

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

В.А. Ильин, Г.А. Ким

# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК

*3-е издание,  
переработанное и дополненное*

*Учебник удостоен премии Президента Российской Федерации  
в области образования*



---

Издательство Проспект  
Издательство Московского университета  
2007

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	12
Предисловие к третьему изданию.....	13
Литература.....	14
<b>Глава I. Матрицы.....</b>	<b>15</b>
§ 1. Понятие матрицы.....	15
<i>Терминология и обозначения. Компактная форма записи матрицы. Матрицы специального вида</i>	
§ 2. Операции над матрицами.....	18
<i>Равенство матриц. Линейные операции. Умножение матриц. Транспонирование матрицы. Некоторые свойства операций</i>	
§ 3. Элементарные преобразования матриц.....	22
<i>Приведение матрицы к ступенчатой форме. Приведение к трапецевидной форме. Приведение к треугольной форме. Матрицы элементарных преобразований</i>	
§ 4. Определители.....	25
<i>Перестановки. Построение определителя <math>n</math>-го порядка. Простейшие свойства определителя. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Разложение определителя по строке (столбцу). Определитель квазитреугольной матрицы. Вычисление определителя</i>	
§ 5. Обратная матрица.....	36
<i>Условие обратимости. Некоторые свойства обратной матрицы. Вычисление обратной матрицы. Приведение к диагональной форме. LU-разложение матрицы</i>	
<b>Глава II. Теоретико-множественные понятия.....</b>	<b>42</b>
§ 6. Множества.....	42
§ 7. Эквивалентность.....	43
<i>Бинарное отношение. Отношение эквивалентности</i>	
§ 8. Отображения.....	46
<i>Определение, простейшие свойства. Произведение отображений. Обратное отображение. Перестановки (подстановки) <math>n</math>-го порядка</i>	
§ 9. Алгебраические законы.....	50
<i>Внутренний закон композиции. Обобщенная ассоциативность. Внешний закон композиции</i>	

## Оглавление

Глава III. Геометрические векторы .....	54
§ 10. Направленные отрезки .....	55
§ 11. Свободный вектор .....	57
<i>Определение и терминология. Линейные операции над векторами</i>	
§ 12. Векторы на прямой, на плоскости и в пространстве .....	60
Глава IV. Введение в теорию линейных пространств .....	62
§ 13. Вещественное линейное пространство .....	62
<i>Определение. Примеры. Простейшие свойства линейных пространств</i>	
§ 14. Линейная зависимость .....	65
§ 15. Геометрический смысл линейной зависимости .....	68
§ 16. Ранг матрицы .....	70
<i>Ранг матрицы и линейная зависимость. Ранг матрицы и элементарные преобразования. Метод Гаусса вычисления ранга. Эквивалентные матрицы. Скелетное разложение матрицы</i>	
§ 17. Базис и размерность .....	76
<i>Определения. Примеры. Координаты вектора. Переход к другому базису</i>	
§ 18. Линейное подпространство и линейное многообразие .....	80
<i>Линейное подпространство. Линейное аффинное многообразие</i>	
Глава V. Векторная алгебра .....	83
§ 19. Координаты вектора .....	83
§ 20. Координаты точки .....	84
<i>Аффинная система координат. Деление отрезка в данном отношении. Прямоугольные координаты</i>	
§ 21. Проекция вектора и координаты .....	86
<i>Проекция вектора на плоскости. Проекция вектора в пространстве</i>	
§ 22. Скалярное произведение .....	88
<i>Определение и основные свойства. Скалярное произведение в координатах</i>	
§ 23. Векторное и смешанное произведения .....	91
<i>Ориентация в вещественном линейном пространстве. Определения и основные свойства. Векторное и смешанное произведения в прямоугольных координатах</i>	
§ 24. Преобразование координат .....	95
<i>Преобразование аффинной системы координат. Ортогональная матрица. Преобразование прямоугольной декартовой системы координат на плоскости. Преобразование прямоугольной декартовой системы координат в пространстве</i>	

