## А.Н. Тихонов А.А. Самарский

# УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

7-е издание

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов физико-математических специальностей университетов



ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

MOCKBA 2004 ИЗДАТЕЛЬСТВО "НАУКА" УДК 517.95 ББК 22.161.6 Т46

Печатается по решению Ученого совета Московского университета

#### Тихонов А.Н., Самарский А.А.

Т46 Уравнения математической физики: Учебник. – 7-е изд. / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ; Изд-во "Наука", 2004. – 798 с. – (Классический университетский учебник).

ISBN 5-211-04843-1

ISBN 5-02-033599-1

В книге (6-е изд. — 1999 г.) рассматриваются задачи математической физики, приводящие к уравнениям с частными производными. Расположение материала соответствует основным типам уравнений.

Изучение каждого типа уравнений начинается с простейших физических задач, приводящих к уравнениям рассматриваемого типа. Особое внимание уделяется математической постановке задач, строгому изложению решения простейших задач и физической интерпретации результатов. В каждой главе помещены задачи и примеры.

7-е издание печатается по тексту 6-го без изменений.

Для студентов физико-математических специальностей университетов.

УДК 517.95 ББК 22.161.6

ISBN 5-211-04843-1 ISBN 5-02-033599-1

- © Издательство Московского университета, 2004
- © МГУ им. М.В. Ломоносова, художественное оформление, 2004

### ОГЛАВЛЕНИЕ

	OLIABILITE	
Предис	ловис (В.А. Садовничий) словие к седьмому изданию дисловия к первому изданию	3 13 14
	глава і	
	КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ	
§ 1. K	Спассификация уравнений с частными производными 2-го по-	1 =
p	ядка	15
M	. Дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменны- ия (15). 2. Классификация уравнений 2-го порядка со многими не- ависимыми переменными (22). 3. Канонические формы линейных равнений с постоянными коэффициентами (24).	
Задачі	и к главе I	26
	глава и	
	УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА	
Г	Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Постановка краевых задач	27
1 C I I I	1. Уравнение малых поперечных колебаний струны (27). 2. Уравнение продольных колебаний стержней и струн (31). 3. Энергия колебаний струны (32). 4. Вывод уравнения электрических колебаний в проводах (34). 5. Поперечные колебания мембраны (35). 6. Уравнения гидродинамики и акустики (38). 7. Граничные и начальные условия (43). 8. Редукция общей задачи (48). 9. Постановка краевых задач для случая многих переменных (49). 10. Теорема единственности (50). Задачи (53).	
§ 2. 1	Метод распространяющихся волн	54
1	1. Формула Даламбера (54). 2. Физическая интерпретация (57). 3. Примеры (59). 4. Неоднородное уравнение (62). 5. Устойчивость решений (64). 6. Полуограниченная прямая и метод продолжений (68). 7. Задачи для ограниченного отрезка (74). 8. Дисперсия волн (78). 9. Интегральное уравнение колебаний (79). 10. Распространение разрывов вдоль характеристик (83). Задачи (85).	

§ 3. Метод разделения переменных	05
1. Уравнение свободных колебаний струны (87). 2. Интерпретация решения (93). 3. Представление произвольных колебаний в виде суперпозиции стоячих волн (96). 4. Неоднородные уравнения (101). 5. Общая первая краевая задача (108). 6. Краевые задачи со ставий (111). 8. Сосредоточенная сила (116). 9. Общая схема метода разделения переменных (119). Задачи (126).	87
§ 4. Задача с данными на характеристиках	100
<ol> <li>Постановка задачи (128).</li> <li>Метод последовательных приближений для задачи Гурса (129).</li> <li>Задачи (135).</li> </ol>	128
§ 5. Решение общих линейных уравнений гиперболического типа .	135
1. Сопряженные дифференциальные операторы (135). 2. Интегральная форма решения (136). 3. Физическая интерпретация функции Римана (139). 4. Уравнения с постоянными коэффициентами (143).	100
Задачи к главе II	
Приложения к главе II	147
I. О колебании струн музыкальных инструментов	148
II. О колебании стержней	148
III. Колебания нагруженной струны	151
1. Постановка задачи (155). 2. Собственные колебания нагруженной струны (156). 3. Струна с грузом на конце (161). 4. Поправки для собственных значений (161).	155 `
IV. Уравнения газодинамики и теория ударных волн	
1. Уравнения газодинамики. Закон сохранения энергии (162). 2. Ударные волны. Условия динамической совместности (165). 3. Слабые разрывы (170).	162
V. Динамика сорбции газов	
1. Уравнения, описывающие процесс сорбции газа (174). 2. Асимптотическое решение (178).	174
VI. Физические аналогии	
	185
ГЛАВА ІІІ	
УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА	
§ 1. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. Постановка краевых задач	100
1. Линейная задача о распространении тепла (189). 2. Уравнение диф- фузии (193). 3. Распространение тепла в пространстве (194). 4. Поста- новка краевых задач (196). 5. Принцип максимального значения (202). 6. Теорема единственности (205). 7. Теорема единственности для бес- конечной прямой (208).	189
§ 2. Метод разделения переменных	000
1. Однородная краевая задача (209). 2. Функция источника (213). 3. Краевые задачи с разрывными начальными условиями (215). 4. Неоднородное уравнение теплопроводности (222). 5. Общая первая краевая задача (225). Задачи (227).	209

