



Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова



Факультет вычислительной математики
и кибернетики

Кафедра математической физики

- ✓ Математическое и компьютерное моделирование процессов естествознания
- ✓ Обратные задачи и интерпретация результатов эксперимента
- ✓ Математические и компьютерные методы обработки изображений

Обратные задачи и их применения

Обратные задачи это математические задачи, возникающие при обращении причинно следственных связей. То есть это задачи, в которых нужно определить причины по следствиям. Рассмотрим пример.

Обратная задача для модели популяции

Модель хищник-жертва (прямая задача)	Обратная задача
<p>Обозначим через $u(t)$ количество жертв (караси), а через $v(t)$ количество хищников (щуки). Их изменение во времени описывается следующей задачей Коши</p> $u'(t) = au(t) - bu(t)v(t), \quad t \geq t_0,$ $v'(t) = cu(t)v(t) - dv(t), \quad t \geq t_0,$ $u(t_0) = u_0, \quad v(t_0) = v_0.$ <p>Здесь a, b, c, d -положительные коэффициенты, определяющие возрастание и убывание числа жертв и хищников.</p> <p>Если известны величины a, b, c, d, то решая задачу Коши (прямая задача) можно описать изменение популяции во времени.</p>	<p>Величины a, b, c, d (причины изменения популяций) неизвестны. Их нужно определить, проводя измерения $u(t)$ и $v(t)$ на некотором интервале времени $[t_0, t_1]$.</p> <p>Решив эту задачу и найдя a, b, c, d, можно сделать прогноз на будущее $t \geq t_1$, решив задачу Коши с найденными a, b, c, d.</p>

Обратные задачи, состоящие в определении коэффициентов системы дифференциальных уравнений по решению этой системы, возникают в химии, биологии, вирусологии, медицине, экономике, социологии и многих других научных и практических исследованиях.

Обратная задача электрокардиографии

Большинство задач медицинской диагностики с математической точки зрения являются обратными. Требуется определить причину (болезнь), измеряя следствия (электрокардиограмма, анализы и т.п.). Типичный пример подобных задач — обратная задача электрокардиографии. Опишем ее.

Одной из широко распространенных болезней сердца является аритмия. Она определяется наличием в сердце источника электрического поля, нарушающего нормальный ритм сердца. Этот источник создает электрическое поле, определяемое потенциалом $u(x, y, z)$.

Рассмотрим математическую постановку. Имеются две замкнутые поверхности Σ_h - поверхность сердца и $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_t$ - поверхность торса. Обозначим через Ω область ограниченную изнутри поверхностью Σ_h , а снаружи поверхностью Σ .

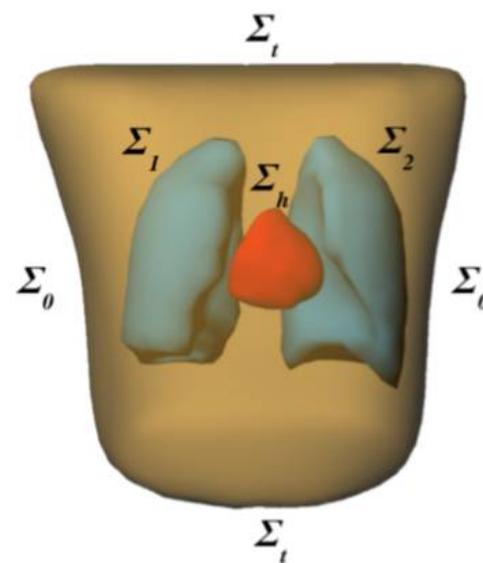
Если мы знаем потенциал $u(x, y, z)$ на поверхности сердца $f(x, y, z)$ и поверхности торса $\varphi(x, y, z)$, то можем найти потенциал в области Ω . Для этого нужно решить хорошо известную в математике задачу Дирихле (прямая задача).

Задача Дирихле. Найти функцию $u(x, y, z)$ такую, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega,$$

$$u(x, y, z) = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma_h,$$

$$u(x, y, z) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma.$$



Обратная задача электрокардиографии (продолжение)

Для диагностики аритмии важно определить неизвестный потенциал на поверхности сердца $f(x, y, z)$, проводя измерения только на части Σ_0 поверхности торса.

Обратная задача электрокардиографии.

Найти функцию $u(x, y, z)$ на поверхности сердца $(x, y, z) \in \Sigma_h$, если известно, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega,$$

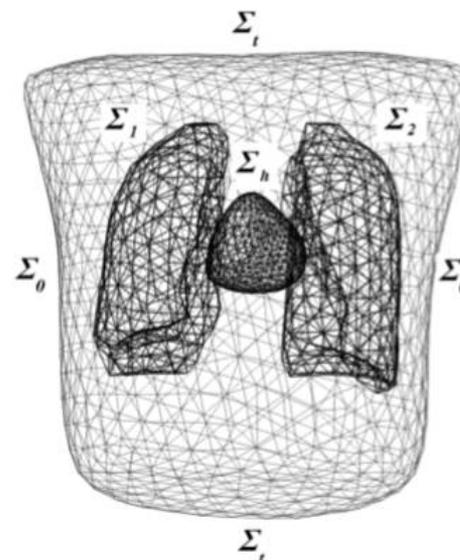
$$u(x, y, z) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma_0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = \psi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma_0.$$

Здесь $\varphi(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$ - известные функции, полученные в результате измерений на части Σ_0 поверхности тела человека, $\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная потенциала по нормали к поверхности.

Конечно, при решении реальных задач электрокардиографии возникает множество различных проблем. Нужно создать трехмерную модель поверхностей сердца и торса данного конкретного человека, нужно учесть наличие легких и их геометрии и многое другое.

На изображении показана использованная в реальных расчетах трехмерная модель торса, легких и сердца человека.

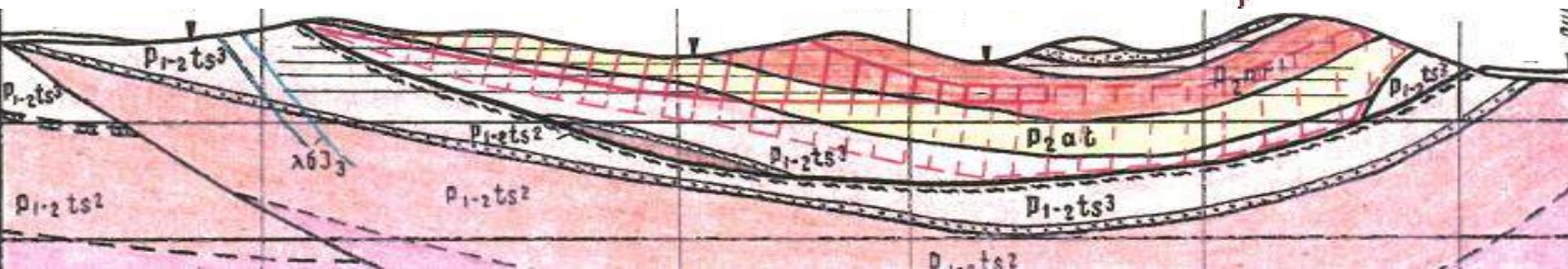
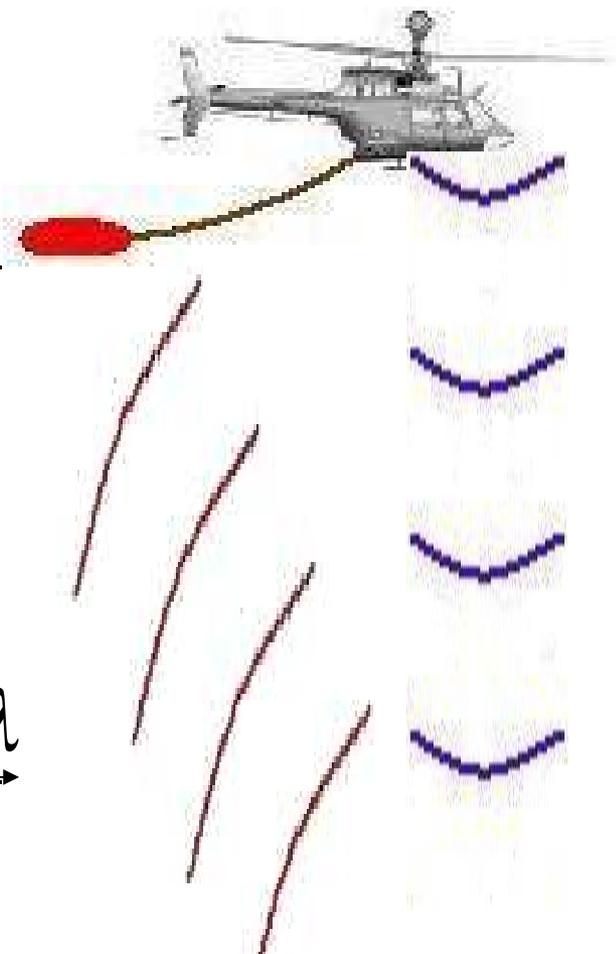
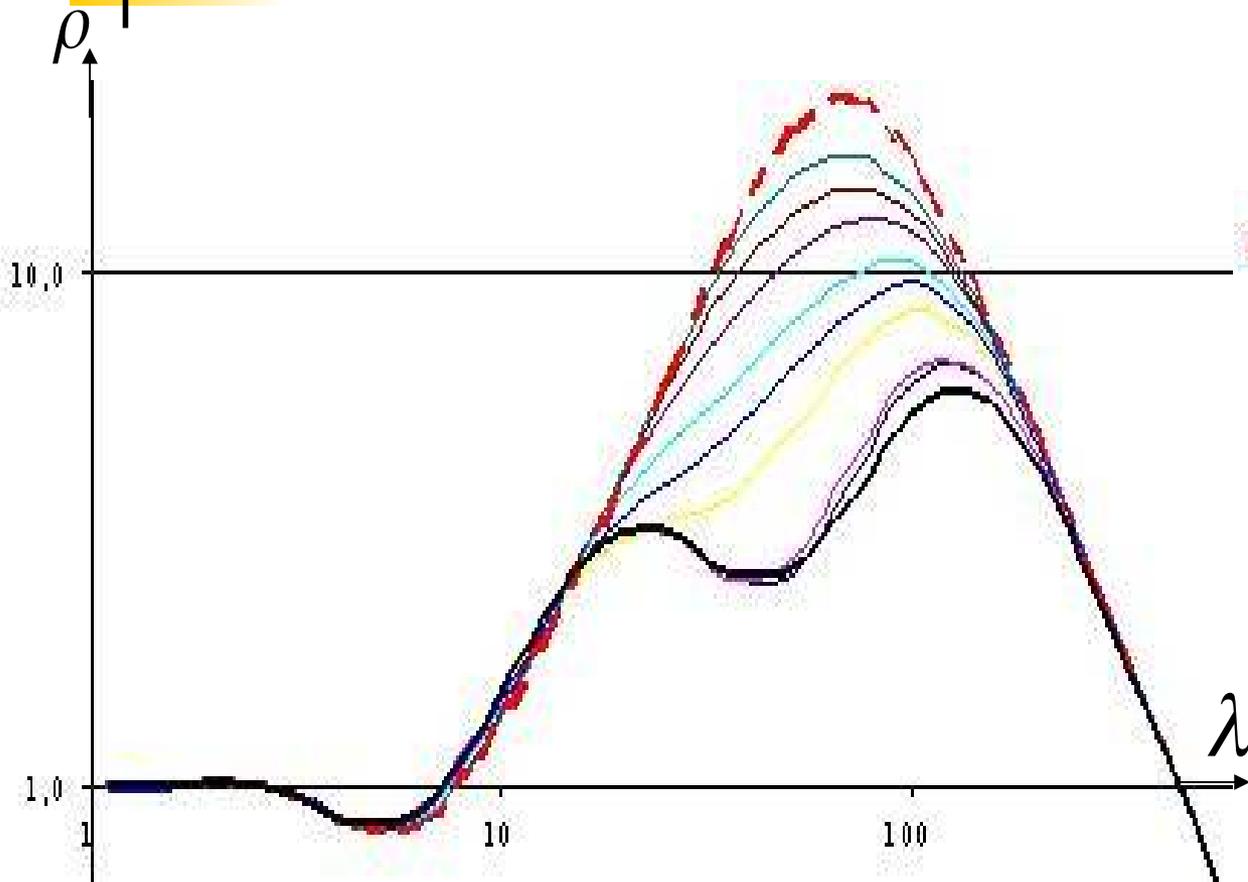


