

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

УЧЕБНИК

В 2 частях

Часть 2

2-е издание, переработанное и
дополненное

Под редакцией
А.Н.Тихонова



Издательство Проспект
Издательство Московского университета
2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
ГЛАВА 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.....	7
§ 1. Понятие числового ряда.....	7
1. Сходящиеся и расходящиеся ряды (7). 2. Критерий Коши сходимости ряда (10)	
§ 2. Ряды с неотрицательными членами	12
1. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с неотрицательными членами (12). 2. Признаки сравнения (13). 3. Признаки Даламбера и Коши (16). 4. Интегральный признак Коши—Маклорена (21). 5. Признак Раабе (24). 6. Отсутствие универсального ряда сравнения (27)	
§ 3. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.....	28
1. Понятия абсолютно и условно сходящихся рядов (28). 2. О перестановке членов условно сходящегося ряда (30). 3. О перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (33)	
§ 4. Признаки сходимости произвольных рядов.....	35
§ 5. Арифметические операции над сходящимися рядами	41
§ 6. Бесконечные произведения.....	44
1. Основные понятия (44). 2. Связь между сходимостью бесконечных произведений и рядов (47). 3. Разложение функции $\sin x$ в бесконечное произведение (51)	
§ 7. Обобщенные методы суммирования расходящихся рядов	55
1. Метод Чезаро (метод средних арифметических) (56). 2. Метод суммирования Пуассона — Абеля (57)	
§ 8. Элементарная теория двойных и повторных рядов	59
ГЛАВА 2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ	67
§ 1. Понятия сходимости в точке и равномерной сходимости на множестве	67
1. Понятия функциональной последовательности и функционального ряда (67). 2. Сходимость функциональной последовательности (функционального ряда) в точке и на множестве (69). 3. Равномерная сходимость на множестве (70). 4. Критерий Коши равномерной сходимости последовательности (ряда) (72)	
§ 2. Достаточные признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.....	74
§ 3. Почленный переход к пределу	83
§ 4. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование функциональных последовательностей и рядов	87
1. Почленное интегрирование (87). 2. Почленное дифференцирование (90). 3. Сходимость в среднем (94)	
§ 5. Равностепенная непрерывность последовательности функций	97
§ 6. Степенные ряды.....	102
1. Степенной ряд и область его сходимости (102). 2. Непрерывность суммы степенного ряда (105). 3. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенного ряда (105)	
§ 7. Разложение функций в степенные ряды.....	107
1. Разложение функции в степенной ряд (107). 2. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (108). 3. Элементарные представления о функциях комплексной переменной (110). 4. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами (112)	

ГЛАВА 3. ДВОЙНЫЕ И n-КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	117
§ 1. Определение и условия существования двойного интеграла	117
1. Определение двойного интеграла для прямоугольника (117).	
2. Условия существования двойного интеграла для прямоугольника (119).	
3. Определение и условия существования двойного интеграла для произвольной области (121).	
4. Общее определение двойного интеграла (123)	
§ 2. Основные свойства двойного интеграла	127
§ 3. Сведение двойного интеграла к повторному однократному	129
1. Случай прямоугольника (129).	
2. Случай произвольной области (130)	
§ 4. Тройные и n -кратные интегралы	133
§ 5. Замена переменных в n -кратном интеграле	138
§ 6. Вычисление объемов n -мерных тел	152
§ 7. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей и рядов	157
§ 8. Кратные несобственные интегралы	159
1. Понятие кратных несобственных интегралов (159).	
2. Два признака сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций (160).	
3. Несобственные интегралы от знакопеременных функций (161).	
4. Главное значение кратных несобственных интегралов (165)	
ГЛАВА 4. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	167
§ 1. Понятия криволинейных интегралов первого и второго рода	167
§ 2. Условия существования криволинейных интегралов	169
ГЛАВА 5. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	175
§ 1. Понятия поверхности и ее площади	175
1. Понятие поверхности (175).	
2. Вспомогательные леммы (179).	
3. Площадь поверхности (181)	
§ 2. Поверхностные интегралы	185
ГЛАВА 6. ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ОСНОВНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ АНАЛИЗА	190
§ 1. Обозначения. Биортогональные базисы. Инварианты линейного оператора	190
1. Обозначения (190).	
2. Биортогональные базисы в пространстве E^n (191).	
3. Преобразования базисов. Ковариантные и контрвариантные координаты вектора (192).	
4. Инварианты линейного оператора. Дивергенция и ротор (195).	
5. Выражения для дивергенции и ротора линейного оператора в ортонормированном базисе (198)	
§ 2. Скалярные и векторные поля. Дифференциальные операторы векторного анализа	198
1. Скалярные и векторные поля (198).	
2. Дивергенция, ротор и производная по направлению векторного поля (203).	
3. Некоторые другие формулы векторного анализа (204).	
4. Заключительные замечания (206)	
§ 3. Основные интегральные формулы анализа	207
1. Формула Грина (207).	
2. Формула Остроградского — Гаусса (211).	
3. Формула Стокса (214)	
§ 4. Условия независимости криволинейного интеграла на плоскости от пути интегрирования	218
§ 5. Некоторые примеры приложений теории поля	222
1. Выражение площади плоской области через криволинейный интеграл (222).	
2. Выражение объема через поверхностный интеграл (223)	
Дополнение к главе 6. Дифференциальные формы в евклидовом пространстве	225