§ 25. Полярные координаты.....	101
<i>Полярные координаты на плоскости. Полярные координаты в пространстве</i>	
<b>Глава VI. Системы линейных алгебраических уравнений .....</b>	<b>104</b>
§ 26. Постановка задачи.....	104
<i>Терминология. Компактная запись системы. Эквивалентность систем</i>	
§ 27. Системы с квадратной невырожденной матрицей. Правило Крамера .....	105
§ 28. Системы общего вида.....	106
<i>Совместность системы. Схема исследования совместной системы. Общее решение системы. Однородные системы</i>	
§ 29. Метод Гаусса исследования и решения систем .....	109
<i>Системы с трапецевидной матрицей. Элементарные преобразования системы уравнений. Приведение системы общего вида к системе с верхней трапецевидной матрицей</i>	
§ 30. Геометрические свойства решений системы.....	112
<i>Линейное подпространство решений однородной системы. Общее решение однородной системы. Линейное многообразие решений неоднородной системы. Общее решение неоднородной системы</i>	
<b>Глава VII. Алгебраические линии и поверхности первого порядка .....</b>	<b>116</b>
§ 31. Понятие об уравнениях линии и поверхности.....	116
§ 32. Уравнения прямой на плоскости и плоскости в пространстве .....	117
<i>Канонические уравнения. Параметрические уравнения. Общие уравнения. Уравнения в отрезках. Векторные уравнения</i>	
§ 33. Взаимное расположение прямых на плоскости (плоскостей в пространстве).....	123
<i>Взаимное расположение двух прямых (плоскостей). Пучок прямых (плоскостей)</i>	
§ 34. Полуплоскости и полупространства .....	126
§ 35. Прямая на плоскости (плоскость в пространстве) в прямоугольной декартовой системе координат .....	128
<i>Расстояние от точки до прямой (до плоскости). Угол между прямыми (между плоскостями)</i>	
§ 36. Прямая в пространстве.....	129
<i>Уравнения прямой. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости. Метрические задачи в прямоугольной декартовой системе координат</i>	
<b>Глава VIII. Элементы общей алгебры.....</b>	<b>135</b>
§ 37. Группа .....	135

## Оглавление

§ 38. Подгруппа .....	137
<i>Определение. Примеры. Группа невырожденных верхних (нижних) треугольных матриц. Группа ортогональных матриц. Произведение подмножеств группы. Смежные классы</i>	
§ 39. Конечная группа .....	140
<i>Основные свойства. Симметрическая группа <math>n</math>-го порядка. Знакопеременная группа <math>n</math>-го порядка. Циклическая группа. Порядок элемента</i>	
§ 40. Нормальный делитель .....	144
<i>Определение и свойства. Фактор-группа. Группа вычетов по модулю <math>p</math></i>	
§ 41. Морфизмы групп .....	145
<i>Изоморфизм. Гомоморфизм</i>	
§ 42. Кольцо .....	148
<i>Определение, простейшие свойства. Делители нуля. Кольцо вычетов. Подкольцо</i>	
§ 43. Поле .....	151
<i>Определение, простейшие свойства. Расширение поля. Изоморфизм колец и полей. Характеристика поля. Поле вычетов</i>	
Глава IX. <b>Комплексные числа</b> .....	156
§ 44. Поле комплексных чисел .....	156
<i>Понятие комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа. Комплексная плоскость. Сопряженная матрица</i>	
§ 45. Тригонометрическая форма комплексного числа .....	159
§ 46. Возведение в степень и извлечение корня .....	162
<i>Возведение в степень. Извлечение корня. Геометрическая интерпретация корней. Группа корней <math>n</math>-й степени из единицы</i>	
Глава X. <b>Многочлены над произвольным полем</b> .....	165
§ 47. Кольцо многочленов .....	165
§ 48. Деление многочленов .....	168
§ 49. Корни многочленов .....	170
§ 50. Каноническое разложение многочлена над полем комплексных чисел .....	174
§ 51. Многочлены над полем вещественных чисел .....	177
Глава XI. <b>Алгебраические линии второго порядка на плоскости</b> .....	180
§ 52. Эллипс .....	180
<i>Каноническое уравнение. Директориальное свойство</i>	
§ 53. Гипербола .....	184
<i>Каноническое уравнение. Директориальное свойство</i>	