Диффузия в обработке изображений

Microsoft® DirectX® is a set of low-level application programming interfaces (APIs) for creating games and other high-performance multimedia applications. It includes support for two-dimensional (2-D) and three-dimensional (3-D) graphics, sound effects and music, input devices, and networked applications such as multiplayer games.

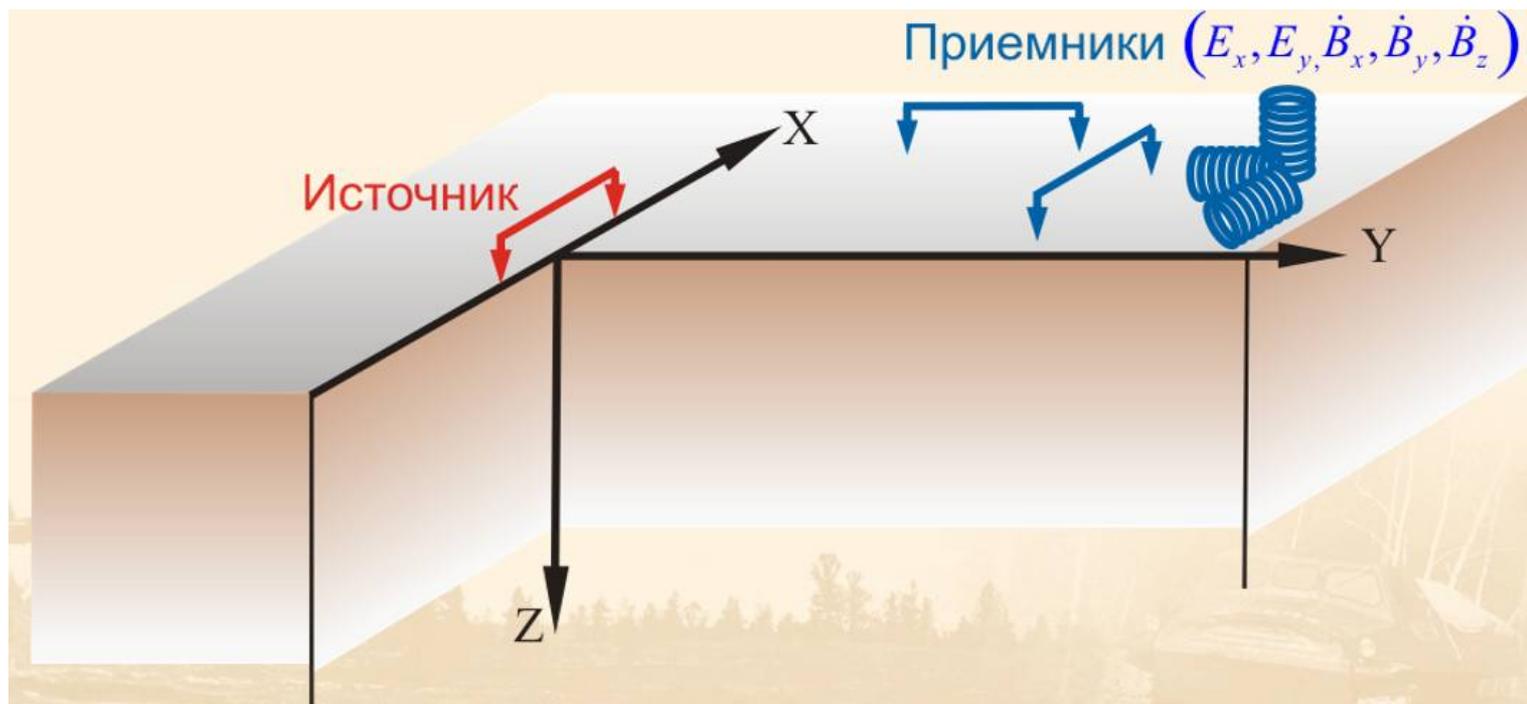
It includes support for two-dimensional (2-D) and three-dimensional (3-D) graphics, sound effects and music, input devices, and networked applications such as multiplayer games.

Аэрометоды магнитного зондирования Земли



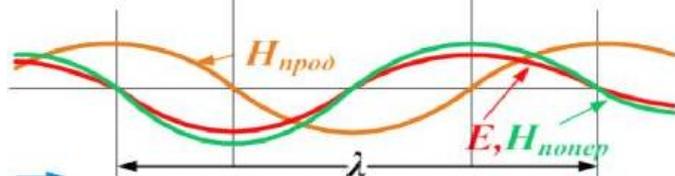
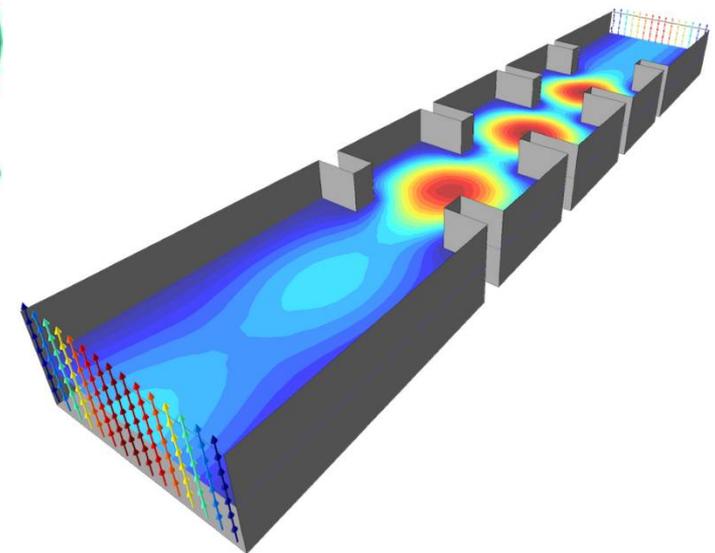
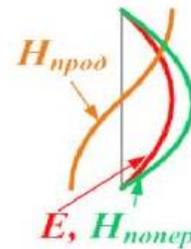
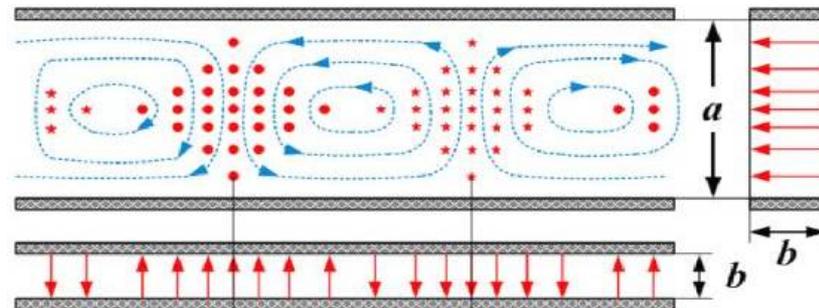
Математические модели электроразведки

Электромагнитные зондирования используются при глубинных исследованиях, поисках полезных ископаемых. В методе частотного электромагнитного зондирования приёмниками измеряются электрические и магнитные составляющие поля, созданного в Земле электрическим диполем или петлей (источником), питаемыми током переменной частоты. С помощью математических моделей решается обратная задача, в которой по измеренному полю восстанавливается геоэлектрический разрез прилегающей среды.



