

В.А. ИЛЬИН, Э.Г. ПОЗНЯК

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть I

ИЗДАНИЕ СЕДЬМОЕ

*Рекомендовано Министерством образования
Российской Федерации в качестве учебника
для студентов физических специальностей
и специальности "Прикладная математика"*

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2004

УДК 517
ББК 22.16
И 46

УЧЕБНИК УДОСТОЕН
ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРЕМИИ СССР ЗА 1980 ГОД

ИЛЬИН В. А., ПОЗНЯК Э. Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I: Учеб.: Для вузов. — 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 648 с. — (Курс высшей математики и математической физики). — ISBN 5-9221-0536-1.

Один из выпусков «Курса высшей математики и математической физики» под редакцией А.Н.Тихонова, В.А.Ильина, А.Г.Свешникова. Учебник создан на базе лекций, читавшихся авторами в течение ряда лет на физическом факультете и факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета. Книга включает теорию вещественных чисел, теорию пределов и непрерывности функций, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной, теорию числовых рядов, дифференциальное исчисление многих переменных. Воспроизводится с 5-го изд. (1998 г.).

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Физика» и «Прикладная математика».

Ил. 117.

Учебное издание

*ИЛЬИН Владимир Александрович,
ПОЗНЯК Эдуард Генрихович*

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть I

Серия «Курс высшей математики и математической физики»

Редактор *М.М. Горячая, Д.А. Миртова*
Оригинал-макет: *Ст.Ю. Мельников*

ЛР №071930 от 06.07.99

Подписано в печать 01.09.04. Формат 60×90/16. Бумага офсетная №1.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 40,5. Уч.-изд. л. 43,4. Заказ № 10945

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117997 Москва, Профсоюзная ул., 90

E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru

<http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов

в ППП «Типография «Наука»

121099, Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9221-0536-1



9 785922 105361

ISBN 5-9221-0536-1

© ФИЗМАТЛИТ, 2001, 2002, 2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к седьмому изданию	15
Предисловие к пятому изданию	16
Предисловие к первому изданию	17
Глава 1. Предварительные сведения об основных понятиях математического анализа	19
§ 1. Математические понятия, возникающие при описании движения	19
§ 2. Мгновенная скорость и связанные с ней новые математические понятия	22
§ 3. Задача о восстановлении закона движения по скорости и связанная с ней математическая проблематика	29
§ 4. Проблемы, возникающие при решении задачи о вычислении пути	31
§ 5. Заключительные замечания	35
Глава 2. Теория вещественных чисел	37
§ 1. Вещественные числа	37
1. Свойства рациональных чисел (37). 2. Об измерении отрезков числовой оси (39). 3. Вещественные числа и правило их сравнения (42). 4. Приближение вещественного числа рациональными числами (45). 5. Множества вещественных чисел, ограниченные сверху или снизу (46).	
§ 2. Арифметические операции над вещественными числами. Основные свойства вещественных чисел	50
1. Определение суммы вещественных чисел (50). 2. Определение произведения вещественных чисел (53). 3. Свойства вещественных чисел (53). 4. Некоторые часто употребляемые соотношения (55).	
§ 3. Некоторые конкретные множества вещественных чисел	56
Дополнение 1. О переводе чисел из десятичной системы счисления в двоичную и из двоичной системы в десятичную	57
1. Перевод чисел из десятичной системы счисления в двоичную (57). 2. Перевод чисел из двоичной системы счисления в десятичную (59).	
Дополнение 2. Об ошибках в округлении чисел в системах счисления с четным и нечетным основаниями	59

