МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Алешин Павел Сергеевич

# НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2008 г.

Работа выполнена на кафедре математического анализа и дифференциальных уравнений физико-математического факультета Орловского государственного университета.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Зарубин Александр Николаевич.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Солдатов Александр Павлович.

доктор физико-математических наук, доцент Псху Арсен Владимирович.

Ведущая организация: Самарский государственный университет.

Защита состоится "[illegible]" [illegible] 2008 г. в 15 час. [illegible] мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.43 в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, аудитория № 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ.

Автореферат разослан "____" ________________ 200 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор Е.В. Захаров

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.**

Многие задачи трансзвуковой газовой динамики, гидродинамики, теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, моделирования процессов излучения лазера, теории плазмы и другие важные проблемы естествознания моделируются при помощи уравнений смешанного типа. К этому классу уравнений принадлежит впервые рассматриваемое в диссертации уравнение смешанного типа с дробной производной, распределенным и сосредоточенным запаздыванием по обеим переменным, опережением и отражением вида

$$0 = \begin{cases} u_{xx}(x,y) - D_{0y}^{\alpha}u(x,t) + \beta_1 H(y-h)u(x-\tau, y-h) + \\ +\gamma_1 \int\limits_0^h R_1(\xi)u(x, y-\xi)d\xi + \theta_1 \int\limits_0^h R_2(\xi)u(x-\tau, y-\xi)d\xi + \\ +\delta_1 \int\limits_0^\tau dt \int\limits_0^h R_3(t,\xi)u(x-t, y-\xi)d\xi, \quad y>0; \\ u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) - \beta_2 H(x-\tau)u(x-\tau, y) - \\ -\gamma_2 H(|x|-\tau)u(x-\tau\operatorname{sgn}x, y) - \\ -\delta_2 H(-y-h)u(-x, y+h), \quad y<0. \end{cases} \tag{1}$$

В уравнении (1) $D_{0y}^{\alpha}u(x,t)$ – оператор дробного интегродифференцирования (в смысле Римана-Лиувилля), $0<\tau$, $h\equiv\mathrm{const}$, $\beta_i$, $\gamma_i$, $\theta_1$, $\delta_i \equiv \mathrm{const}$, $(i=1,2)$, $H(\xi)$ – функция Хевисайда, $R_i(t)$, $R_3(t,\xi)$ – ограниченные функции $(i=1,2)$, $u(x,y)$ – неизвестная функция.

Теория уравнений смешанного типа берет начало от фундаментальных исследований Ф. Трикоми. Наряду с трудами Ф. Трикоми, базу теории заложили работы С. Геллерстедта и Ф. И. Франкля , поставившие и изучившие краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. Дальнейшее развитие теории уравнений смешанного типа связано с именами К.И. Бабенко, И.Н. Векуа, А. В. Бицадзе. Их работы дали основополагающие результаты при решении задач трансзвуковой газовой динамики, гидродинамики, безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака.

В работах В.Ф. Волкодавова, Е.И. Моисеева, А.М. Нахушева, А.П. Солдатова, С.П. Пулькина, Л.С. Пулькиной, Т.Ш. Кальменова, В.И. Жегалова, О.А. Репина, К.Б. Сабитова, М.М. Смирнова, С.М. Пономарева и других математиков теория уравнений смешанного типа развивалась в различных направлениях.

Самостоятельный интерес представляют процессы, будущее развитие которых зависит не только от настоящего, но и существенно определяется всей предысторией развития. Математическое описание указанных процессов может быть осуществлено при помощи дифференциальных уравнений смешанного типа с отклонениями различных видов, называемыми также уравнениями с отклоняющимся аргументом или функционально-дифференциальными уравнениями, к которым относится рассматриваемое в диссертации уравнение (1).

Основополагающий вклад в развитие теории обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, внесли Н. В. Азбелев, Н. Н. Красовский, А. Д. Мышкис, С. Б. Норкин, Л. Е. Эльсгольц, Э. Пинни, R. Bellman, K. L. Cooke, J. K. Hale, K. Gopalsamy, Y. Kuang, J. Wu и многие другие математики.

Нелокальные начально-краевые задачи для дифференциально-разностных эллиптических, параболических и гиперболических уравнений исследовали А.А. Андреев, А.Б. Антоневич, И.М. Гуль, А. Б. Муравник, А.Б. Нерсесян, А.В. Разгулин, А. Л. Скубачевский.

Теория нелокальных задач для дифференциально-разностных уравнений смешанного типа впервые рассматривалась в работах А.Н. Зарубина.