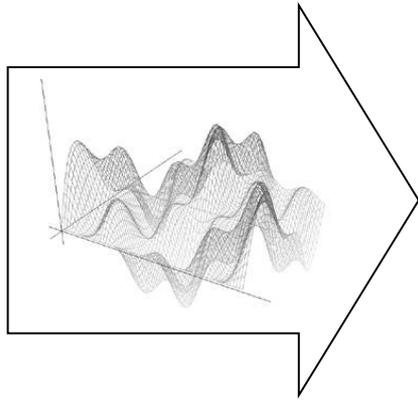
Моделирование волноведущих структур

Волноводы служат для передачи электромагнитных волн, которые распространяются вдоль волновода, отражаясь от его стенок. Волноводы применяются в современных радиолокационных станциях, ускорителях элементарных частиц, оптоволоконных линиях связи, медицинских приборах и т.д. Математическое моделирование применяется для изучения процессов распространения волн в волноводах и проектирования устройств с заданными свойствами.

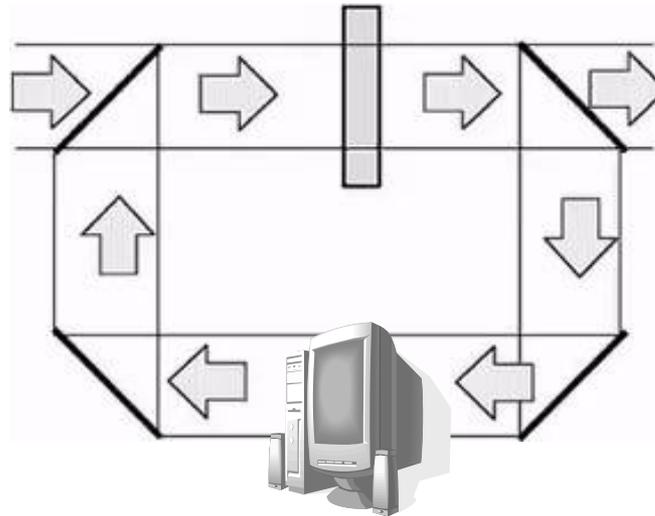


- \vec{H} - магнитные силовые линии
- \vec{E} - электрические силовые линии
- ★ - силовая линия идет «от нас»
- - силовая линия идет «на нас»

Адаптивное управление подавлением искажений в системах с обратной связью

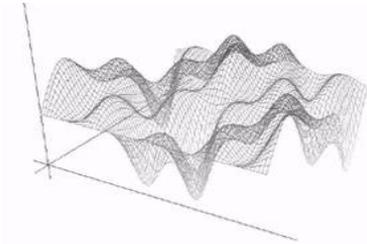


Нелинейная среда

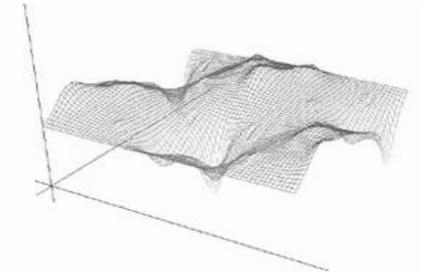


Контроллер обратной связи

Подавление без оптимизации



Адаптивное управление



Оптимизированное подавление

Математические методы:

- Дифференциальные уравнения в частных производных
- Теория оптимального управления
- Функциональный анализ
- Численные методы

Функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ) с преобразованиями пространственных аргументов и запаздыванием

Дифференциальные уравнения описывают **локальную связь** искомой функции и ее производных ($y''(t) = F(t, y(t), y'(t))$): ОДУ 2-го закона Ньютона,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \Phi(u(x, y, t), u_x(x, y, t), u_y(x, y, t)) \quad \text{- уравнение диффузии.}$$

ФДУ описывает связь искомой функции и ее производных в **различных** точках пространства и времени: $y''(t) = F(t, y(t), y(t - T))$ - ДУ с запаздыванием,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = F(u(x, y, t), u(x + \Delta x, y + \Delta y, t))$$

- ФДУ диффузии со **сдвигом пространственных аргументов**,

$$u_t + u = Du_{\theta\theta} + I_{\text{feedback}}(R_{\Delta}u(t - T)), \quad R_{\Delta}f(\theta) = f((\theta + \Delta) \bmod 2\pi)$$

- ФДУ диффузии относительно $u = u(\theta, t)$ с **запаздыванием и поворотом** на угол Δ .

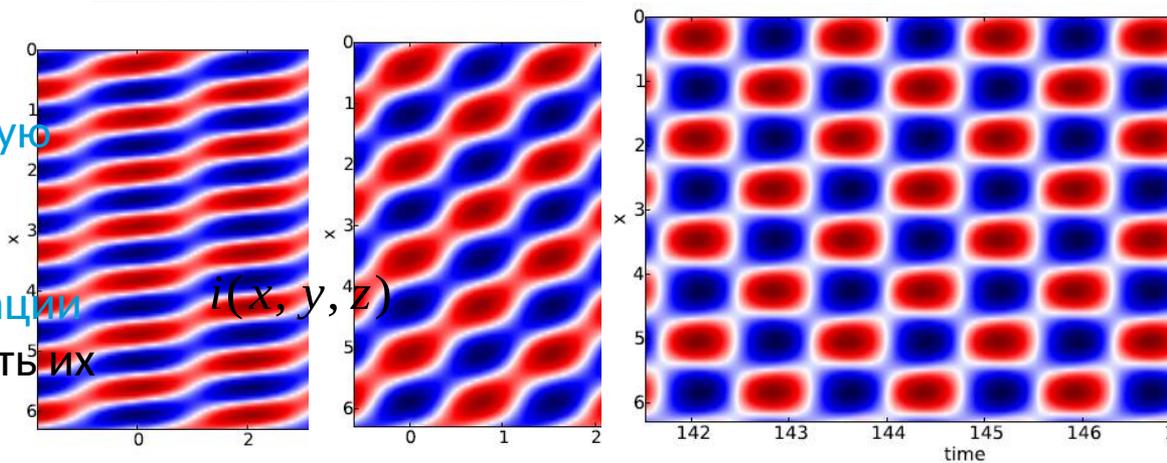
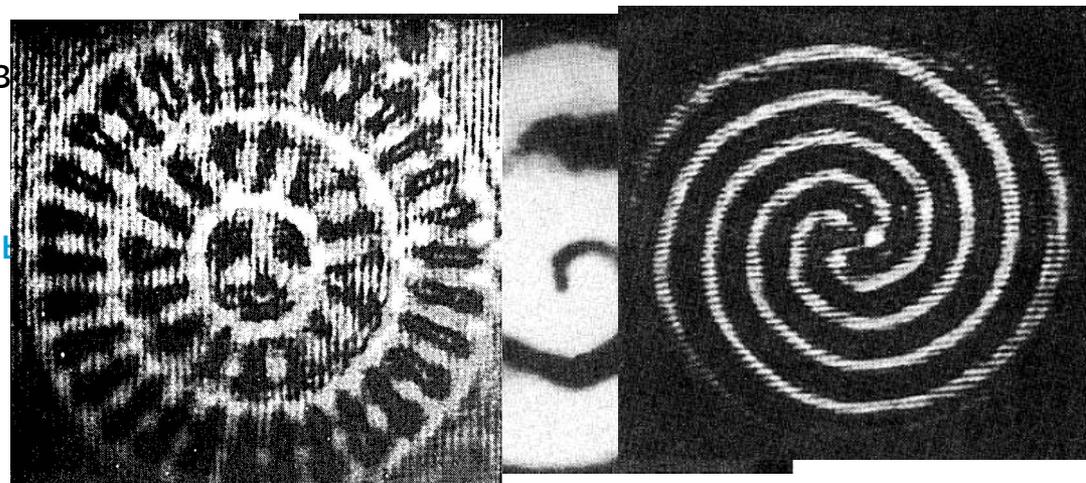
ФДУ описывают динамику в нелинейных оптических системах с обратной связью.

Управление преобразованием аргументов - **новый тип** задач управления для ФДУ.

Структурообразование в ФДУ диффузии с запаздыванием

Исследование ФДУ диффузии в круге позволяет описать и предсказать условия возникновения типичных явлений самоорганизации светового поля – вращающихся ротационных, спиральных стоячих волн.

Сочетание параметров локальных (диффузия) и нелокальных преобразований (запаздывание, поворот) дает уникальную возможность моделировать богатую пространственно-временную динамику и реализовывать механизмы конкуренции/кооперации оптических структур и использовать их для задач оптической обработки информации.



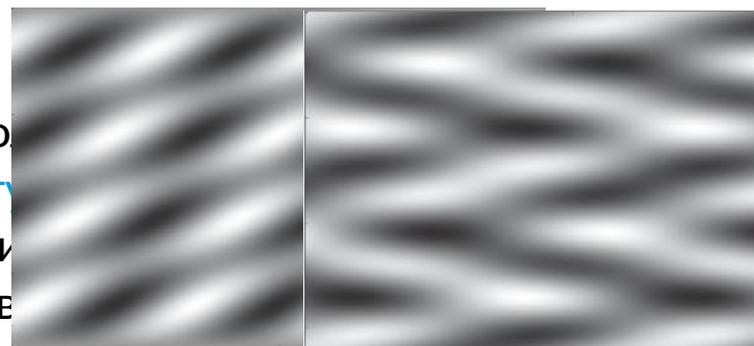
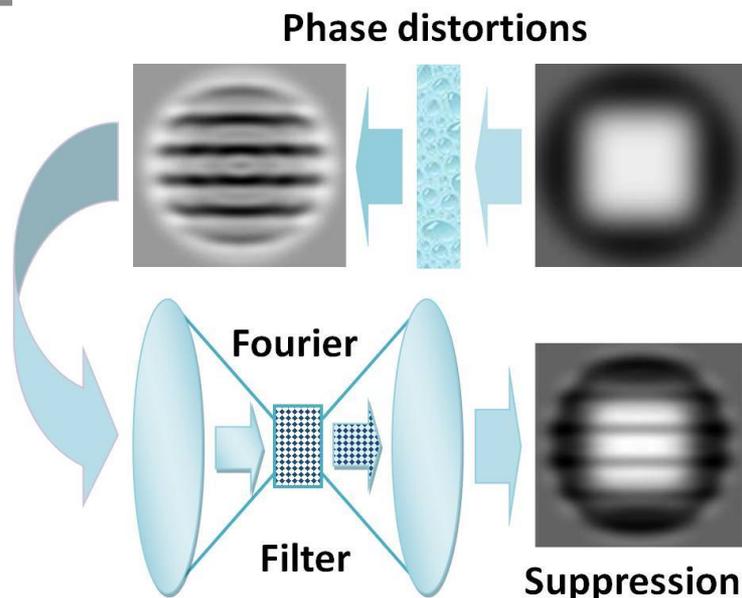
ФДУ диффузии с управляемой Фурье-фильтрацией

Под **Фурье-фильтрацией (ФФ)** обычно понимают изменение функции (изображения) посредством воздействия на коэффициенты её разложения в ряд или интеграл Фурье. ФФ может реализовываться как программно, так и аналоговым способом с помощью конфокальной системы двух линз (см. рис.)

