

Ф. П. Васильев

# МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

## ЧАСТЬ I

Конечномерные задачи оптимизации.

Принцип максимума.

Динамическое программирование

Издание новое,  
переработанное и дополненное

Допущено Учебно-методическим объединением по классическому университетскому образованию в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности ВПО 010501 «Прикладная математика и информатика»

Москва

Издательство МЦНМО

2011

УДК 519.6(075.8)  
ББК 22.19  
В19

**Васильев Ф. П.**

В19 Методы оптимизации: В 2-х кн. — Новое изд., перераб. и доп. — М.: МЦНМО, 2011.

ISBN 978-5-94057-706-5

Кн. 1. — 620 с. — ISBN 978-5-94057-707-2

В книге изложены численные методы решения задач оптимизации. Приводятся теоретическое обоснование и краткие характеристики этих методов. Рассматриваются задачи минимизации функций в конечномерных и бесконечномерных пространствах, а также задачи оптимального управления процессами, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Для студентов вузов по специальности «Прикладная математика» и специалистов в области задач оптимизации.

Предыдущее издание книги вышло в 2002 г. в издательстве «Факториал».

ББК 22.19

ISBN 978-5-94057-707-2



ISBN 978-5-94057-706-5

ISBN 978-5-94057-707-2 (кн. 1)

© Васильев Ф. П., 2011

© МЦНМО, 2011

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к новому изданию	7
Предисловие	8

### ЧАСТЬ I КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ. ПРИНЦИП МАКСИМУМА. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

<b>Глава 1. Методы минимизации функций одной переменной</b>	<b>12</b>
§ 1. Постановка задачи	12
§ 2. Классический метод	17
§ 3. Метод деления отрезка пополам	19
§ 4. Метод золотого сечения. Симметричные методы	21
§ 5. Об оптимальных методах	24
§ 6. Метод ломаных	29
§ 7. Методы покрытий	33
§ 8. Выпуклые функции одной переменной	37
§ 9. Метод касательных	44
§ 10. Метод Стронгина	48
<b>Глава 2. Классическая теория экстремума функций многих переменных</b>	<b>56</b>
§ 1. Постановка задачи. Теорема Вейерштрасса	56
§ 2. Классический метод решения задач на безусловный экстремум	67
§ 3. Задачи на условный экстремум. Необходимые условия первого порядка	73
§ 4. Необходимые условия экстремума второго порядка	82
§ 5. Достаточные условия экстремума	99
§ 6. Вспомогательные предложения	103
<b>Глава 3. Элементы линейного программирования</b>	<b>112</b>
§ 1. Постановка задачи	112
§ 2. Геометрическая интерпретация. Угловые точки	119
§ 3. Симплекс-метод. Антициклон	124
§ 4. Поиск начальной угловой точки	153
§ 5. Условие разрешимости задач линейного программирования. Теоремы двойственности	158

<b>Глава 4. Элементы выпуклого анализа</b>	<b>171</b>
§ 1. Выпуклые множества . . . . .	171
§ 2. Выпуклые функции . . . . .	184
§ 3. Сильно выпуклые функции . . . . .	206
§ 4. Проекция точки на множество . . . . .	213
§ 5. Отделимость выпуклых множеств . . . . .	219
§ 6. Субградиент. Субдифференциал . . . . .	230
§ 7. Равномерно выпуклые функции . . . . .	240
§ 8. Обоснование правила множителей Лагранжа . . . . .	244
§ 9. Теорема Куна-Таккера. Двойственная задача . . . . .	252
<b>Глава 5. Методы минимизации функций многих переменных</b>	<b>276</b>
§ 1. Градиентный метод . . . . .	276
§ 2. Метод проекции градиента . . . . .	293
§ 3. Метод проекции субградиента . . . . .	303
§ 4. Метод условного градиента . . . . .	307
§ 5. Метод возможных направлений . . . . .	314
§ 6. Проксимальный метод . . . . .	324
§ 7. Метод линеаризации . . . . .	331
§ 8. Квадратичное программирование . . . . .	335
§ 9. Метод сопряженных направлений . . . . .	340
§ 10. Метод Ньютона . . . . .	348
§ 11. Непрерывные методы с переменной метрикой . . . . .	356
§ 12. Метод покоординатного спуска . . . . .	359
§ 13. Метод покрытия в многомерных задачах . . . . .	364
§ 14. Метод модифицированных функций Лагранжа . . . . .	367
§ 15. Экстраградиентный метод . . . . .	373
§ 16. Метод штрафных функций . . . . .	378
§ 17. Доказательство необходимых условий экстремума первого и второго порядков с помощью штрафных функций . . . . .	397
§ 18. Метод барьерных функций . . . . .	407
§ 19. Метод нагруженных функций . . . . .	416
§ 20. О методе случайного поиска . . . . .	428
§ 21. Общие замечания . . . . .	432
<b>Глава 6. Принцип максимума Понтрягина</b>	<b>437</b>
§ 1. Постановка задачи оптимального управления . . . . .	437
§ 2. Формулировка принципа максимума. Примеры . . . . .	450
§ 3. Доказательство принципа максимума . . . . .	472
§ 4. Принцип максимума для задач оптимального управления с фа- зовыми ограничениями . . . . .	499
§ 5. Связь между принципом максимума и классическим вариаци- онным исчислением . . . . .	532