В работах А. А. Андреева и его учеников исследовались краевые задачи для уравнений смешанного типа с инволютивным (карлемановским) отклонением.

В настоящее время внимание исследователей обращено к развитию методов решения краевых задач для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка, которые, являясь обобщением уравнений целочисленного порядка, помимо огромного теоретического значения имеют довольно широкое практическое применение.

В работах А.Н. Кочубея было найдено решение задачи Коши для уравнения диффузии дробного порядка с регуляризованной дробной производной.

Применение уравнений фрактальной диффузии к теории электролитов и в описании автоколебательных процессов исследовалось Я. Л. Кобелевым.

В монографии А.М. Нахушева были рассмотрены свойства операторов дробного интегро-дифференцирования и их применение к задачам математической биологии и физики, а также при математическом моделировании различных процессов и явлений в средах с фрактальной структурой. Им же в 1972 г. был впервые получен принцип экстремума для оператора дробного дифференцирования порядка $\alpha < 1$.

Теория применения преобразования Лапласа для решения уравнений с дробной производной была развита словацким математиком I. Podlubny. Им же была дана физическая интерпретация начальных условий для уравнений с дробной производной.

В монографии А.В. Псху рассмотрены краевые задачи для модельных дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка. Получены решения краевых задач для уравнений с частными производными ниже первого порядка. Для диффузионного и волнового уравнений дробного порядка найдены функции Грина основных краевых задач. Получены условия типа Тихонова для диффузионно-волнового уравнения дробного порядка и для уравнения с частными производными ниже первого порядка.

В работах С.Х. Геккиевой исследованы краевые задачи для уравнений смешанного типа с оператором дробной диффузии в одной из частей смешанной области, доказаны теоремы существования и единственности решений аналогов задачи Трикоми в канонических областях.

О. А. Репиным рассматривались задачи для уравнений смешанного типа с дробными производными и интегралами в начальных условиях.

Полученные результаты находят приложения в моделировании процессов автоматического регулирования, в механике, различных технологических процессах, теории вязкоупругости, биологии, медицине, химии, математической психологии и в других отраслях знаний.

Тем не менее, следует отметить, что, несмотря на достаточно большое количество работ, посвященных изучению как уравнений с отклоняющимся аргументом, так и уравнений с дробными производными, теория уравнений смешанного типа с дробными производными и отклоняющимся аргументом находится в начале своего развития.

Наиболее близкими в этом направлении являются работы А. Н. Зарубина и Е. А. Зарубина, где были впервые рассмотрены краевые задачи для уравнений смешанного типа с дробной производной и сосредоточенным запаздыванием.

Центральным моментом настоящей работы является рассмотрение ранее не исследовавшихся уравнений смешанного типа с дробной производной, распределенным и сосредоточенным отклонением аргументов опережающе-запаздывающего вида.

Отсутствие исследований по начально-краевым задачам для уравнений смешанного типа с дробной производной, распределенным и сосредоточенным запаздыванием по обоим аргументам, отклонением опережающе-запаздывающего типа и отражением, а также важные прикладные возможности этих уравнений при математическом моделировании процессов экономики, матемaтематической биологии, нелинейной оптики, подтверждает актуальность темы диссертации.

**Цель работы** – исследование разрешимости новых нелокальных начально-краевых задач для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа с дробной производной, распределенным и сосредоточенным запаздыванием, рассматриваемых в неограниченных областях, содержащих внутри себя линию изменения типа.

Для обоснования корректности впервые поставленных задач необходимо доказательство теорем существования и единственности классических решений, что определяет структуру работы и содержание глав.

**Общая методика исследования.** В работе используются методы теории интегральных уравнений Вольтерра, аппарат специальных функций, дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных, интегральные преобразования, метод вспомогательных функций (метод "$abc$"), метод Фурье разделения переменных.

**Научная новизна.** Все результаты, полученные в работе, являются новыми в актуальной проблеме теории дифференциально-разностных уравнений в частных производных – проблеме решения нелокальных задач для уравнений смешанного типа с дробной производной, распределенным и сосредоточенным запаздыванием, а также впервые рассмотренного в данной работе уравнения с отражением по пространственной и опережением по временной переменным.

**Основные результаты, выносимые на защиту:**

1. Решение начально-краевых задач для уравнений смешанного типа с дробной производной, распределенным и сосредоточенным запаздыванием в неограниченных областях. Доказательство теорем существования и единственности решения.