§ 54. Парабола.....	187
<i>Каноническое уравнение</i>	
§ 55. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе.....	189
§ 56. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы.....	190
§ 57. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы .....	192
§ 58. Общее уравнение линии второго порядка.....	193
<i>Компактная запись общего уравнения. Характеристический многочлен. Преобразования общего уравнения. Метод вращений</i>	
§ 59. Классификация линий второго порядка на плоскости .....	200
<i>Канонические уравнения. Метод Лагранжа</i>	
<b>Глава XII. Линейное пространство над произвольным полем .....</b>	<b>207</b>
§ 60. Определение и терминология.....	207
<i>Примеры. Точки в линейном пространстве</i>	
§ 61. Линейная зависимость. Ранг и база системы векторов.....	210
§ 62. Базис и размерность .....	211
§ 63. Изоморфизм линейных пространств.....	213
§ 64. Линейные подпространства. Линейная оболочка.....	214
§ 65. Сумма и пересечение линейных подпространств.....	216
§ 66. Прямая сумма подпространств.....	218
<i>Критерии прямой суммы. Дополнительное подпространство</i>	
§ 67. Линейное аффинное многообразие .....	220
<i>Параллельные многообразия. Пересечение многообразий. Фактор-пространство</i>	
<b>Глава XIII. Евклидовы и унитарные пространства.....</b>	<b>224</b>
§ 68. Скалярное произведение .....	224
§ 69. Основные метрические понятия .....	226
§ 70. Ортогональные векторы .....	228
<i>Ортонормированный базис. Процесс ортогонализации. Ортогональная (унитарная) матрица. QR-разложение. Теорема Пифагора и ее обобщение</i>	
§ 71. Матрица Грама.....	232
§ 72. Ортогональное дополнение .....	233
<i>Задача о перпендикуляре. Решение задачи о перпендикуляре</i>	
§ 73. Линейное аффинное многообразие в евклидовом (унитарном) пространстве .....	236
§ 74. Расстояние в евклидовом (унитарном) пространстве.....	237
§ 75. Изометрия.....	239
<b>Глава XIV. Линейные операторы .....</b>	<b>240</b>
§ 76. Определение и простейшие свойства.....	240
<i>Терминология, примеры. Задание линейного оператора</i>	

## Оглавление

§ 77. Матрица линейного оператора.....	242
<i>Построение матрицы линейного оператора. Координаты вектора и его образа. Матрицы оператора в различных ба- зисах</i>	
§ 78. Линейное пространство операторов.....	244
§ 79. Умножение линейных операторов.....	245
§ 80. Образ и ядро линейного оператора .....	246
§ 81. Линейные формы .....	248
<i>Определение и свойства. Линейные формы и гиперплос- кость Сопряженное пространство. Специальное пред- ставление линейной формы в евклидовом (унитарном) пространстве</i>	
§ 82. Алгебра линейных операторов, действующих в одном прос- транстве .....	250
§ 83. Обратный оператор.....	251
<b>Глава XV. Структура линейного оператора в комплекс- ном пространстве .....</b>	<b>254</b>
§ 84. Инвариантные подпространства .....	254
<i>Примеры. Индуцированный оператор</i>	
§ 85. Собственные значения и собственные векторы.....	256
§ 86. Характеристический многочлен.....	257
<i>Определение, основные свойства. Собственные векторы линейного оператора в комплексном пространстве. Способ нахождения собственных векторов</i>	
§ 87. Собственное подпространство .....	260
§ 88. Операторы простой структуры.....	261
<i>Критерий простой структуры. Матричная формулировка операторных свойств. Жорданова клетка</i>	
§ 89. Треугольная форма матрицы линейного оператора .....	265
§ 90. Нильпотентный оператор .....	266
§ 91. Корневые подпространства .....	269
<i>Корневые векторы. Корневые подпространства. Расщепление линейного оператора.</i>	
§ 92. Жорданова форма .....	273
<i>Канонический базис корневого подпространства. Нумерация базиса. Матрица оператора <math>A K _j</math> в каноническом базисе. Жорданов базис и жорданова нормальная форма матрицы оператора. Приведение матрицы к жордановой форме. Аннулирующий многочлен. Минимальный многочлен. Некоторые приложения</i>	
§ 93. Вещественный аналог жордановой формы.....	280
<i>Инвариантные подпространства минимальной размерности. Вещественный аналог жордановой формы</i>	

