

С. А. Ломов, И. С. Ломов

ОСНОВЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ТЕОРИИ
пограничного
слоя



Издательство
Московского университета
2011

УДК 517.925.8; 517.928
ББК 22.161.16
Л75

*Публикуется по решению редакционно-издательского совета
Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова*



*Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда
фундаментальных исследований по проекту № 10-01-07068*

Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного
слоя. — М.: Издательство Московского университета, 2011. — 456 с.
ISBN 978-5-211-05843-9

В книге впервые теория пограничного слоя излагается с позиции особых точек теории дифференциальных уравнений. Предлагается новый подход к понятиям асимптотического ряда и псевдоаналитической функции. Пограничный слой представляется в виде псевдоаналитической функции. Новый подход на базе метода регуляризации сингулярных возмущений позволил сформулировать критерий правильности математического описания пограничного слоя и развить регулярную теорию для сингулярно возмущенных задач.

Книга предназначена математикам, специалистам по аэро- и гидродинамике, физикам, прикладным математикам и инженерам, соприкасающимся с задачами, описывающими движение вязкого потока и с жесткими системами дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, сингулярно возмущенное уравнение, спектр оператора, асимптотическое интегрирование, аппроксимирующие функции.

**УДК 517.925.8; 517.928
ББК 22.161.16**

ISBN 978-5-211-05843-9

© Ломов И.С., 2011
© Издательство Московского университета, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
Введение	10

1. Спектр и характер сингулярной зависимости (12).
2. Уточнение понятия асимптотического ряда для решений сингулярно возмущенных задач (13).
3. Концепция пограничного слоя (16).
4. Аналитические и псевдоаналитические решения (18).
5. Метод регуляризации (19).

Часть первая. ДИСКРЕТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ. ОГРАНИЧЕННЫЙ ОПЕРАТОР

Глава I. Теория сингулярных возмущений в случае простого спектра предельного оператора

§ 1. Постановка задачи Коши и основные условия	22
§ 2. От сингулярно возмущенной задачи к регулярно возмущенной	23
1. Существование сингулярностей (23).	
2. Регуляризация сингулярностей (24).	
3. Пространство безрезонансных решений (26).	
4. Свойства основного оператора (27).	
5. Необходимое условие разрешимости расширенной задачи (29).	
§ 3. Построение регуляризованного ряда	30
1. Разрешимость итерационных задач (30).	
2. Определение коэффициентов ряда в пространстве безрезонансных решений (32).	
3. Описание пограничного слоя (34).	
§ 4. Аналитические решения	36
1. Многочленные решения (37).	
2. Пространства векторов экспоненциального типа (39).	
3. Структура элементов пространства векторов экспоненциального типа (40).	
4. Сходимость основного ряда (44).	
5. Псевдоаналитичность пограничного слоя (45).	
6. Замечание о Φ -аналитических рядах (51).	
7. Ограниченность одного оператора относительно другого (51).	
8. Примеры (54).	
§ 5. Асимптотические решения	60
1. Особенности нулевой точки спектра (60).	
2. Определение коэффициентов регуляризованного ряда (62).	
3. Обоснование асимптотической сходимости (64).	
4. Пример 3 (66).	
§ 6. Уравнения произвольного порядка. Аналитичность суммы основного ряда	70
1. Особенности задачи для уравнения произвольного порядка (70).	
2. Пространство векторов экспоненциального типа для уравнений высокого порядка (71).	

Глава II. Дискретный пограничный слой, образуемый тождественнократным спектром оператора жордановой структуры

§ 1. Некоторые особенности задач с кратным спектром предельного оператора	74
1. История вопроса и постановка задачи (74).	
2. Уравнения разветвления, когда $A(t) \in J[A; \lambda, n]$ (77).	
§ 2. Метод регуляризации для задач с кратным спектром	81
1. Регуляризация и пространства безрезонансных решений (81).	
2. Свойства операторов T_i в пространстве \tilde{B} (83).	
3. Специальные проекторы и обобщенная лемма	