Глава 3. Предел последовательности	61
§ 1. Числовые последовательности	61
1. Числовые последовательности и операции над ними (61).	
2. Ограниченные и неограниченные последовательности (62).	
3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности (63).	
4. Основные свойства бесконечно малых последовательностей (65).	
§ 2. Сходящиеся последовательности и их основные свойства	67
1. Понятие сходящейся последовательности (67). 2. Основные свойства сходящихся последовательностей (69). 3. Предельный переход в неравенствах (71).	
§ 3. Монотонные последовательности	73
1. Определение монотонных последовательностей (73). 2. Признак сходимости монотонной последовательности (73). 3. Некоторые примеры сходящихся монотонных последовательностей (75). 4. Число e (78).	
§ 4. Некоторые свойства произвольных последовательностей и числовых множеств	79
1. Подпоследовательности числовых последовательностей (79).	
2. Предельные точки последовательности (81). 3. Существование предельной точки у ограниченной последовательности (82).	
4. О выделении сходящейся подпоследовательности (85).	
5. Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности (87). 6. Некоторые свойства произвольных числовых множеств (90).	
Дополнение 1. Теорема Штольца	93
Дополнение 2. О скорости сходимости последовательности приближающейся \sqrt{a}	96
Глава 4. Понятие функции. Предельное значение функции. Непрерывность	100
§ 1. Понятие функции	100
1. Переменная величина и функция (100). 2. О способах задания функции (102).	
§ 2. Понятие предельного значения функции	103
1. Определение предельного значения функции (103). 2. Арифметические операции над функциями, имеющими предельное значение (106). 3. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций (107).	
§ 3. Понятие непрерывности функции	110
1. Определение непрерывности функции (110). 2. Арифметические операции над непрерывными функциями (112). 3. Сложная функция и ее непрерывность (112).	
§ 4. Некоторые свойства монотонных функций	113
1. Определение и примеры монотонных функций (113). 2. Понятие обратной функции. Монотонные функции, имеющие обратную (114).	
§ 5. Простейшие элементарные функции	117
1. Рациональные степени положительных чисел (118). 2. Показательная функция (120). 3. Логарифмическая функция (123).	

4. Гиперболические функции (125). 5. Степенная функция с любым вещественным показателем α (126). 6. Тригонометрические функции (128). 7. Обратные тригонометрические функции (132).	
§ 6. Предельные значения некоторых функций	133
1. Предварительные замечания (133). 2. Предельное значение функции $(\sin x)/x$ в точке $x = 0$ (первый замечательный предел) (124). 3. Предельное значение функции $(1 + 1/x)^x$ при $x \rightarrow \infty$ (второй замечательный предел) (135).	
§ 7. Непрерывность и предельные значения некоторых сложных функций	138
1. Непрерывность и предельные значения некоторых сложных функций (138). 2. Понятие элементарной функции. Класс элементарных функций (142).	
§ 8. Классификация точек разрыва функции	143
1. Точки разрыва функции и их классификация (143). 2. Кусочно непрерывные функции (145).	
Дополнение. Доказательство утверждения из п. 6 § 5	146
1. Доказательство единственности (146). 2. Доказательство существования (149).	
Глава 5. Основы дифференциального исчисления	156
§ 1. Производная. Ее физическая и геометрическая интерпретация	156
1. Приращение аргумента и функции. Разностная форма условия непрерывности (156). 2. Определение производной (157). 3. Производная с физической точки зрения (158). 4. Производная с геометрической точки зрения (159). 5. Правая и левая производные (160). 6. Понятие производной векторной функции (160).	
§ 2. Понятие дифференцируемости функции	162
1. Понятие дифференцируемости функции в данной точке (162). 2. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности функции (163). 3. Понятие дифференциала функции (164).	
§ 3. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного	166
§ 4. Вычисление производных степенной функции, тригонометрических функций и логарифмической функции	168
1. Производная степенной функции с целочисленным показателем (168). 2. Производная функции $y = \sin x$ (169). 3. Производная функции $y = \cos x$ (170). 4. Производные функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ (170). 5. Производная функции $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) (171).	
§ 5. Теорема о производной обратной функции	171
§ 6. Вычисление производных показательной функции и обратных тригонометрических функций	173
1. Производная показательной функции $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) (173). 2. Производные обратных тригонометрических функций (173).	