Глава XVI. <b>Линейные операторы в унитарных (евклидовых) пространствах</b> .....	284
§ 94. Сопряженный оператор .....	284
<i>Определение и свойства. Матрицы операторов <math>A</math> и <math>A^*</math> в паре ортонормированных базисов. Ядра и образы операторов <math>A</math> и <math>A^*</math></i>	
§ 95. Сопряжение оператора, действующего в одном пространстве. Биортогональные базисы .....	286
§ 96. Нормальный оператор .....	288
<i>Определение и свойства. Нормальный оператор и его матрица в унитарном пространстве. Нормальный оператор и его матрица в евклидовом пространстве</i>	
§ 97. Унитарный (ортогональный) оператор .....	292
<i>Критерии унитарности. Спектральная характеристика унитарного оператора. Каноническая форма матрицы ортогонального оператора</i>	
§ 98. Самосопряженный оператор .....	297
§ 99. Знакоопределенные операторы .....	298
§ 100. Разложения линейного оператора.....	301
<i>Эрмитово разложение. Сингулярная пара базисов и сингулярное разложение. Полярное разложение</i>	
Глава XVII. <b>Билинейные и квадратичные формы</b> .....	308
§ 101. Билинейные и квадратичные формы в линейном пространстве.....	308
<i>Билинейные формы. Квадратичные формы. Канонический вид квадратичной формы</i>	
§ 102. Квадратичные формы в вещественном пространстве .....	315
<i>Закон инерции. Знакоопределенные квадратичные формы. Общий вид скалярного произведения в вещественном пространстве</i>	
§ 103. Квадратичные формы в комплексном пространстве .....	318
<i>Полуторалинейные формы. Эрмитовы формы</i>	
§ 104. Квадратичные формы в евклидовом (унитарном) пространстве .....	321
Глава XVIII. <b>Геометрия квадратичных форм и поверхностей второго порядка</b> .....	325
§ 105. Гиперповерхности второго порядка в евклидовом пространстве .....	325
<i>Общее уравнение. Приведенные уравнения. Инварианты гиперповерхности. Классификация гиперповерхностей</i>	
§ 106. Алгебраические поверхности второго порядка .....	329
<i>Общее уравнение. Приведенные уравнения. Канонические уравнения. Геометрические свойства</i>	



Оглавление

Глава XIX. <b>Линейные нормированные пространства</b> .....	342
§ 107. Норма вектора.....	342
<i>Нормы в арифметическом пространстве. Еще о метрическом пространстве. Норма и метрика. Нормы в конечномерном пространстве</i>	
§ 108. Норма и скалярное произведение .....	348
§ 109. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве.....	350
<i>Компактность единичной сферы. Эквивалентность норм</i>	
§ 110. Линейные операторы в нормированных пространствах.....	352
<i>Непрерывность и ограниченность. Норма оператора. Подчиненная норма. Спектральная норма</i>	
§ 111. Матричные нормы оператора и нормы матрицы .....	355
§ 112. Экстремальные задачи для самосопряженного оператора .....	357
<i>Вариационные свойства собственных значений. Вариационные свойства сингулярных чисел. Разделение собственных значений</i>	
§ 113. Задачи наилучшего приближения в нормированных пространствах .....	361
<i>Наилучшее приближение. Аппроксимация оператора (матрицы). Расстояние до множества вырожденных матриц</i>	
§ 114. Линейные операторные уравнения.....	364
<i>Нормальное решение. Псевдорешение. Метод наименьших квадратов. Нормальное псевдорешение</i>	
<b>Приложение. Проблемы оснований геометрии и обоснования метода координат</b> .....	370
§ 1. Аксиомы элементарной геометрии .....	370
§ 2. Схема доказательства непротиворечивости геометрии Евклида.....	382
§ 3. Схема доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского .....	385
§ 4. Заключительные замечания о проблемах аксиоматики .....	387
Предметный указатель .....	388
Указатель обозначений .....	393