2. Доказательство теорем существования и единственности решения аналога задачи Геллерстедта для уравнения смешанного типа с дробной производной и распределенным запаздыванием по времени, с опережающе-запаздывающим отклонением пространственной переменной в неограниченной области.

3. Решение аналога задачи Геллерстедта для дробного дифференциально-разностного диффузионно-волнового уравнения с распределенным запаздыванием, опережающе-запаздывающими аргументами и отражением. Доказательство теорем существования и единственности.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в качестве основы для дальнейшей разработки теории нелокальных задач для дифференциально-разностных уравнений и систем дифференциально-разностных уравнений смешанного типа с дробной производной, распределенным и сосредоточенным запаздыванием в областях изменения типа уравнений.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения полученных результатов к исследованию различных физических и биологических смешанных процессов, в частности, в теории диффузии в пористых материалах, в нелинейной оптике, в изучении колебания кристаллической решетки, в теории популяций и др.

**Апробация работы**

Основные результаты и содержание работы докладывались и обсуждались на:

– ежегодных Всероссийских конференциях "Математическое моделирование и краевые задачи" (2006–2007гг.) СамГТУ, г. Самара.

– второй Всероссийской конференции "СамДифф" (2007г.) СГУ, г. Самара.

– научном семинаре кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений в 2003–2007 гг. Орел, ОГУ. (руководитель д. ф-м. н., профессор Зарубин А. Н.)

– Третьей международной конференции "Нелокальные задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики"(2006 г.), г. Нальчик.

– Двенадцатой международной конференции "Mathematical Modelling and Analysis" (2007 г.), Литва, Тракай.

– Международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения" (2007 г.) НГУ, г. Новосибирск.

По материалам диссертации опубликовано 10 научных статей и тезисов докладов [1]–[10].

**Содержание диссертации по главам.**

Диссертация состоит из введения, трех глав и библиографического списка.

В первой главе исследуются начально-краевые задачи для дифференциально-разностного уравнения (1) при $y > 0$ ($\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 1$, $\theta_1 = 0$,

$\delta_1 = 0)$

$$D^{\alpha}_{0y}u(x,t) - u_{xx}(x,y) = \int\limits_0^h R(\xi)u(x,y-\xi)d\xi. \qquad (2)$$

В § 1 в области $D = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D_k$,

$$D_k = \{(x,y) : 0 < x < \tau; kh \le y \le (k+1)h\},$$

где $(0 < h, \tau \equiv \mathrm{const})$, рассматривается

**Задача 1.1.** *Найти в области $D$ решение $u(x,y)$ уравнения (2) из класса $D^{\alpha-1}_{0y}u(x,t) \in C(\overline{D})$, $D^{\alpha}_{0y}u(x,t)$, $u_{xx}(x,y) \in C(D)$, удовлетворяющее начально-краевым условиям*

$$\lim_{y\to 0+} D^{\alpha-1}_{0y}u(x,t) = \omega(x), \quad 0 \le x \le \tau,$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \overline{D}_{(-1)},$$

$$u(0,y) = u(\tau,y) = 0, \quad 0 < y < +\infty,$$

*где $\omega(x)$ – заданная непрерывная, достаточно гладкая функция, причем $\omega(0) = \omega(\tau) = 0$.*

Доказаны

**Теорема 1.1.** *Однородная задача 1.1. имеет в области $\overline{D} = \overline{\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D_k}$ тривиальное решение.*

**Теорема 1.2.** *Пусть функция $R(y)$ – ограничена для всех $y \ge 0$, а функция $\omega(x)$ имеет непрерывную производную первого порядка и кусочно-непрерывную производную второго порядка; выполнены условия согласования $\omega(0) = \omega(\tau) = 0$.*

*Тогда существует регулярное решение задачи 1.1., определяемое равенством*

$$u(x,y) = \int\limits_0^{\tau} \omega(\xi)G(x,\xi,y)d\xi, \quad (x,y) \in D,$$

*где*

$$G(x,\xi,y) = \frac{2}{\tau}\sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n(y)\sin\lambda_n x \sin\lambda_n \xi \; -$$

*фундаментальное решение задачи 1.1.*, $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{\tau}$, *а* $\delta_n(y)$ *представимо выражением*

$$\delta_n(y) = g_n(y) + \int\limits_0^y g_n(y-t) f_n(t)dt,$$

*где*

$$f_n(y) = H(y-h) \int\limits_{y-h}^0 R(y-\xi)\delta_n(\xi)d\xi;$$

$H(\xi)$ – *функция Хевисайда;*

$$g_n(y) = I_{0n}(y) + \sum_{m=1}^{+\infty} \int\limits_0^y I_{mn}(t) R_m(y-t)dt;$$