§ 7. Правило дифференцирования сложной функции	175
§ 8. Логарифмическая производная. Производная степенной функции с любым вещественным показателем. Таблица производных простейших элементарных функций	177
1. Понятие логарифмической производной функции (177). 2. Производная степенной функции с любым вещественным показателем (178). 3. Таблица производных простейших элементарных функций (178).	
§ 9. Инвариантность формы первого дифференциала. Некоторые применения дифференциала	179
1. Инвариантность формы первого дифференциала (179). 2. Формулы и правила вычисления дифференциалов (181). 3. Использование дифференциала для установления приближенных формул (182).	
§ 10. Производные и дифференциалы высших порядков	183
1. Понятие производной n -го порядка (183). 2. n -е производные некоторых функций (184). 3. Формула Лейбница для n -й производной произведения двух функций (185). 4. Дифференциалы высших порядков (186).	
§ 11. Дифференцирование функции, заданной параметрически	188
Глава 6. Неопределенный интеграл	190
§ 1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла	190
1. Понятие первообразной функции (190). 2. Неопределенный интеграл (191). 3. Основные свойства неопределенного интеграла (192). 4. Таблица основных неопределенных интегралов (193).	
§ 2. Основные методы интегрирования	196
1. Интегрирование заменой переменной (подстановкой) (196). 2. Интегрирование по частям (199).	
Глава 7. Комплексные числа. Алгебра многочленов. Интегрирование в элементарных функциях	203
§ 1. Краткие сведения о комплексных числах	203
§ 2. Алгебраические многочлены	207
§ 3. Кратные корни многочлена. Признак кратности корня	210
§ 4. Принцип выделения кратных корней. Алгоритм Евклида	212
1. Принцип выделения кратных корней (212). 2. Нахождение наибольшего общего делителя двух многочленов (алгоритм Евклида) (213).	
§ 5. Разложение правильной рациональной дроби с комплексными коэффициентами на сумму простейших дробей	215
§ 6. Разложение алгебраического многочлена с вещественными коэффициентами на произведение неприводимых вещественных множителей	217
§ 7. Разложение правильной рациональной дроби с вещественными коэффициентами на сумму простейших дробей с вещественными коэффициентами	220
§ 8. Проблема интегрирования рациональной дроби	225

§ 9. Метод Остроградского	228
§ 10. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных выражений	231
1. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений (231). 2. Интегрирование дробно линейных иррациональностей (234). 3. Интегрирование биномиальных дифференциалов (235). 4. Интегрирование квадратичных иррациональностей посредством подстановок Эйлера (236). 5. Интегрирование квадратичных иррациональностей другими способами (239).	
§ 11. Эллиптические интегралы	245
Глава 8. Основные теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях	247
§ 1. Новое определение предельного значения функции	247
1. Новое определение предельного значения функции. Его эквивалентность старому определению (247). 2. Необходимое и достаточное условие существования предельного значения функции (критерий Коши) (250).	
§ 2. Локальная ограниченность функции, имеющей предельное значение	252
§ 3. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции	254
§ 4. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение	255
1. Прохождение непрерывной функции через нуль при смене знаков (255). 2. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение (256).	
§ 5. Ограниченность функции, непрерывной на сегменте	256
§ 6. Точные грани функции и их достижение функцией, непрерывной на сегменте	257
1. Понятие точной верхней и точной нижней граней функции на данном множестве (257). 2. Достижение функцией, непрерывной на сегменте, своих точных граней (258).	
§ 7. Возрастание (убывание) функции в точке. Локальный максимум (минимум)	260
1. Возрастание (убывание) функции в точке (260). 2. Локальный максимум и локальный минимум функции (261).	
§ 8. Теорема о нуле производной	262
§ 9. Формула конечных приращений (формула Лагранжа)	263
§ 10. Некоторые следствия из формулы Лагранжа	264
1. Постоянство функции, имеющей на интервале равную нулю производную (264). 2. Условия монотонности функции на интервале (265). 3. Отсутствие у производной точек разрыва 1-го рода и устранимого разрыва (267). 4. Вывод некоторых неравенств (268).	
§ 11. Обобщенная формула конечных приращений (формула Коши)	269
§ 12. Раскрытие неопределенностей (правило Лопиталья)	270
1. Раскрытие неопределенности вида $0/0$ (270). 2. Раскрытие неопределенности вида ∞/∞ (272). 3. Раскрытие неопределенностей других видов (274).	