- § 2. Корректность итерационных задач 220
 1. Свойства основного оператора (220). 2. Теоремы о разрешимости (222).
- § 3. Асимптотическое интегрирование 224
 1. Построение формального асимптотического решения (224). 2. Оценка остаточного члена (226).
- § 4. Пример конкретного неограниченного оператора 229
 1. Постановка задачи и основные условия (229). 2. Расширенная и итерационные задачи (231). 3. Однозначная разрешимость итерационных задач (234). 4. Асимптотическая сходимость ряда (238). 5. Пример (240).
- § 5. Некоторые аспекты аналитической теории, связанные с возмущением 241
 1. Постоянный самосопряженный оператор (241). 2. Переменный оператор. Пространства векторов экспоненциального типа (243). 3. Интегральное представление векторов экспоненциального типа (246). 4. Теоремы о гладкости решений по параметру (248). 5. Уравнение диффузии (250). 6. Гладкость обобщенных решений (253).

Глава VI. Особенности пограничного слоя в случае оператора с кратным спектром

- § 1. Формализм метода регуляризации в случае кратного спектра 258
 1. Задача и основные предположения (258). 2. Задача на спектр и уравнение ветвления (259). 3. Расширенная задача (262). 4. Пространство безрезонансных решений (263). 5. Итерационные задачи и их разрешимость (266).
- § 2. Построение регуляризованного ряда для решения расширенной задачи 271
 1. Определение главного члена асимптотики (271). 2. Обоснование асимптотической сходимости (279). 3. Пример (282). 4. Пограничный слой в случае кратного спектра неограниченного оператора (284).

Глава VII. Особенности пограничного слоя при наличии многомерных возмущений. Линеаризованные уравнения Навье–Стокса

- § 1. Постановка задачи и основные предположения 285
- § 2. Регуляризация задачи 287
- § 3. Решение итерационных задач 289
- § 4. Асимптотическая сходимость рядов 290
- § 5. Обычная сходимость рядов 291

Часть третья. КОНТИНУАЛЬНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Глава VIII. Самосопряженный оператор с простым непрерывным спектром

- § 1. Формализм метода в случае непрерывного спектра оператора 294
 1. Постановка задачи и основные предположения (294). 2. Регуляризация и пространство безрезонансных решений (295). 3. Единственность асимптотического ряда (297). 4. Теорема об оценке остаточного члена (300). 5. Пример (301).
- § 2. Общий случай простого спектра 303
 1. Выбор регуляризирующих функций и расширенная задача (305). 2. Пространство безрезонансных решений (306). 3. Вспомогательные утверждения (307). 4. Теоремы о разрешимости (310). 5. Построение формального асимптотического решения (312). 6. Оценка остаточного члена (318). 7. Пример (319).

Глава IX. Самосопряженный оператор с кратным непрерывным спектром

- § 1. Случай кратного непрерывного спектра 323
 1. Построение асимптотики решения (324). 2. Оценка остаточного члена (329). 3. Случай обыкновенного дифференциального оператора (330). 4. Пример (331).