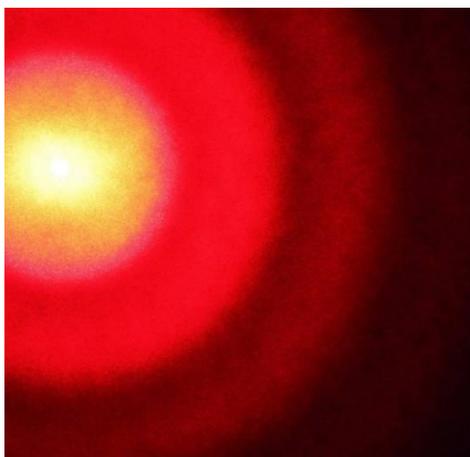
ФФ используется для решения следующих задач

- **визуализация и управление** фазой волны;
- **адаптивное подавление искажений**;
- **высокоразрешающая коррекция** волнового фронта;
- **формирование и стабилизация** оптических структур с заданными свойствами.

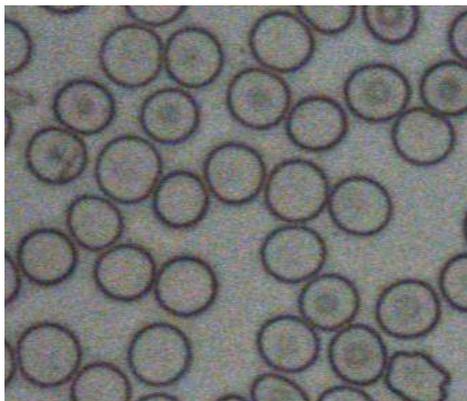
С помощью **теории бифуркаций** и **Фурье-фильтрации** построены новые типы самоорганизации светового поля: **вращающиеся волны с узлами** и **пульсирующие структуры** (см. рис.). Исследование управляемой ФФ – перспективное направление развития современной теории и методов **оптимального управления** и **нелинейного анализа**.



Исследование дифракционной картины для целей экспресс диагностики заболеваний крови



Дифракционная картина



Снимок эритроцитов под микроскопом

- Если посветить лазером на каплю крови на стекле, возникнет **дифракционная картина** – система светлых и темных колец, содержащая в себе **всю информацию о клетках крови**.
- Это информация о размерах и формах клеток, их химическом составе. Чтобы получить её на основе фотографии дифракции, нужны **современные методы обработки изображений**, которые мы разрабатываем в нашем проекте.
- Часть медицинской информации можно получить непосредственно из положения светлых и темных колец, их яркости и величины их изгибов. Но для полноценного анализа мы создаем программное обеспечение **решения интегральных уравнений**. Фото дифракции подается уравнениям в качестве входных данных, а **параметры клеток крови являются их решениями**.
- Совместно с **международным лазерным центром физфака** и кафедрой физиологии и общей патологии факультета фундаментальной медицины МГУ разрабатывается медицинский прибор для экспресс

Определение доли жестких эритроцитов с помощью интегрального уравнения свертки Меллина

Если поместить клетки крови в специальный поток жидкости, они будут вытягиваться. При ряде социально значимых заболеваний, таких например как **тропическая малярия**, часть клеток не вытягивается совсем. Это **больные жесткие клетки**, их количество и степень повреждения **определяется** на основе дифракционной картины.

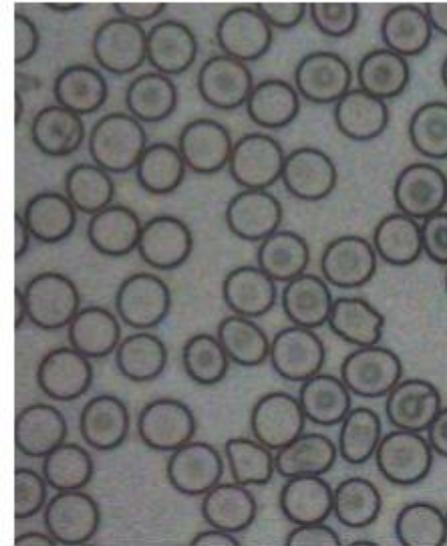
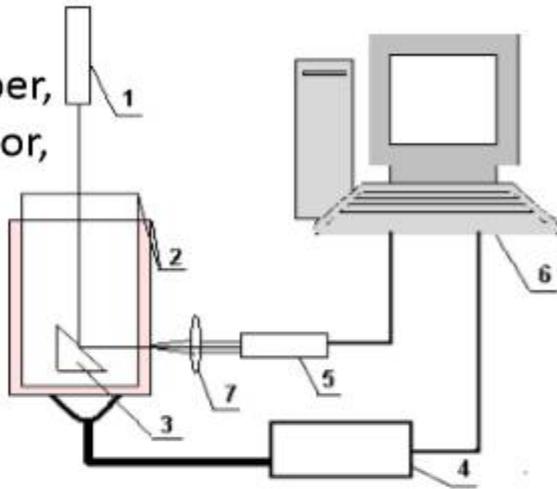


Решив **некорректное интегральное уравнение 2-D свертки Меллина**, можно найти распределение эритроцитов по деформируемости и определить долю жестких, недеформируемых клеток.

В ходе исследования получены **2 патента на изобретение**, выиграны **7 научных грантов**, опубликованы **более 18 научных статей**. Будущее широкое применение данной разработки в медицине позволит существенно **улучшить терапию более 40 миллионов людей** на Земле в год.

Решение задачи диагностики эритроцитов методом регуляризации А.Н.Тихонова

- 1 – He-Ne laser,
 2 - Couette chamber,
 3 - mirror, 4 – motor,
 5 – video-camera,
 6 – PC , 7- lens.



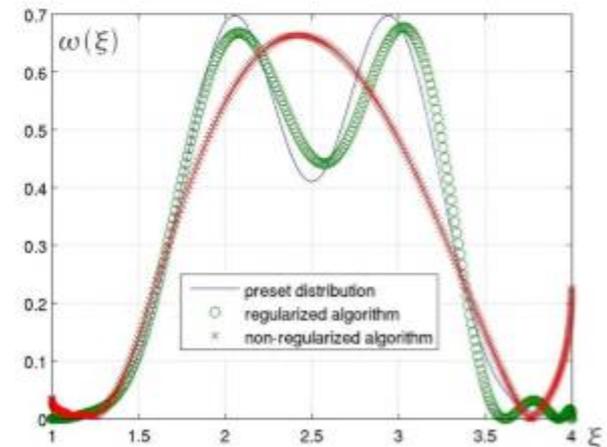
$$A\omega = \int_{\xi_1}^{\xi_2} I(\theta, \varphi, \xi) \omega(\xi) d\xi = \tilde{I}(\theta, \varphi)$$

$0 \leq \omega(\xi)$ – elongation distribution

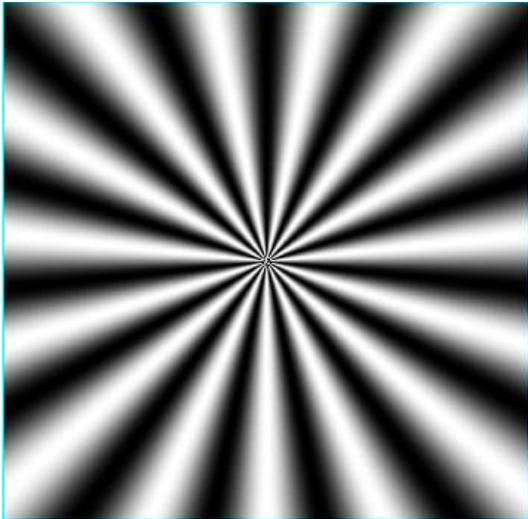
$\tilde{I}(\theta, \varphi)$ – diffraction pattern

$$\min_{\omega} \|A\omega - \tilde{I}\|_{L_2}^2 + \alpha \|\omega - \omega_0\|_{W^1_2}^2$$

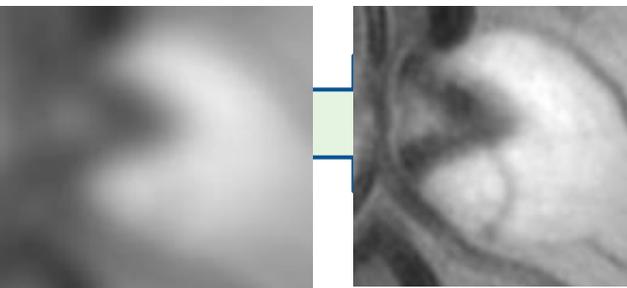
α is obtained via general discrepancy principle



Зрение как формирование изображения оптической системой глаза



- Каждый студент не раз посещал офтальмолога и проверял **ЗРЕНИЕ**. Однако простейший эксперимент можно провести не отходя от компьютера. Если на разном расстоянии от экрана в изображении слева **четко виден центр сходящихся спиц, то зрение в порядке.**
- Однако многие увидят, что изображение в центре **ИНВЕРТИРОВАЛОСЬ** (светлое стало темным и наоборот), причем чем дальше от экрана, тем крупнее область инверсии.
- Причина состоит в том, что **оптическая система глаза неидеальна** и луч света фокусируется хрусталиком перед или после слоя чувствительных рецепторов. Если в случае глаза человека проблема решается **подбором очков**, то в более общей ситуации исправления изображений, получаемых от различных оптических устройств, применяются **математические и компьютерные методы моделирования ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ** формирования изображений.