§ 13. Формула Тейлора	275
§ 14. Различные формы остаточного члена. Формула Маклорена	278
1. Остаточный член в форме Лагранжа, Коши и Пеано (278). 2. Другая запись формулы Тейлора (280). 3. Формула Маклорена (281).	
§ 15. Оценка остаточного члена. Разложение некоторых элементарных функций	281
1. Оценка остаточного члена для произвольной функции (281).	
2. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций (282).	
§ 16. Примеры приложений формулы Маклорена	285
1. Алгоритм вычисления числа e (285). 2. Реализация алгоритма вычисления числа e на электронной машине (286). 3. Использование формулы Маклорена для асимптотических оценок элементарных функций и вычисления пределов (287).	
Дополнение. Вычисление элементарных функций	290
1. Вычисление логарифмической и обратных тригонометрических функций (290). 2. Вычисление тригонометрических функций, показательной функции и гиперболических функций (293).	
Глава 9. Геометрическое исследование графика функции. Нахождение максимального и минимального значений функции	300
§ 1. Участки монотонности функции. Отыскание точек экстремума	300
1. Отыскание участков монотонности функции (300). 2. Отыскание точек возможного экстремума (301). 3. Первое достаточное условие экстремума (301). 4. Второе достаточное условие экстремума (303). 5. Экстремум функции, недифференцируемой в данной точке. Общая схема отыскания экстремумов (306).	
§ 2. Направление выпуклости графика функции	308
§ 3. Точки перегиба графика функции	310
1. Определение точки перегиба. Необходимое условие перегиба (310). 2. Первое достаточное условие перегиба (313). 3. Второе достаточное условие перегиба (314). 4. Некоторые обобщения первого достаточного условия перегиба (315).	
§ 4. Третье достаточное условие экстремума и перегиба	315
§ 5. Асимптоты графика функции	318
§ 6. Схема исследования графика функции	320
§ 7. Отыскание максимального и минимального значений функции. Краевой экстремум	323
1. Отыскание максимального и минимального значений функции (323). 2. Краевой экстремум (325).	
Глава 10. Определенный интеграл	327
§ 1. Интегральные суммы. Интегрируемость	327
§ 2. Верхние и нижние суммы	330
1. Понятие верхней и нижней сумм (330). 2. Свойства верхних и нижних сумм (331).	

§ 3. Необходимое и достаточное условие интегрируемости	335
§ 4. Некоторые классы интегрируемых функций	337
1. Свойство равномерной непрерывности функции (337). 2. Лемма Гейне–Бореля. Другое доказательство теоремы о равномерной непрерывности (340). 3. Интегрируемость непрерывных функций (341). 4. Интегрируемость некоторых разрывных функций (342). 5. Интегрируемость монотонных ограниченных функций (344).	
§ 5. Основные свойства определенного интеграла	344
§ 6. Оценки интегралов. Формулы среднего значения	347
1. Оценки интегралов (347). 2. Первая формула среднего значения (350). 3. Первая формула среднего значения в обобщенной форме (350). 4. Вторая формула среднего значения (351).	
§ 7. Существование первообразной для непрерывной функции. Основные правила интегрирования	352
1. Существование первообразной для непрерывной функции (352). 2. Основная формула интегрального исчисления (354). 3. Замена переменной под знаком определенного интеграла (356). 4. Формула интегрирования по частям (357). 5. Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме (358).	
Дополнение 1. Некоторые важные неравенства для сумм и интегралов	360
1. Вывод одного предварительного неравенства (360). 2. Неравенство Гёльдера для сумм (361). 3. Неравенство Минковского для сумм (362). 4. Интегрируемость произвольной положительной степени модуля интегрируемой функции (362). 5. Неравенство Гёльдера для интегралов (363). 6. Неравенство Минковского для интегралов (365).	
Дополнение 2. Доказательство утверждения из п. 4 § 6	368
Г л а в а 11. Геометрические и физические приложения определенного интеграла	368
§ 1. Длина дуги кривой	368
1. Понятие плоской кривой (368). 2. Параметрическое задание кривой (369). 3. Понятие пространственной кривой (372). 4. Понятие длины дуги кривой (372). 5. Достаточные условия спрямляемости кривой. Формулы для вычисления длины дуги кривой (377). 6. Дифференциал дуги (381). 7. Примеры вычисления длины дуги (382).	
§ 2. Площадь плоской фигуры	383
1. Понятие квадратуемости плоской фигуры. Площадь квадратуемой плоской фигуры (383). 2. Площадь криволинейной трапеции (386). 3. Площадь криволинейного сектора (387). 4. Примеры вычисления площадей (388).	
§ 3. Объемы тел и площади поверхностей	390
1. Понятие кубичности и объема (390). 2. Кубичность некоторых классов тел (390). 3. Примеры вычисления объемов (392). 4. Площадь поверхности вращения (393).	
§ 4. Некоторые физические приложения определенного интеграла	395
1. Масса и центр тяжести неоднородного стержня (395). 2. Ра-	