<b>Глава 7. Динамическое программирование</b>	<b>536</b>
§ 1. Схема Беллмана. Проблема синтеза для дискретных систем . . .	536
§ 2. Схема Моисеева . . . . .	549
§ 3. Проблема синтеза для систем с непрерывным временем . . . . .	555
§ 4. Достаточные условия оптимальности . . . . .	563
<b>Список литературы</b>	<b>570</b>
<b>Дополнительный список литературы</b>	<b>604</b>
<b>Предметный указатель</b>	<b>611</b>
<b>Обозначения</b>	<b>615</b>

## ЧАСТЬ II

### ОПТИМИЗАЦИЯ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ. АППРОКСИМАЦИЯ

<b>Глава 8. Методы минимизации в функциональных пространствах</b>	<b>631</b>
§ 1. Предварительные сведения. Обозначения . . . . .	632
§ 2. Теорема Вейерштрасса в функциональных пространствах . . . . .	639
§ 3. Дифференцирование. Условия оптимальности . . . . .	661
§ 4. Методы минимизации . . . . .	694
§ 5. Градиент в задаче оптимального управления со свободным правым концом . . . . .	711
§ 6. Градиент в задаче оптимального управления с дискретным временем . . . . .	726
§ 7. Оптимальное управление процессом нагрева стержня . . . . .	733
§ 8. Оптимальное управление колебательными процессами . . . . .	746
§ 9. Оптимальное управление процессами, описываемыми уравнением Гурса-Дарбу . . . . .	757
§ 10. Взаимодвойственные задачи управления и наблюдения . . . . .	762
§ 11. Метод моментов . . . . .	772
<b>Глава 9. Методы решения неустойчивых задач оптимизации</b>	<b>786</b>
§ 1. Постановка задачи. Устойчивые и неустойчивые задачи минимизации . . . . .	786
§ 2. Методы регуляризации для решения неустойчивых задач первого типа . . . . .	795
§ 3. Стабилизатор. Леммы о регуляризации . . . . .	803
§ 4. Метод стабилизации . . . . .	812
§ 5. Метод невязки . . . . .	830
§ 6. Метод квазирешений . . . . .	834
§ 7. Методы регуляризации с расширением множества . . . . .	838
§ 8. Регуляризованный метод проекции градиента . . . . .	846
§ 9. Регуляризованный метод условного градиента . . . . .	855
§ 10. Регуляризованный экстраградиентный метод . . . . .	863
§ 11. Регуляризованный проксимальный метод . . . . .	874
§ 12. Регуляризованный метод Ньютона . . . . .	880

§ 13. Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента . . .	891
§ 14. Метод динамической регуляризации . . . . .	899
<b>Глава 10. Аппроксимация экстремальных задач</b>	<b>907</b>
§ 1. Разностная аппроксимация квадратичной задачи оптимального управления . . . . .	907
§ 2. Общие условия аппроксимации . . . . .	917
§ 3. Разностная аппроксимация для квадратичной задачи с фазовыми ограничениями . . . . .	926
§ 4. Регуляризация аппроксимаций экстремальных задач . . . . .	933
§ 5. Разностная аппроксимация квадратичной задачи с переменной областью управления . . . . .	943
§ 6. Аппроксимация задачи быстрогодействия . . . . .	952
§ 7. Разностная аппроксимация задачи об оптимальном нагреве стержня . . . . .	960
§ 8. Об аппроксимации максиминных задач . . . . .	983
<b>Рекомендации по использованию книги</b>	<b>996</b>
<b>Список литературы</b>	<b>1006</b>
<b>Дополнительный список литературы</b>	<b>1040</b>
<b>Предметный указатель</b>	<b>1047</b>
<b>Обозначения</b>	<b>1052</b>