§ 1. Знакопеременные полилинейные формы.....	225
1. Линейные формы (225). 2. Билинейные формы (226). 3. Полилинейные формы (227). 4. Знакопеременные полилинейные формы (228). 5. Внешнее произведение знакопеременных форм (228). 6. Свойства внешнего произведения знакопеременных форм (231). 7. Базис в пространстве знакопеременных форм (233)	
§ 2. Дифференциальные формы	235
1. Основные обозначения (235). 2. Внешний дифференциал (236). 3. Свойства внешнего дифференциала (237)	
§ 3. Дифференцируемые отображения.....	239
1. Определение дифференцируемых отображений (239). 2. Свойства отображения φ^* (240)	
§ 4. Интегрирование дифференциальных форм.....	243
1. Определения (243). 2. Дифференцируемые цепи (245). 3. Формула Стокса (248). 4. Примеры (250)	
ГЛАВА 7. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ	252
§ 1. Равномерное по одной переменной стремление функции двух переменных к пределу по другой переменной	252
1. Связь равномерного по одной переменной стремления функции: двух переменных к пределу по другой переменной с равномерной сходимостью функциональной последовательности (252). 2. Критерий Коши равномерного стремления функции к предельной (254). 3. Применения понятия равномерного стремления к предельной функции (254)	
§ 2. Собственные интегралы, зависящие от параметра.....	256
1. Свойства интеграла, зависящего от параметра (256). 2. Случай, когда пределы интегрирования зависят от параметра (257)	
§ 3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра	259
1. Несобственные интегралы первого рода, зависящие от параметра (260). 2. Несобственные интегралы второго рода, зависящие от параметра (266)	
§ 4. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению некоторых несобственных интегралов.....	267
§ 5. Интегралы Эйлера.....	271
1. Г-функция (272). 2. В-функция (275). 3. Связь между эйлеровыми интегралами (277). 4. Примеры (279)	
§ 6. Формула Стирлинга.....	280
§ 7. Кратные интегралы, зависящие от параметров.....	282
1. Собственные кратные интегралы, зависящие от параметров (282). 2. Несобственные кратные интегралы, зависящие от параметра (283)	
ГЛАВА 8. РЯДЫ ФУРЬЕ	287
§ 1. Ортонормированные системы и общие ряды Фурье.....	287
1. Ортонормированные системы (287). 2. Понятие об общем ряде Фурье (292)	
§ 2. Замкнутые и полные ортонормированные системы	295
§ 3. Замкнутость тригонометрической системы и следствия из нее	298
1. Равномерное приближение непрерывной функции тригонометрическими многочленами (298). 2. Доказательство замкнутости тригонометрической системы (301). 3. Следствия замкнутости тригонометрической системы (303)	
§ 4. Простейшие условия равномерной сходимости и почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье.....	304
1. Вводные замечания (304). 2. Простейшие условия абсолютной и равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье (306). 3. Простейшие условия почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье (308)	

§ 5. Более точные условия равномерной сходимости и условия сходимости в данной точке	309
1. Модуль непрерывности функции. Классы Гёльдера (309). 2. Выражение для частичной суммы тригонометрического ряда Фурье (311).	
3. Вспомогательные предложения (314). 4. Принцип локализации (317).	
5. Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье для функции из класса Гёльдера (319). 6. О сходимости тригонометрического ряда Фурье кусочно гёльдеровой функции (325). 7. Суммируемость тригонометрического ряда Фурье непрерывной функции методом средних арифметических (329). 8. Заключительные замечания (331)	
§ 6. Кратные тригонометрические ряды Фурье	332
1. Понятия кратного тригонометрического ряда Фурье и его прямоугольных и сферических частичных сумм (332). 2. Модуль непрерывности и классы Гёльдера для функции N переменных (334). 3. Условия абсолютной сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье (335)	
ГЛАВА 9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ	338
§ 1. Представление функции интегралом Фурье	339
1. Вспомогательные утверждения (340). 2. Основная теорема. Формула обращения (342). 3. Примеры (347)	
§ 2. Некоторые свойства преобразования Фурье	348
§ 3. Кратный интеграл Фурье	352