бота переменной силы (397).	
Дополнение. Пример неквадрируемой фигуры	397
Г л а в а 12. Приближенные методы вычисления корней уравнений и определенных интегралов	402
§ 1. Приближенные методы вычисления корней уравнений	402
1. Метод «вилки» (402). 2. Метод касательных (403). 3. Метод хорд (404). 4. Метод итераций (последовательных приближений) (405). 5. Обоснование метода касательных (408). 6. Обоснование метода хорд (412).	
§ 2. Приближенные методы вычисления определенных интегралов	414
1. Вводные замечания (414). 2. Метод прямоугольников (416). 3. Метод трапеций (420). 4. Метод парабол (422). 5. Заключительные замечания (425).	
Г л а в а 13. Теория числовых рядов	426
§ 1. Понятие числового ряда	426
1. Ряд и его частичные суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды (426). 2. Критерий Коши сходимости ряда (429). 3. Два свойства, связанные со сходимостью ряда (431).	
§ 2. Ряды с положительными членами	432
1. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с положительными членами (432). 2. Признаки сравнения (432). 3. Признаки Даламбера и Коши (436). 4. Интегральный признак Коши-Маклорена (439). 5. Признак Раабе (442). 6. Отсутствие универсального ряда сравнения (444).	
§ 3. Абсолютно и условно сходящиеся ряды	445
1. Понятия абсолютно и условно сходящегося ряда (445). 2. О перестановке членов условно сходящегося ряда (447). 3. О перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (450).	
§ 4. Арифметические операции над сходящимися рядами	453
§ 5. Признаки сходимости произвольных рядов	454
1. Признак Лейбница (455). 2. Признак Дирихле-Абеля (457).	
§ 6. Бесконечные произведения	460
1. Основные понятия (460). 2. Связь между сходимостью бесконечных произведений и рядов (462).	
Дополнение 1. Вспомогательная теорема для п. 3 § 2	466
Дополнение 2. Разложение функции $\sin x$ в бесконечное произведение	467
Дополнение 3. Обобщенные методы суммирования расходящихся рядов	470
1. Метод Чезаро (или метод средних арифметических) (471). 2. Метод суммирования Пуассона-Абеля (472).	
Г л а в а 14. Функции нескольких переменных	475
§ 1. Понятие функции нескольких переменных	475
1. О функциональных зависимостях между несколькими переменными величинами (475). 2. Понятия евклидовой плоскости и евклидова пространства (476). 3. Понятие функции двух и трех переменных (477). 4. Понятия m -мерного координатного про-	