*а*

$$\begin{cases} R_1(y-t) = R(y-t), \\ R_m(y-t) = \int\limits_t^y R_{m-1}(y-s)R_1(s-t)ds \quad (m = 2, 3, ...); \end{cases}$$

*причем*

$$I_{kn}(y) = y^{\alpha(k+1)-1} E^{k+1}_{\alpha,\alpha(k+1)}(-\lambda_n^2 y^\alpha) \quad (k = 0, 1, 2, ...);$$

$E^\rho_{\alpha,\beta}(t)$ – *обобщенная функция Миттаг-Леффлера.*

В § 2 рассматривается задача Коши

**Задача 1.2.** *Найти регулярное решение* $u(x,y)$ *уравнения (2) в области* $D = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D_k$,

$$D_k = \{(x,y) : |x| < +\infty,\ kh \le y \le (k+1)h\} \ (0 < h \equiv \text{const}),$$

*удовлетворяющее начальным условиям*

$$\lim_{y\to 0+} D^{\alpha-1}_{0y} u(x,t) = \omega(x), \quad |x| < +\infty,$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \overline{D}_{(-1)},$$

*где* $\omega(x)$ – *заданная непрерывная, достаточно гладкая функция, причем* $\omega(\pm\infty) = 0$.

Регулярным решением является класс задачи 1.1.

Доказана

**Теорема 1.3.** *Пусть функция* $\omega(x)$ *непрерывна, абсолютно интегрируема на* $(-\infty; +\infty)$ *и* $\omega(\pm\infty) = 0$; $R(y)$ – *ограничена.*

*Тогда задача 1.2. имеет единственное регулярное решение $u(x,y)$, стремящееся к нулю при $x^2+y^2 \to +\infty$ $(|x| < +\infty,\ y > 0)$.*

*Решение имеет вид*

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\xi) G(x,\xi,y) d\xi,$$

*где*

$$G(x,\xi,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x-\xi)} \delta(\lambda,y) d\lambda -$$

*фундаментальное решение задачи 1.2., а $\delta(\lambda,y)$ определяется равенством*

$$\delta(\lambda,y) = g(\lambda,y) + \int_0^y g(\lambda,y-\xi) f(\lambda,\xi) d\xi, \tag{3}$$

*когда*

$$f(\lambda,y) = H(y-h) \int_{y-h}^{0} R(y-\xi)\delta(\lambda,\xi) d\xi;$$

$$g(\lambda,y) = I_0(\lambda,y) + \sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^y I_m(\lambda,t) R_m(y-t) dt,$$

*а*

$$\begin{cases} R_1(y-t) = R(y-t), \\ R_m(y-t) = \int_t^y R_{m-1}(y-s) R_1(s-t) ds \quad (m = 2,3,...); \end{cases}$$

*причем*

$$I_k(\lambda,y) = y^{\alpha(k+1)-1} E^{k+1}_{\alpha,\alpha(k+1)}(-\lambda^2 y^\alpha) \quad (k = 0,1,2,...);$$

*$E^{\rho}_{\alpha,\beta}(t)$ – обобщенная функция типа Миттаг-Леффлера.*

В § 3 в области $D = \bigcup_{k=0}^{+\infty} D_k$, где

$$D_k = \{(x,y) :\ x > 0;\ kh \le y \le (k+1)h\}\ (0 < h \equiv \mathrm{const})$$

рассматривается

**Задача 1.3.** *Найти в области $D$ решение $u(x,y)$ уравнения (2) из класса функций $D_{0y}^{\alpha-1}u(x,t) \in C(\overline{D})$, $D_{0y}^{\alpha}u(x,t)$, $u_{xx}(x,y) \in C(D)$, удовлетворяющее граничному*

$$u(0,y)=0, \quad y>0$$

*и начальным условиям*

$$\lim_{y\to 0+} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,t)=\omega(x), \quad x\geq 0,$$

$$u(x,y)=0, \quad (x,y)\in \overline{D}_{(-1)},$$

*где $\omega(x)$ – заданная непрерывная, достаточно гладкая функция, причем $\omega(0)=\omega(+\infty)=0$.*

Решение задачи 1.3 найдено в форме

$$u(x,y)=\int\limits_0^{+\infty}\omega(\xi)G_1(x,\xi,y)d\xi,$$

где

$$G_1(x,\xi,y)=G(x,\xi,y)-G(x,-\xi,y),$$

а

$$G(x,\xi,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda(x-\xi)}\delta(\lambda,y)d\lambda-$$

фундаментальное решение задачи 1.2. из §2, в котором $\delta(\lambda,y)$ определяется равенством (3).