§ 3. Задачи на бесконечной прямой	228
1. Распространение тепла на бесконечной прямой. Функция источняка пля неограниченной области (228). 2. Краевые задачи для попуогра-	
ниченной прямой (242).  4. Задачи без начальных условий	250
	254
Задачи к главе III	256
Приложения к главе III	256
1. Температурные волны	259
II. Влияние радиоактивного распада на температуру земной коры .	264
III. Метод подобия в теории теплопроводности	
1. Функция источника для бесконечной прямой (264). 2. Краевые задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности (267). 3. Режимы с обострением. Эффект локализации тепла (274).	
IV. Задача о фазовом переходе	277
V. Уравнение Эйнштейна— Колмогорова	282
VI. δ-Функция	286
1. Определение $\delta$ -функции (286). 2. Разложение $\delta$ -функции в ряд Фурье (289). 3. Применение $\delta$ -функции к построению функции источника (291).	
уравнения эллиптического типа	
В 1 Запаци приволящие к уравнению Лапласа	295
<ol> <li>Стационарное тепловое поле. Постановка краевых задач (2009)</li> <li>Потенциальное течение жидкости. Потенциал стационарного тока и электростатического поля (296).</li> <li>Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат (298).</li> <li>Некоторые частные решения уравнения Лапласа (301).</li> <li>Гармонические функции и аналитические функции комплексного переменного (303).</li> <li>Преобразование обратных радиусов-векторов (305).</li> </ol>	307
2. Общие свойства гармонических функций	
<ol> <li>Формулы Грина. Интегральное представление решения (307). 2. Пе- которые основные свойства гармонических функций (313). 3. Един- ственность и устойчивость решения первой внутренней краевой за- дачи (317). 4. Задачи с разрывными граничными условиями (318).</li> <li>Изолированные особые точки (319). 6. Регулярность гармонической функции трех переменных в бесконечности (321). 7. Внешние крае- вые задачи. Единственность решения двух- и трехмерных задач (322).</li> </ol>	
3. Решение краевых задач для простейших областей методом раз-	328
деления переменных 1. Первая краевая задача для круга (328). 2. Интеграл Пуассона (333)	
<ol> <li>Первая краевая задача для круга (326).</li> <li>Случай разрывных граничных значений (336).</li> </ol>	

§	4.	Функция источника	338
		1. Функция источника для уравнения $\Delta u=0$ и ее основные свойства (338). 2. Метод электростатических изображений и функция источника для сферы (343). 3. Функция источника для круга (346). 4. Функция источника для полупространства (347).	
§	5.	Теория потенциала	348
		1. Объемный потенциал (348). 2. Плоская задача. Логарифмический потенциал (351). 3. Несобственные интегралы (353). 4. Первые производные объемного потенциала (360). 5. Вторые производные объемного потенциала (363). 6. Поверхностные потенциалы (367). 7. Поверхности и кривые Ляпунова (371). 8. Разрыв потенциала двойного слоя (374). 9. Свойства потенциала простого слоя (377). 10. Применение поверхностных потенциалов к решению краевых задач (380). 11. Интегральные уравнения, соответствующие краевым задачам (386).	
3	ада	чи к главе IV	391
		ложения к главе IV	393
	-	имптотическое выражение объемного потенциала	393
	ı.	адачи электростатики	396
		Основная задача электроразведки	401
		Определение векторных полей	408
		рименение метода конформного преобразования в электростатике	412
		Ірименение метода конформного преобразования в гидродинами-	
ĸe			416
V	II.	Бигармоническое уравнение	422
		1. Единственность решения (423). 2. Представление бигармонических функций через гармонические функции (424). 3. Решение бигармонического уравнения для круга (425).	
		глава V	n
		РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕ	
§	1.	Задача с начальными условиями	427
		1. Уравнение колебаний в пространстве (427). 2. Метод усреднения (429). 3. Формула Пуассона (430). 4. Метод спуска (433). 5. Физическая интерпретация (434). 6. Метод отражения (436).	
§	2.	Интегральная формула	437
		1. Вывод интегральной формулы (437). 2. Следствия из интегральной формулы (441).	
§	3.	Колебания ограниченных объемов	444
		<ol> <li>Общая схема метода разделения переменных. Стоячие волны (444).</li> <li>Колебания прямоугольной мембраны (450).</li> <li>Колебания круглой мембраны (454).</li> </ol>	