	странства и m -мерного евклидова пространства (478). 5. Множество точек m -мерного евклидова пространства E^m (480). 6. Понятие функции m переменных (482).	
§ 2.	Предельное значение функции нескольких переменных	483
	1. Сходящиеся последовательности точек в m -мерном евклидовом пространстве E^m . Критерий Коши сходимости последовательности (483). 2. Некоторые свойства ограниченных последовательностей точек в m -мерном евклидовом пространстве (485). 3. Понятие предельного значения функции нескольких переменных (486). 4. Бесконечно малые функции (488). 5. Необходимое и достаточное условие существования предельного значения функции (критерий Коши) (488). 6. Повторные предельные значения (489).	
§ 3.	Непрерывные функции нескольких переменных	490
	1. Определение непрерывности функции нескольких переменных (490). 2. Основные свойства непрерывных функций нескольких переменных (494).	
§ 4.	Производные и дифференциалы функции нескольких переменных	497
	1. Частные производные функции нескольких переменных (497). 2. Понятие дифференцируемости функции нескольких переменных (499). 3. Понятие дифференциала функции нескольких переменных (505). 4. Дифференцирование сложной функции (505). 5. Инвариантность формы первого дифференциала (509). 6. Производная по направлению. Градиент (510).	
§ 5.	Частные производные и дифференциалы высших порядков	513
	1. Частные производные высших порядков (513). 2. Дифференциалы высших порядков (518). 3. Формула Тейлора для функции m переменных с остаточным членом в форме Лагранжа (524). 4. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. (527)	
§ 6.	Локальный экстремум функции m переменных	531
	1. Понятие экстремума функции m переменных. Необходимые условия локального экстремума (531). 2. Достаточные условия локального экстремума (533). 3. Случай функции двух переменных (540). 4. Пример исследования функции на экстремум (542).	
§ 7.	Градиентный метод поиска экстремума сильно выпуклой функции	543
	1. Выпуклые множества и выпуклые функции (544). 2. Существование минимума у сильно выпуклой функции и единственность минимума у строго выпуклой функции (551). 3. Поиск минимума сильно выпуклой функции (556).	
	Дополнение. О выборе оптимального разбиения сегмента для приближенного вычисления интеграла	565
Г л а в а 15. Теория неявных функций и ее приложения		568
§ 1.	Понятие неявной функции	568
§ 2.	Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции и некоторые ее применения	569
	1. Теорема о существовании и дифференцируемости неявной	

функции (569). 2. Вычисление частных производных неявно заданной функции (575). 3. Особые точки поверхности и плоской кривой (578). 4. Условия, обеспечивающие существование для функции $y = f(x)$ обратной функции (579).	
§ 3. Неявные функции, определяемые системой функциональных уравнений	580
1. Теорема о разрешимости системы функциональных уравнений (580). 2. Вычисление частных производных функций, неявно определяемых посредством системы функциональных — уравнений (586). 3. Взаимно однозначное отображение двух множеств m -мерного пространства (586).	
§ 4. Зависимость функций	587
1. Понятие зависимости функций. Достаточное условие независимости (587). 2. Функциональные матрицы и их приложения (590).	
§ 5. Условный экстремум	594
1. Понятие условного экстремума (594). 2. Метод неопределенных множителей Лагранжа (597). 3. Достаточные условия (598). 4. Пример (600).	
Дополнение. Замена переменных	602
Г л а в а 16. Некоторые геометрические приложения дифференциального исчисления	606
§ 1. Огибающая и дискриминантная кривая однопараметрического семейства плоских кривых	606
1. Предварительные замечания (606). 2. Однопараметрические семейства плоских кривых. Характеристические точки кривых семейства (609). 3. Огибающая и дискриминантная кривая однопараметрического семейства плоских кривых (611). 4. Огибающая и дискриминантная поверхность однопараметрического семейства поверхностей (614).	
§ 2. Соприкосновение плоских кривых	615
1. Понятие порядка соприкосновения плоских кривых (615). 2. Порядок соприкосновения кривых, являющихся графиками функций (617). 3. Достаточные условия соприкосновения порядка n (619). 4. Соприкасающаяся окружность (621).	
§ 3. Кривизна плоской кривой	622
1. Понятие о кривизне плоской кривой (622). 2. Формула для вычисления кривизны (624).	
§ 4. Эволюта и эвольвента	627
1. Нормаль к плоской кривой (627). 2. Эволюта и эвольвента плоской кривой (628).	
П р и л о ж е н и е. Дальнейшее развитие теории вещественных чисел	632
1. Полнота множества вещественных чисел (632). 2. Аксиоматическое введение множества вещественных чисел (636). 3. Заключительные замечания (641).	
Предметный указатель	642