Глава II посвящена задачам для дифференциально-разностных уравнений смешанного типа с дробной производной, распределенным и сосредоточенным запаздыванием.

В §4 для уравнения (1) ($\beta_1=0$, $\gamma_1=1$, $\theta_1=0$, $\delta_1=0$, $\beta_2=0$, $\gamma_2=0$, $\delta_2=0$ )

$$0=\begin{cases} u_{xx}(x,y)-D_{0y}^{\alpha}u(x,t)+\int\limits_0^h R(\xi)u(x,y-\xi)d\xi, & y>0,\\ u_{xx}(x,y)-u_{yy}(x,y), & y<0,\end{cases} \tag{4}$$

в области $D=D^+\bigcup D^-\bigcup J$, где $D^+=\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}D_k^+$,
$D_k^+=\{(x,y):0<x<\tau,\ kh\leq y\leq (k+1)h\}$ $(0<h,\tau\equiv\mathrm{const})$;

$J=\{(x,y):0<x<\tau,\ y=0\}$, $D^-$ – область, ограниченная характеристиками $x+y=0,\ x-y=\tau\ (y<0)$ и отрезком $[0,\tau]$ прямой $y=0$, исследуется

**Задача 2.1.** *Найти решение $u(x,y)$ уравнения (4) в области $D$, удовлетворяющее граничным и начальному условиям*

$$u(0,y)=u(\tau,y)=0,\quad 0<y<+\infty,$$

$$u(x,-x)=\psi(x),\quad 0\le x\le\tau/2;$$

$$u(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in D^+_{(-1)}\setminus D^-,\\ u(x,y), & (x,y)\in D^-;\end{cases}$$

*условиям сопряжения*

$$\lim_{y\to0+}D^{\alpha-1}_{0y}u(x,t)=\lim_{y\to0-}u(x,y)=\omega(x),\quad 0\le x\le\tau,$$

$$\lim_{y\to0+}y^{1-\alpha}D^{\alpha}_{0y}u(x,t)=\lim_{y\to0-}u_y(x,y)=\nu(x),\quad 0<x<\tau,$$

*где $\psi(x)$ – заданная, достаточно гладкая функция, причем $\psi(0)=0$.*

Доказана

**Теорема 2.1.** *Пусть функция $\psi(x)\in C[0,\tau]\bigcap C^2(0,\tau)$, $R(y)$ – ограничена и $\psi(0)=0$. Тогда задача 2.1. имеет единственное решение, такое, что $D^{\alpha-1}_{0y}u(x,t)\in C(\overline{D}^+)$, $y^{1-\alpha}D^{\alpha}_{0y}u(x,t)\in C(D^+\bigcup J)$, $u(x,y)\in C(\overline{D}^-)$,$u_{xx}(x,y)\in C(D^+\bigcup D^-)$, $u_{yy}(x,y)\in C(D^-)$.*

Вопрос существования решения задачи 2.1. сводится к разрешимости уравнения

$$\omega''(x)-\Gamma(\alpha)\omega'(x)=-\Gamma(\alpha)\psi'(x/2),\quad 0<x<\tau,$$

при условии, что

$$\omega(0)=\omega(\tau)=0.$$

В § 5 в области $D=D^+\bigcup D^-\bigcup J$, где

$$D^+=\bigcup_{l=0}^{+\infty}D^+_l,\ D^+_l=\{(x,y):|x|<+\infty,\ lh\le y\le(l+1)h\};$$

$$D^-=\bigcup_{k=0}^{+\infty}D^-_k,\ D^-_k=\{(x,y):k\tau-y\le x\le(k+1)\tau+y,\ -\tau/2<y<0\};$$

$J=\{(x,y):0<x<+\infty,\ y=0\}$, $(0<h,\tau\equiv\mathrm{const})$, рассматривается уравнение (1) ($\beta_1=0,\ \gamma_1=1,\ \theta_1=0,\ \delta_1=0,\ \beta_2=1,\ \gamma_2=0,\ \delta_2=0$ )

$$0=\begin{cases}u_{xx}(x,y)-D^{\alpha}_{0y}u(x,t)+\displaystyle\int_0^h R(\xi)u(x,y-\xi)d\xi,\ y>0,\\ u_{xx}(x,y)-u_{yy}(x,y)-H(x-\tau)u(x-\tau,y),\ y<0,\end{cases}\tag{5}$$