Задачи	к главе V	460
Прил	ожения к главе V	461
І. Прив	ведение уравнений теории упругости к уравнениям колебаний	461
	внения электромагнитного поля	464
1.	Уравнения электромагнитного поля и граничные условия (464). Потенциалы электромагнитного поля (468). 3. Электромагнитное оле осциллятора (470).	
	ГЛАВА VI	
	РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В ПРОСТРАНСТВЕ	
§ 1. F	аспространение тепла в неограниченном пространстве	477
1 B	. Функция температурного влияния (477). 2. Распространение тепла неограниченном пространстве (481).	
§ 2. F	Распространение тепла в ограниченных телах	486
1 n	Схема метода разделения переменных (486). 2. Остывание круглого цилиндра (489). 3. Определение критических размеров (491).	
§ 3. F	Краевые задачи для областей с подвижными границами	493
P	. Формула Грина для уравнения теплопроводности и функция источника (493). 2. Решение краевой задачи (498). 3. Функция источника для отрезка (500).	
§ 4. 7	Гепловые потенциалы	502
2	1. Свойства тепловых потенциалов простого и двойного слоя (502). 2. Решение краевых задач (505). 3. Условия локализации граничных режимов с обострением (507).	
Запач	и к главе VI	510
	пожения к главе VI	511
	офузия облака	511
-	размагничивании цилиндра с обмоткой	514
п. О ј	размагничивании цилиндра с обмотком	
	ГЛАВА VII	
	УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА (продолжение)	
§ 1. (	Основные задачи, приводящие к уравнению $\Delta v + cv = 0$	519
]	1. Установившиеся колебания (519). 2. Диффузия газа при наличии распада и при цепных реакциях (520). 3. Диффузия в движущейся среде (520). 4. Постановка внутренних краевых задач для уравнения $\Delta v + cv = 0$ (521).	
	Функции влияния точечных источников	522
1	1. Функции влияния точечных источников (522). 2. Интегральное представление решения (525). 3. Потенциалы (528).	

§ 3	В. Задачи для неограниченной области. Принцип излучения	53
	1. Уравнение $\Delta v + cv = -f$ в неограниченном пространстве (531). 2. Принцип предельного поглощения (532). 3. Принцип предельной амплитуды (534). 4. Условия излучения (535).	
§ 4	l. Задачи математической теории дифракции	543
	1. Постановка задачи (541). 2. Единственность решения задачи дифракции (542). 3. Дифракция на сфере (545).	
Зад	дачи к главе VII	552
Пр	иложения к главе VII	554
I. B	Волны в цилиндрических трубах	554
II.	Электромагнитные колебания в полых резонаторах	565
	1. Собственные колебания цилиндрического эндовибратора (565). 2. Электромагнитная энергия собственных колебаний (569). 3. Возбуждение колебаний в эндовибраторе (572).	
III.	Скин-эффект	574
IV.	Распространение радиоволн над поверхностью земли	579
	дополнение і	
	МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ	
§ 1.	Основные понятия	585
	1. Сетки и сеточные функции (586). 2. Аппроксимация простейших дифференциальных операторов (587). 3. Разностная задача (593). 4. Устойчивость (594).	500
§ 2.	Разностные схемы для уравнения теплопроводности	597
	1. Схемы для уравнения с постоянными коэффициентами (597). 2. Погрешность аппроксимации (599). 3. Энергетическое тождество (601). 4. Устойчивость (605). 5. Сходимость и точность (608). 6. Разностные схемы для уравнений с переменными коэффициентами (609). 7. Метод баланса. Консервативные схемы (610). 8. Двухслойные схемы для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами (614). 9. Трехслойные схемы (620). 10. Решение систем разностных уравнений. Метод прогонки (622). 11. Разностные методы решения квазилинейных уравнений (624).	
§ 3.	Метод конечных разностей для решения задачи Дирихле	628
	<ol> <li>Разностная аппроксимация оператора Лапласа (628).</li> <li>Принцип максимума (632).</li> <li>Оценка решения неоднородного уравнения (635).</li> <li>Сходимость решения разностной задачи Дирихле (636).</li> </ol>	
§ 4.	Разностные методы решения задач с несколькими пространственными переменными	638
	1. Многомерные схемы (638). 2. Экономичные схемы (640).	
§ 5.	Итерационные методы решения сеточных уравнений	649
	1. Модельная задача (649). 2. Итерационные методы линейной алгебры (651). 3. Выбор итерационных параметров (652). 4. Итерационные методы вариационного типа (654). 5. Диагональный оператор $B$ (656). 6. Попеременно-треугольный итерационный метод (657).	