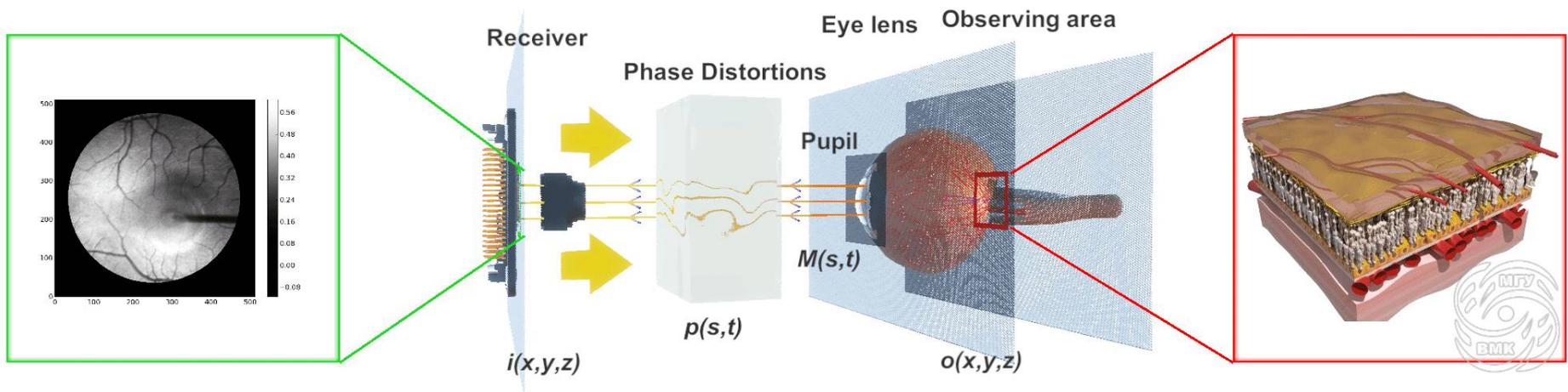


Пример восстановления фрагмента □
размытого изображения глазного дна

Далее приводится пример модели **3-D оптической системы для исследования глазного дна человека**, которая разрабатывается на кафедре

Математическая модель оптической системы формирования изображений 3-D полупрозрачных объектов

Для исследования 3-D структуры живого глаза используется адаптивная оптическая система с переменным фокусным расстоянием, способная регистрировать стек слоев 3-D объекта по глубине. Важный этап компьютерной постобработки - секционирование, т.е. отделение искомого изображения слоя от размытых изображений соседних сечений.



Задача секционирования описывается как обратная задача для интегрального уравнения 3-D свертки:

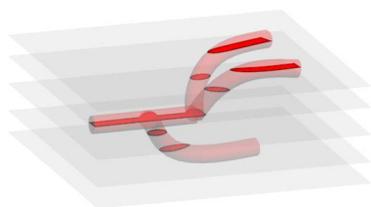
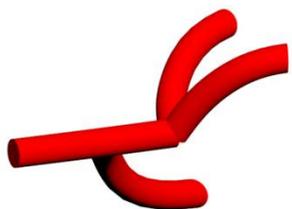
$$i(x, y, z) = o(x, y, z) * h(x, y, z), \quad i(x, y, z) - \text{наблюдаемый слой на глубине } z,$$

$o(x, y, z)$ - искомым z -слой, $h(x, y, z)$ - 3-D функция размытия точки.

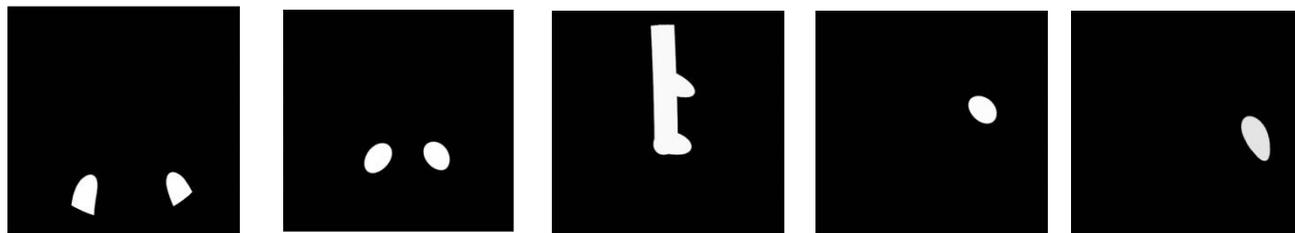
Решение уравнения 3-D свертки - некорректная ресурсоемкая задача. Для ее решения на кафедре разрабатываются устойчивые методы с распараллеливанием на GPU.

Пример 3-D секционирования сосудов глазного дна

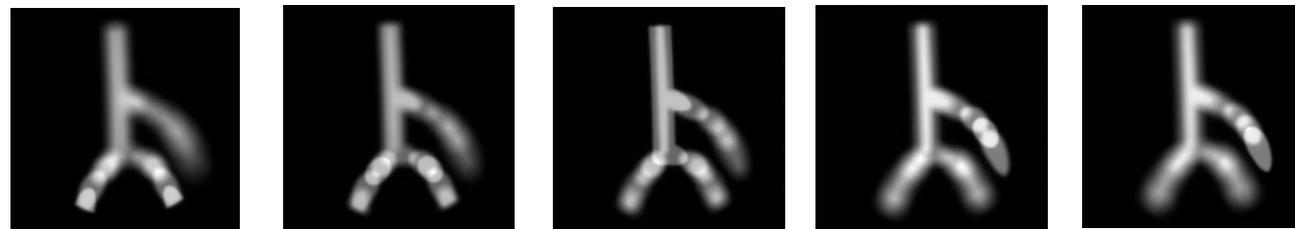
3-D объект



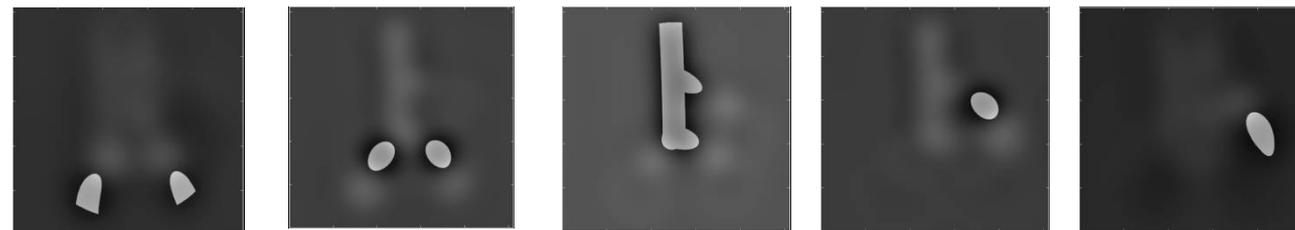
Искомые слои 3-D объекта



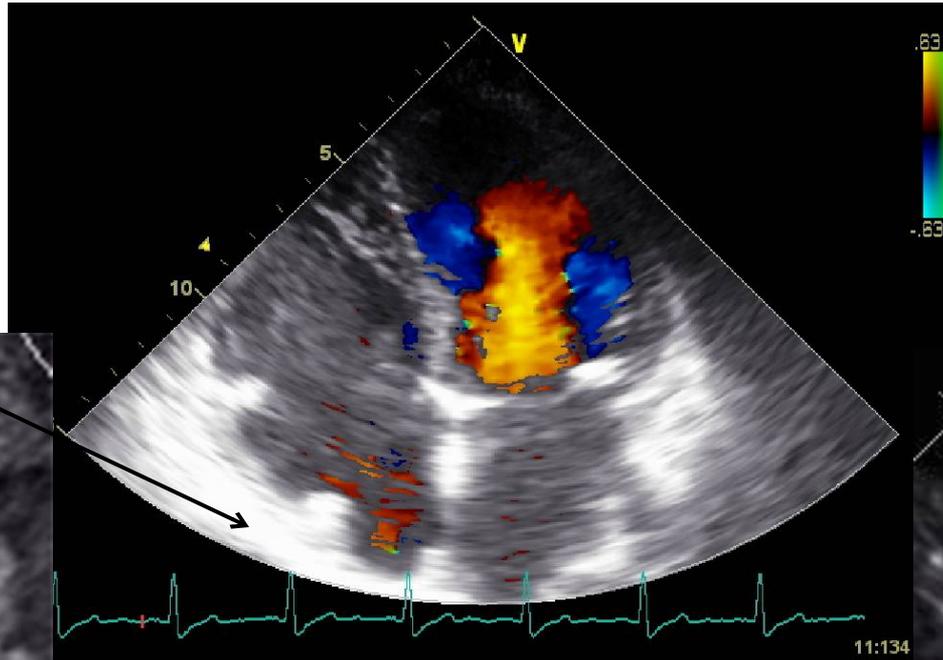
Наблюдаемые сечения с размытыми соседними слоями



