22
Глава 3. Свойства вероятности и математического ожидания	24
3.1. Свойства вероятности	24
3.2. Свойства математического ожидания случайных величин	26
3.3. Вероятность появления хотя бы одного из n событий	30
Глава 4. Независимость случайных событий и случайных величин	34
4.1. Условная вероятность. Независимость двух случайных событий	34
4.2. Независимость случайных величин. Взаимная независимость нескольких случайных событий	35
4.3. Свойства независимых случайных величин и взаимно независимых случайных событий	38
4.4. Критерий независимости случайных величин	40
4.5. Мультипликативное свойство математического ожидания независимых случайных величин	41
Глава 5. Суммирование независимых случайных величин	43
5.1. Производящая функция целочисленной случайной величины	43
5.2. Производящая функция моментов	46
5.3. Свойства числовых характеристик распределений сумм независимых случайных величин	48

Глава 6. Неравенства Чебышева. Отклонения сумм независимых случайных величин	51
6.1. Схемы Бернулли и Пуассона	51
6.2. Неравенства Чебышева	52
6.3. Отклонения сумм независимых случайных величин	54
Глава 7. Закон больших чисел	59
7.1. Закон больших чисел в форме Чебышева	59
7.2. Теорема Бернулли. Отклонение частоты наступления события от его вероятности	62
7.3. Вероятностное доказательство теоремы Вейерштрасса	64
Глава 8. Неравенства для максимума сумм независимых случайных величин	67
8.1. Неравенство А. Н. Колмогорова	68
8.2. Неравенство Поля Леви	70
Глава 9. Математические основы теории вероятностей	76
9.1. Общее определение вероятностного пространства	76
9.1.1. Порожденные алгебры и σ -алгебры	80
9.1.2. Борелевские σ -алгебры множеств	82
9.1.3. Вероятностные меры, или распределения вероятностей	83
9.2. Вероятностные меры в евклидовых пространствах	88
9.2.1. Вероятностные распределения на прямой	88
9.2.2. Вероятностные распределения на плоскости и в пространстве	92
9.2.3. Два основных типа распределений в евклидовых пространствах	94
9.3. Случайные величины	95
9.3.1. σ -Алгебра, порожденная случайной величиной	100
9.3.2. Распределения случайных величин	101
9.4. Математические ожидания случайных величин (общий случай)	101
9.5. Независимые случайные величины	108
9.6. Мультипликативное свойство математического ожидания	109
Глава 10. Усиленный закон больших чисел	112
10.1. Лемма Бореля–Кантелли	112
10.2. Сходимость с вероятностью 1	114
10.3. Усиленный закон больших чисел	116
10.4. Сходимость рядов из независимых случайных величин. Закон «0 или 1»	120

Глава 11. Предельные теоремы и метод характеристических функций	125
11.1. Обозначения и формулировки предельных теорем	125
11.2. Характеристические функции. Определение и свойства	128
11.3. Формулы обращения для характеристических функций	133
11.4. Свойство непрерывности соответствия характеристических функций и функций распределения	135
11.5. Примеры слабой сходимости последовательностей характеристических функций	143
11.6. Доказательство центральной предельной теоремы	145
11.7. Теорема Пуассона	148
11.8. Сходимость к равномерному распределению	157
Глава 12. Задачи математической статистики. Основные понятия	164
12.1. Сходимость по вероятности	166
12.2. Асимптотическая нормальность	168
12.3. Некоторые важные преобразования случайных величин	171
12.4. Эмпирическая функция распределения	174
Глава 13. Проверка гипотезы о виде распределения	179
13.1. Критерий согласия А. Н. Колмогорова	179
13.2. Критерий согласия Пирсона хи-квадрат	181
Глава 14. Проверка параметрических гипотез. Фундаментальная лемма Неймана–Пирсона	187
14.1. Квантили и процентные точки нормального распределения	187
14.2. Постановка задачи. Ошибки первого и второго рода	189
14.3. Лемма Неймана–Пирсона	190
14.4. Проверка гипотез о параметрах нормального распределения	195
14.4.1. Проверка гипотез о математическом ожидании	195
14.4.2. Необходимое число наблюдений для различения гипотез	198
14.4.3. Проверка гипотез о дисперсии	199
14.4.4. Сложные гипотезы. Равномерно наиболее мощные критерии	200
14.5. Проверка гипотез о параметре биномиального распределения	202
Глава 15. Доверительные интервалы	204
15.1. Постановка задачи и основные определения	204
15.2. Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии	206

ОГЛАВЛЕНИЕ

15.3. Построение доверительного интервала для дисперсии нормального распределения	207
15.3.1. Совместное распределение статистик \bar{X} и S^2	209
15.3.2. Распределение Стьюдента	212
15.4. Асимптотический доверительный интервал для параметра p биномиального распределения	214
Глава 16. Точечные оценки для неизвестных параметров	216
16.1. Сравнение свойств несмещенных оценок	216
16.2. Семейства распределений	218
16.3. Метод максимального правдоподобия	219
16.4. Неравенство Рао–Крамера	223
16.5. Метод моментов	231
Приложение 1. Основные распределения и их свойства	233
Приложение 2. Экзаменационные вопросы по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика»	240
Литература	242
Предметный указатель	244
Summary	246
Contents	247