# дополнение и специальные функции

1. Введение (660). 2. Общее уравнение теории специальных функций (662). 3. Поведение решений в окрестности $x=a$ , если $k(a)=0$ (663). 4. Постановка краевых задач (665).	
	cco
Часть І. Цилиндрические функции	668 668
1. Степенные ряды (669). 2. Рекуррентные формулы (673). 3. Функции полуцелого порядка (674). 4. Асимптотический порядок цилиндрических функций (675).	
2. Краевые задачи для уравнения Бесселя	678 682
1. Функции Ханкеля (682). 2. Функции Ханкеля и Неймана (684). 3. Функции мнимого аргумента (686). 4. Функция $K_0(x)$ (688).	
<ol> <li>Представление цилиндрических функций в виде контурных ин- тегралов</li></ol>	693
1. Контурные интегралы (693). 2. Функции Ханкеля (695). 3. Некоторые свойства гамма-функции (696). 4. Интегральное представление функции Бесселя (698). 5. Интегральное представление $K_{\nu}(x)$ (699). 6. Асимптотические формулы для цилиндрических функций (701).	
5. Интеграл Фурье — Бесселя и некоторые интегралы, содержа- щие функции Бесселя	703
1. Интеграл Фурье — Бесселя (703). 2. Некоторые интегралы, содержащие функции Бесселя (705).	
	709
Часть II. Сферические функции	709
1. Производящая функция и полиномы Лежандра (709). 2. Рекуррентные формулы (711). 3. Уравнение Лежандра (712). 4. Ортогональность полиномов Лежандра (713). 5. Норма полиномов Лежандра (714). 6. Нули полиномов Лежандра (715). 7. Ограниченность полиномов Лежандра (715).	
2. Присоединенные функции Лежандра	716
1. Присоединенные функции (716). 2. Норма присоединенных функций (717). 3. Полнота системы присоединенных функций (718).	
3. Гармонические полиномы и сферические функции	720
1. Гармонические полиномы (720). 2. Сферические функции (721). 3. Ортогональность системы сферических функций (724). 4. Замкнутость системы сферических функций (727). 5. Разложение по сферическим функциям (728).	,
4. Некоторые примеры применения сферических функций	732
<ol> <li>Задача Дирихле для сферы (733).</li> <li>Проводящая сфера в поле точечного заряда (733).</li> <li>Поляризация шара в однородном поле (734).</li> <li>Собственные колебания сферы (737).</li> <li>Внешняя краевая задача для сферы (740).</li> </ol>	

Часть III. Полиномы Чебышёва— Эрмита и Чебышёва— Лагерра	742
1. Дифференциальная формула (742). 2. Рекуррентные формулы (743). 3. Уравнение Чебышёва — Эрмита (743). 4. Норма полиномов $H_n(x)$ (744). 5. Функции Чебышёва — Эрмита (745).	742
§ 2. Полиномы Чебышёва — Лагерра	745
<ol> <li>Дифференциальная формула (745).</li> <li>Рекуррентные формулы (746).</li> <li>Уравнение Чебышёва — Лагерра (746).</li> <li>Ортогональность и норма полиномов Чебышёва — Лагерра (747).</li> <li>Обобщенные полиномы Чебышёва — Лагерра (747).</li> </ol>	, ,
§ 3. Простейшие задачи для уравнения Шрёдингера	749
<ol> <li>Уравнение Шрёдингера (749).</li> <li>Гармонический осциллятор (750).</li> <li>Ротатор (752).</li> <li>Движение электрона в кулоновом поле (753).</li> </ol>	
Часть IV. Формулы, таблицы и графики	758
І. Основные свойства специальных функций	758
II. Таблицы	764
III. Графики специальных функций	767
IV. Различные ортогональные системы координат	769
дополнение ш	
ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ	
§ 1. Некоторые понятия функционального анализа	777
1. Вспомогательные сведения об интеграле Лебега, обобщенной частной производной и некоторых функциональных пространствах (777).  2. Функциональные пространства (781).	
§ 2. Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона	782
1. Определение обобщенного решения задачи Дирихле (782). 2. Два основных неравенства (785). 3. Единственность и существование обобщенного решения задачи Дирихле (787).	.02
	785
Дополнительная литература	791 792