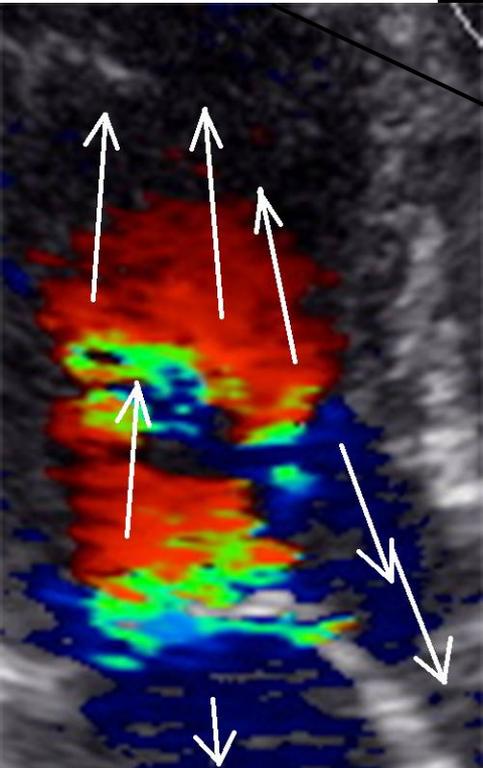
Решение задачи секционирования: восстановление искомым слоев, «очищенных» от размытых соседних слоев



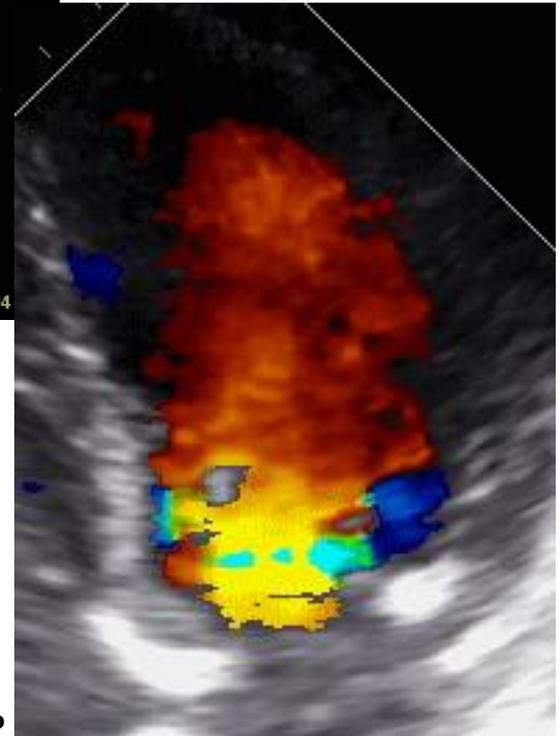
Планируется дополнительное представление спецсеминара «Обработка изображений и компьютерное моделирование» для студентов 2 курса.
e-mail для желающих получить информацию о встрече - askrylov@cs.msu.ru



Доплеровское исследование

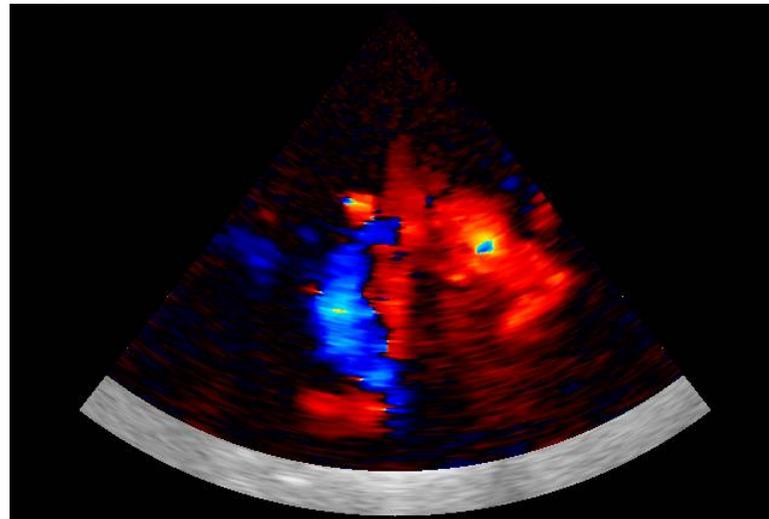
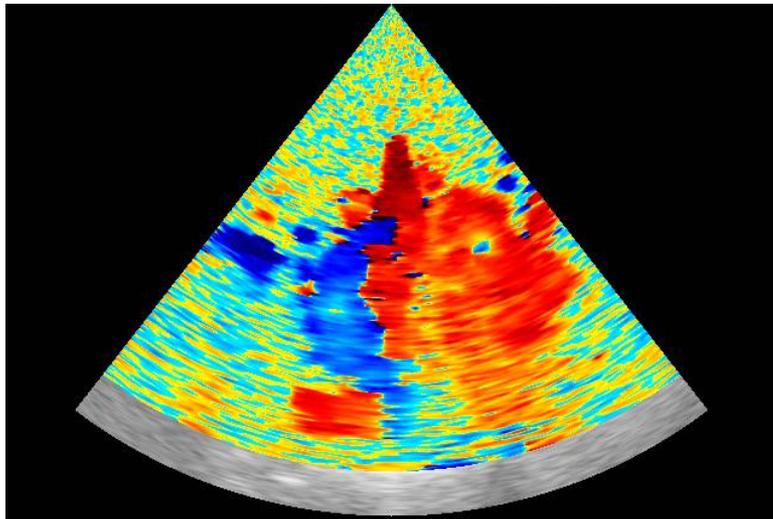


- Скорости закодированы разными оттенками красного и синего
- Красный цвет обозначает движение крови к датчику
- Синий цвет обозначает движение крови от датчика
- Чем ярче цвет, тем выше скорость



Методы повышения качества

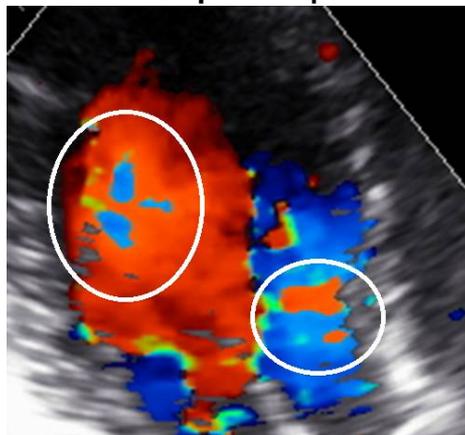
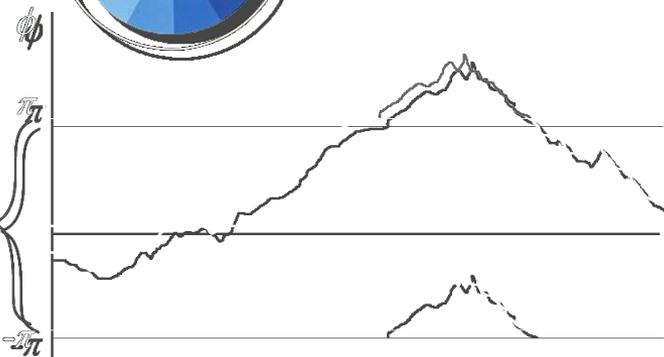
Фильтрация сырого сигнала доплеровского сканирования



Заворачивание фазы

Формально, мы имеем: $\phi = \psi + 2\pi k$

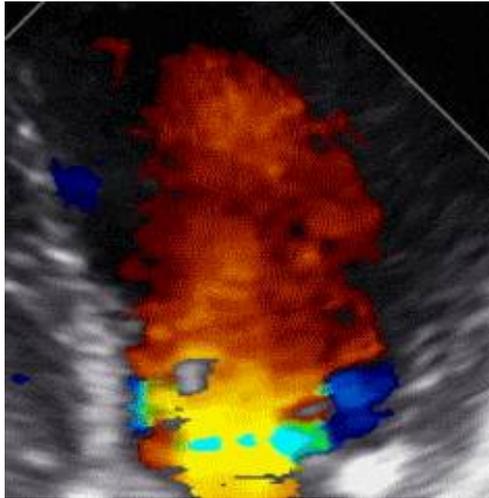
ϕ – истинная фаза скорости, ψ - полученная по модулю 2π фаза, k – некоторое целое число



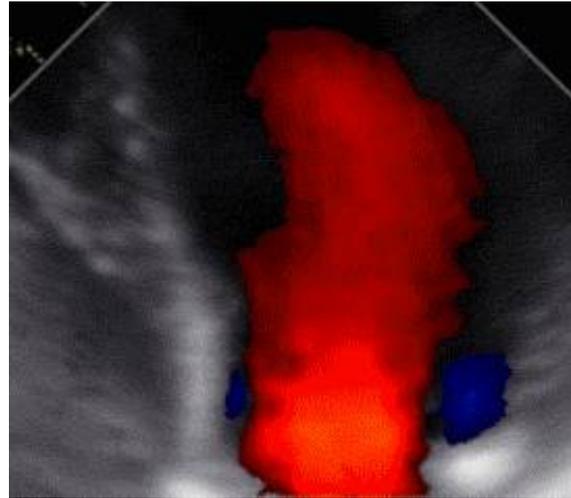
Методы, использованные при восстановлении фазы сигнала:

- регуляризирующий метод
- метод разреза графов

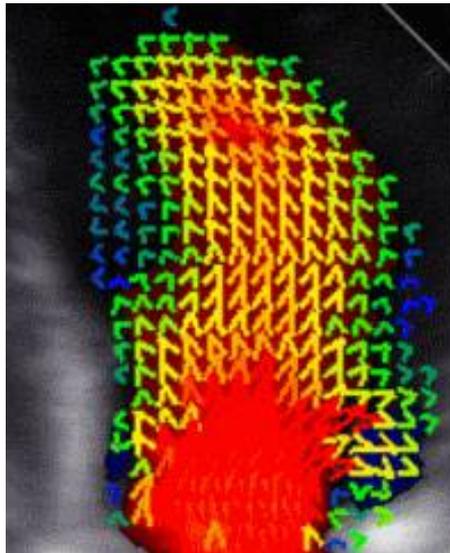
Методы повышения качества



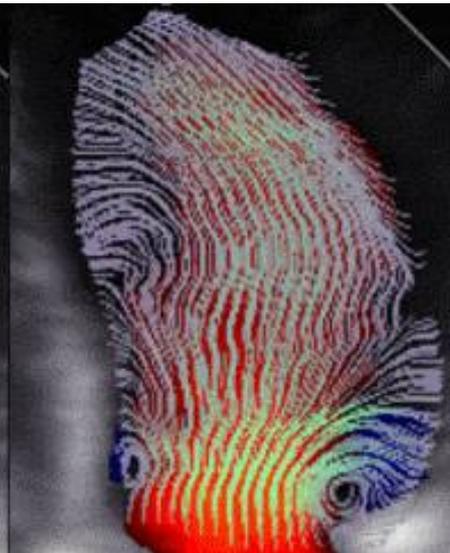
Исходные данные



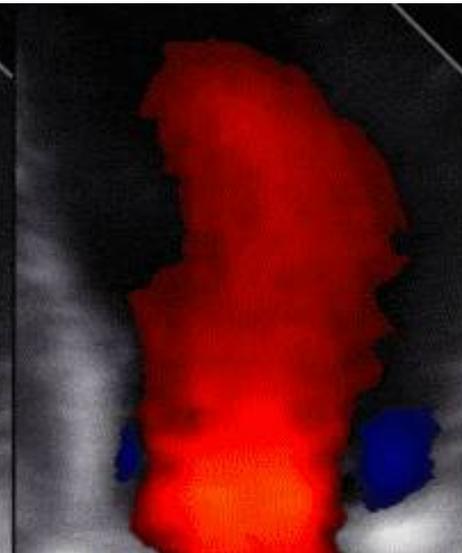
Результат



Вектора

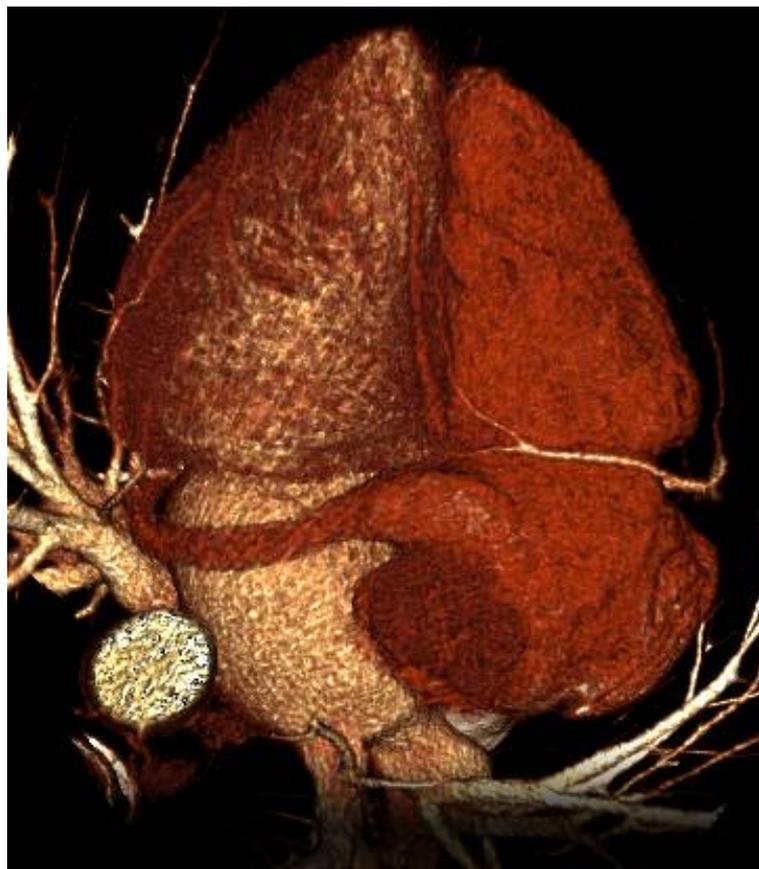


Потоки

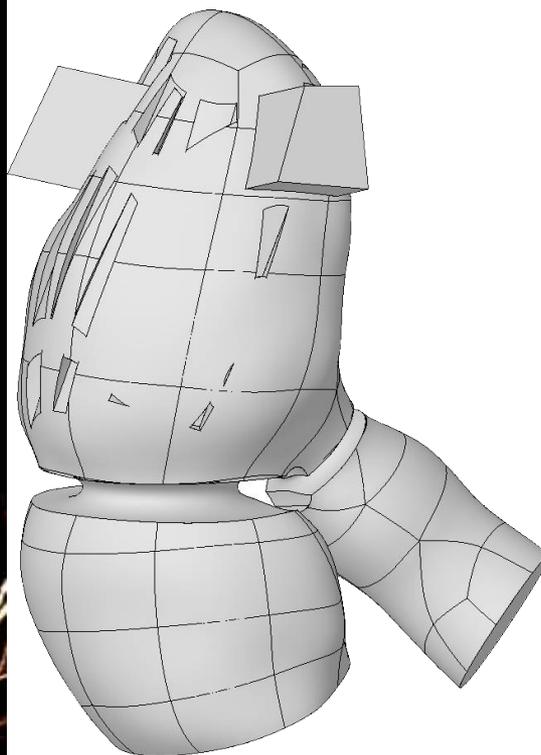


Частицы

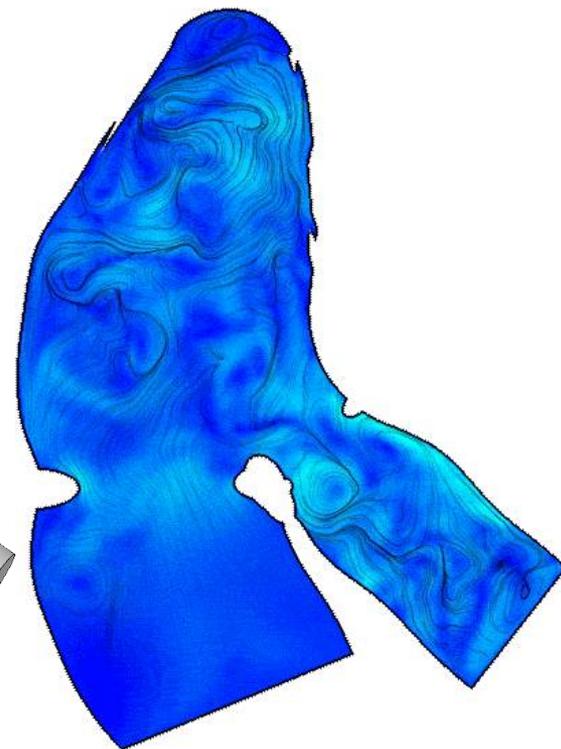
Построение модельной серии



Геометрия сердца
пациента, полученная КТ



3д реконструкция
левого желудочка

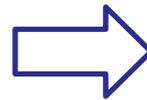
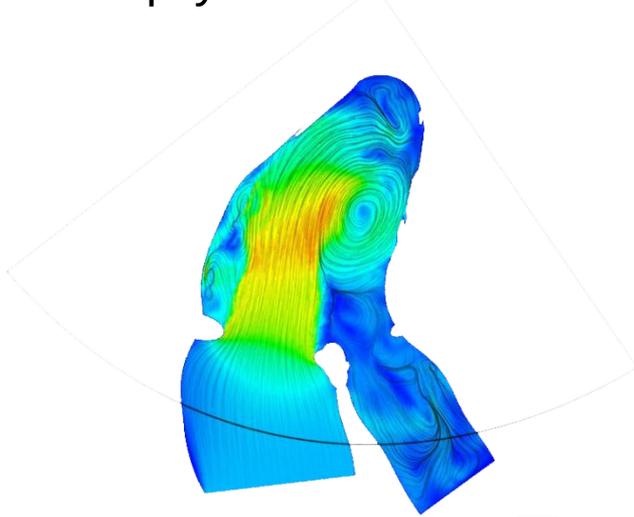