Шмидта (86). 4. Некоторые свойства многочленов (87). 5. Основные теоремы теории разрешимости (88). 6. Построение формального асимптотического ряда (95). 7. Оценка остаточного члена (99).	
§ 3. Особенности метода регуляризации при различных свойствах структурной матрицы	102
1. Регуляризация и пространства решений при других свойствах элементов структурной матрицы (103). 2. Разрешимость точечных задач (105). 3. Применение теорем о разрешимости (111). 4. Асимптотическая сходимость (114).	
Глава III. Дискретный пограничный слой оператора жордановой структуры в общем случае	
§ 1. Общие задачи и метод регуляризации	117
1. Постановка задачи, регуляризация и построение пространства безрезонансных решений (117). 2. Свойства операторов $T_0(t)$ и $T_{\epsilon_i}(t)$ в пространстве \tilde{B} (120). 3. Специальные проекторы и обобщенная лемма Шмидта в общем случае (123). 4. Разрешимость итерационных задач (127). 5. Применение теорем о разрешимости для построения регуляризованного решения (132). 6. Обоснование асимптотической сходимости (136).	
§ 2. Дальнейшие особенности задач с кратным спектром	138
1. Структура фундаментальной системы (138). 2. Примеры конкретных систем при различных свойствах структурной матрицы (139).	
§ 3. Ряды Лорана и асимптотическое интегрирование	149
1. Постановка задачи и предварительные сведения (150). 2. Ряд Лорана по степеням $\epsilon^{1/n}$ и его сходимость (153). 3. Примеры (159).	
Глава IV. Математическое описание внутреннего пограничного слоя и его особенности	
§ 1. Новый тип сингулярностей	162
1. Предварительные соображения (162). 2. Постановка задачи (164).	
§ 2. Внутренний пограничный слой	165
1. Основные соображения по регуляризации (165). 2. Функциональное пространство и операторы расширенной задачи (167). 3. Итерационные задачи и их разрешимость (169). 4. Построение формального регуляризованного ряда (172).	
§ 3. Асимптотическая сходимость регуляризованного ряда	175
1. Оценка остаточного члена (175). 2. Примеры (177).	
§ 4. Внутренний пограничный слой в условиях кратного спектра	181
1. Основные условия и постановка задачи (181). 2. Регуляризация краевой задачи и итерации (183). 3. Построение сопряженного оператора (184). 4. Разрешимость итерационных задач (185). 5. Использование теорем о разрешимости (191). 6. Оценка остаточного члена (195). 7. Пример (198).	
§ 5. Псевдоаналитичность решений задач с внутренним пограничным слоем	200
1. Задача со спектральной особенностью и соответствующие условия (200). 2. Пространства векторов экспоненциального типа с необратимыми представляющими операторами (201). 3. Псевдоаналитичность суммы основного ряда (206). 4. Псевдоаналитичность пограничного слоя (211).	
Часть вторая. ДИСКРЕТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ. НЕОГРАНИЧЕННЫЙ ОПЕРАТОР	
Глава V. Построение регуляризованных рядов для операторных уравнений с простым спектром оператора	
§ 1. Постановка задачи и ее регуляризация	216
1. Основные предположения (216). 2. Формализм метода регуляризации (217). 3. Функциональное пространство безрезонансных решений (218).	

- § 2. Случай необратимого предельного оператора 333
 1. Регуляризация и итерационные задачи (333). 2. Формализм метода регуляризации (336). 3. Оценка остаточного члена (339). 4. Пример (341).

Часть четвертая. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глава X. Метод спектрального выделения особенностей

- § 1. Спектральное выделение особенностей для вырождающихся эллиптических операторов 345
 1. Построение формального решения (345). 2. Формулировка результатов (348). 3. Доказательство леммы 17 (351). 4. Доказательство леммы 19 (353). 5. Доказательство следствий из лемм (354). 6. Пример (356).
 § 2. Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений 357
 1. Существование аналитического решения (358). 2. Проблема малых знаменателей. Оценки аналитического решения (360). 3. Построение равномерной асимптотики для аналитического решения (367). 4. Интегральное представление для аналитического решения (371).
 § 3. Пример. 372

Глава XI. Исследование дифференциальных уравнений с особенностями. Степенной пограничный слой

- § 1. Теоремы для решений некоторых вырождающихся уравнений в частных производных 381
 § 2. Задача с подвижной регулярной особой точкой и ее регуляризация 383
 § 3. Аналитичность суммы основного ряда и определение его коэффициентов в квадратурах 384
 § 4. Структура степенного пограничного слоя 385
 § 5. Псевдоаналитичность суммы погранслоного ряда 387
 § 6. Доказательство теоремы об аналитичности суммы основного ряда 389
 § 7. Доказательство утверждений о структуре степенного пограничного слоя 394
Послесловие 402
 § 1. Развитие метода регуляризации сингулярных возмущений 402
 § 2. Решение тепловой задачи трения 419
 Асимптотический расчет температурных градиентов в металлополимерных сопряжениях (420). Решение задачи о распространении температурного поля в сплошном диске (422).
 § 3. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных уравнениях 423
 § 4. Некоторые другие направления исследования пограничного слоя 425
Литература 428
Предметный указатель 441
 Об авторах 448
 О книге 449
 Summary 451
 Contents 452