Моделирование потоков
крови в левом желудочке

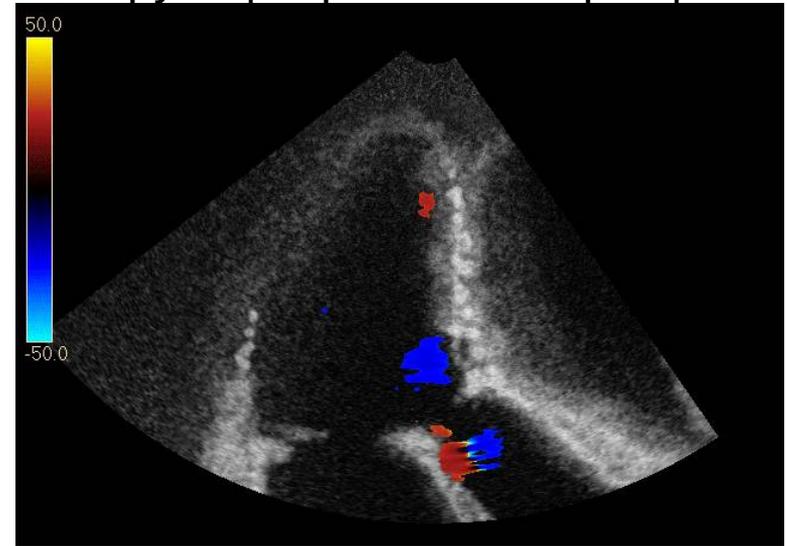
Построение модельной серии

Модельные срезы, имитирующие реальные артефакты

Виртуальная плоскость

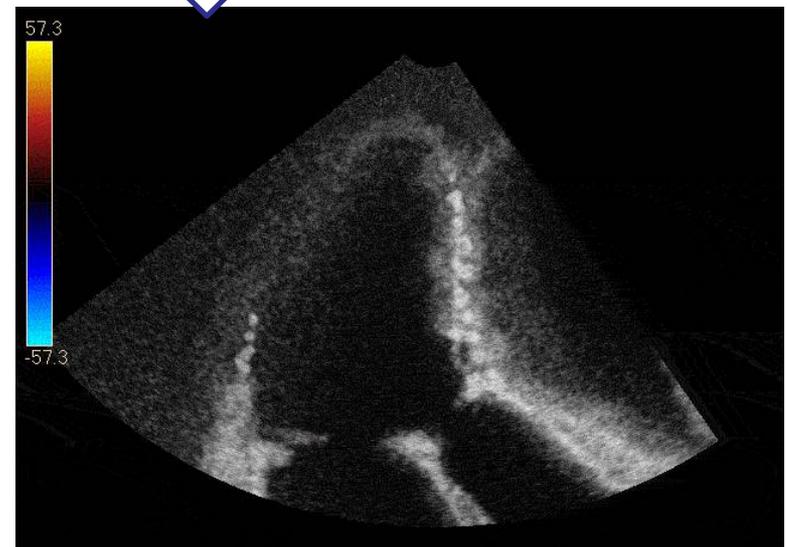


Модельные срезы, имитирующие реальные артефакты

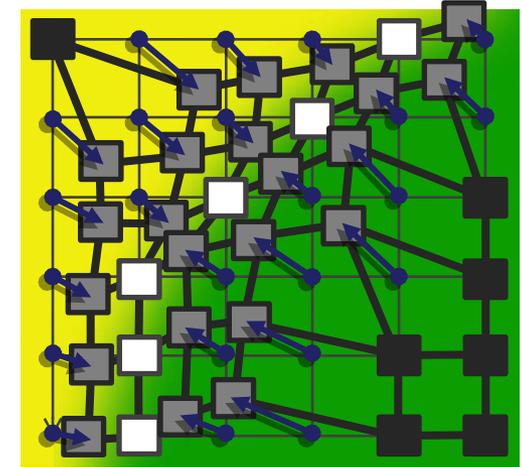
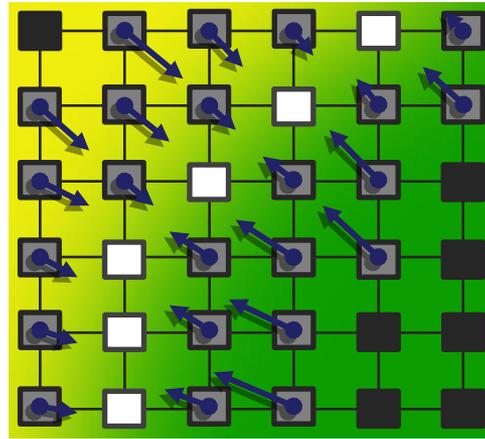
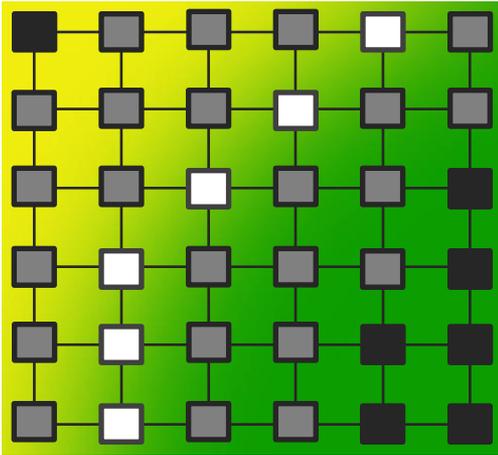


Результат метода

Срезы без искажений



Повышение резкости с помощью деформации пиксельной сетки



Исходное изображение

- пиксели контура
- сдвигаемые пиксели
- неподвижные пиксели

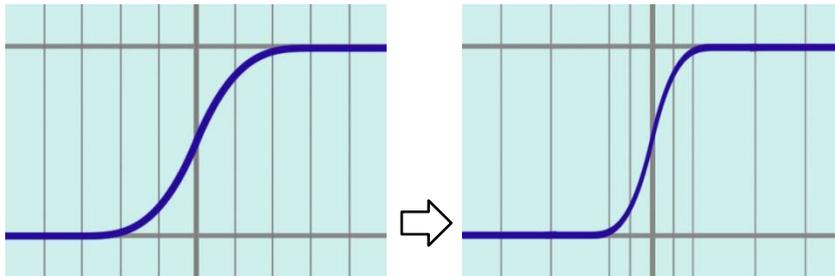
Вычисленные вектора
смещения пикселей

Результат

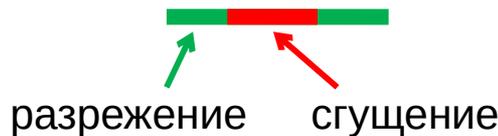
Вектора смещения находятся из
решения задачи Дирихле для
уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u = P(x, y) - 1, & (x, y) \in G \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial G \\ v(x, y) = \nabla u(x, y) \end{cases}$$

$P(x, y)$ – функция, определяющая
области сгущения и разрежения
пикселей



Профиль
размытого
контура



разрежение

сгущение

**Планируется дополнительное представление спецсеминара «Обработка изображений и компьютерное моделирование» для студентов 2 курса.
e-mail для желающих получить информацию о встрече - askrylov@cs.msu.ru**



Референсное изображение



Размытое и зашумлённое изображение



Результат алгоритма TVMM



TVMM + деформация пиксельной сетки

Алгоритм не изменяет значений пикселей, поэтому не возникают артефакты, свойственные обычным алгоритмам повышения резкости (повышение шума, ложное оконтуривание, алиасинг)

Алгоритм показывает наибольшую эффективность в комбинации с существующими алгоритмами повышения резкости, дополнительно увеличивая качество контуров



Method	No warping	With warping
Blurred and noisy images	22.84	23.25
Unsharp masking	23.00	23.36
TV regularization	23.30	23.40
Low-frequency TV reg. [15]	23.08	23.18
TVMM [2]	23.31	23.48
Lucy-Richardson [14]	23.83	23.99
Wiener [14]	24.00	24.17
MatLab blind deconvolution	23.79	23.96

Данные и вычисления



Вычислительный алгоритм

$$\frac{dN}{dt} = rP + gZ + \frac{(1-f)cZ^2H}{K+Z^2} - \frac{\alpha(L_d, M_d, P)PN}{j+N} - (N - N_d)\zeta_N(M_d)/M_d,$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\alpha(L_d, M_d, P)PN}{j+N} - \omega P - \frac{cP^2Z}{K+P^2} - P\zeta_P(M_d)/M_d,$$

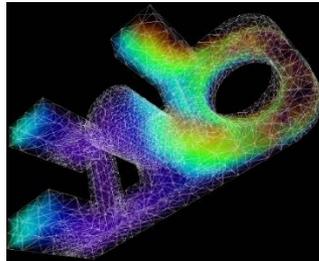
$$\frac{dZ}{dt} = \frac{fcP^2Z}{K+P^2} - gZ - Z\zeta_Z(M_d)/M_d,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\gamma}{Pr Re} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \Phi, \\ p &= \frac{1}{\gamma M^2} T. \end{aligned}$$

Математическая модель



Хранение и анализ данных



Визуализация

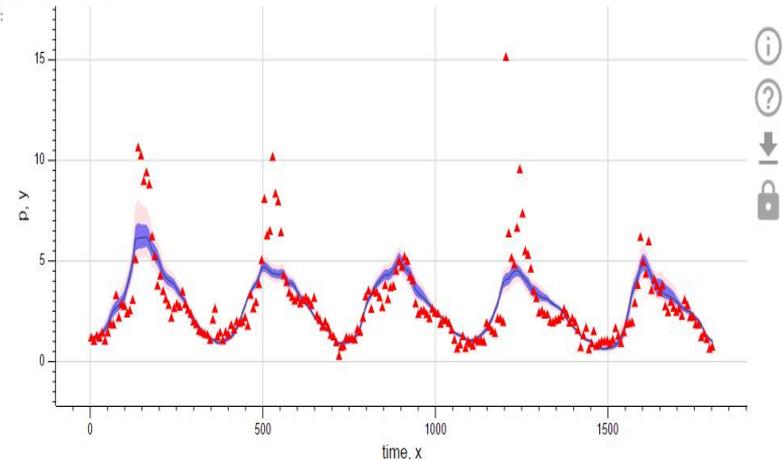
```
In [19]: let t = site |> col "t"
         let y_uncertain = npz |> quantiles "p"

In [20]: let model = Angara.Charting.Plot.line(LineX.Values t, LineY.UncertainValues y_uncertain, titles = Titles.line("time", "p"), displ

In [21]: let obs = Angara.Charting.Plot.markers(t, site |> col "p", color = MarkersColor.Value "red", shape = MarkersShape.Triangle, disp

In [22]: [ model; obs ] |> Chart.ofList

Out[22]:
```



При выполнении НИР студенты кафедры применяют современные технологии организации вычислительных экспериментов с применением параллельных технологий и методов машинного обучения, обеспечивающие воспроизводимость результатов.

Современные технологии программирования

Студентам кафедры читается 3 семестровых курса, посвященным современным технологиям и подходам разработки программного обеспечения. Темы курсов включают:

- ❑ Современные языки программирования
 - C# 7, F#, JavaScript, TypeScript
- ❑ Современные подходы к проектированию и разработке
 - Model-View-ViewModel
 - Test driven development
 - Concurrent & async programming
- ❑ Сервис-ориентированные приложения
- ❑ HTML5-приложения

Учебный план



Кафедральные курсы

- ✓ Интегральные уравнения
- ✓ Мат. методы обработки изображений
- ✓ Математические модели в естествознании
- ✓ Объектно-ориентированное программирование

Общие курсы

- ✓ Функциональный анализ
- ✓ Численные методы
- ✓ Уравнения математической физики
- ✓ Основы кибернетики
- ✓ Методы оптимизации
- ✓ Теория игр и исследование операций
- ✓ Базы данных
- ✓ Суперкомпьютеры и параллельная обработка данных
- ✓ Практикум на ЭВМ
- ✓ Физика волновых процессов

Потоковые курсы

- ✓ Обратные задачи
- ✓ Доп. главы уравнений в частных производных
- ✓ Численные методы математической физики

Магистерская программа кафедры:

“Компьютерные методы в математической физике, обратных задачах и обработке изображений”