для которого ставится

**Задача 2.2.** *Найти регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (5) в области $D$, удовлетворяющее начальным и граничным условиям*

$$\lim_{y\to 0+} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,t)=f(x), \quad x\le 0,$$

$$u(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\in D^+_{(-1)}\setminus D^-, \\ u(x,y), & (x,y)\in D^-, \end{cases}$$

$$u(x,k\tau-x)=\psi_k(x), \quad k\tau\le x\le (2k+1)\tau/2;$$

*условиям сопряжения*

$$\lim_{y\to 0+} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,t)=\lim_{y\to 0-} u(x,y)=\omega(x),\ x\in \overline{J},$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}D_{0y}^{\alpha}u(x,t)=\lim_{y\to 0-} u_y(x,y)=\nu(x),\ x\in J,$$

*где $f(x)$, $\psi_k(x)$ – заданные непрерывные, достаточно гладкие функции.*

Здесь и далее под регулярным решением понимается класс, указанный в теореме 2.1.

Доказана

**Теорема 2.2.** *Пусть функция $f(x)\in C^2(-\infty,0)$ и абсолютно интегрируема на $(-\infty,0)$ вместе со своими производными; $R(y)$ – ограничена; $\psi_k(x)\in C\left[k\tau,(2k+1)\tau/2\right]\bigcap C^2\left(k\tau,(2k+1)\tau/2\right)$ и $f(-\infty)=0$, $f(0)=\psi_0(0)$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\max\limits_{x\in[k\tau,(2k+1)\tau/2]}|\psi_k(x)|=0$.*

*Тогда существует единственное регулярное решение задачи 2.2. в области $D$.*

В §6 для уравнения

$$0=\begin{cases} u_{xx}(x,y)-D_{0y}^{\alpha}u(x,t)+\displaystyle\int_0^h R(\xi)u(x,y-\xi)d\xi, y>0, \\ u_{xx}(x,y)-u_{yy}(x,y)-H(x-\tau)u(x-\tau,y), y<0, \end{cases} \tag{6}$$

в области $D=D^+\bigcup D^-\bigcup J$, где

$$D^+=\bigcup_{l=0}^{+\infty} D_l^+, D_l^+=\left\{(x,y): x>0, \quad lh\le y\le (l+1)h\right\};$$

$$D^-=\bigcup_{k=0}^{+\infty} D_k^-, D_k^-=\left\{(x,y): k\tau-y\le x\le (k+1)\tau+y, \quad -\tau/2<y<0\right\};$$

$$J = \{(x,y) : x > 0, y = 0\}$$

$(0 < h, \tau \equiv \text{const})$, поставлена

**Задача 2.3.** *Найти решение $u(x,y)$ уравнения (6) в области $D$ удовлетворяющее граничным и начальному условиям*

$$u(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in D^{+}_{(-1)} \setminus D^{-}, \\ u(x,y), & (x,y) \in D^{-}, \end{cases}$$

$$u(0,y) = 0, \quad y > 0;$$

$$u(x, k\tau - x) = \psi_k(x), \quad k\tau \le x \le 2(k+1)\tau/2;$$

*условиям сопряжения*

$$\lim_{y\to 0+} D^{\alpha-1}_{0y} u(x,t) = \lim_{y\to 0-} u(x,y) = \omega(x), \quad x \in \overline{J},$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha} D^{\alpha}_{0y} u(x,t) = \lim_{y\to 0-} u_y(x,y) = \nu(x), \quad x \in J,$$

*где $\psi_k(x)$ заданные непрерывные, достаточно гладкие функции, причем*

$$\psi_0(0) = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} \max_{x\in[k\tau,(2k+1)\tau/2]} |\psi_k(x)| = 0.$$

Доказана

**Теорема 2.3.** *Пусть $\psi_k(x) \in C[k\tau; (2k+1)\tau/2] \bigcap C^2(k\tau; (2k+1)\tau/2)$ функция $R(y)$ – ограничена и $\psi_0(0) = 0$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \max\limits_{x\in[k\tau,(2k+1)\tau/2]} |\psi_k(x)| = 0$.*

*Тогда задача 2.3. имеет единственное решение такое, что $D^{\alpha-1}_{0y} u(x,t) \in C(\overline{D}^{+})$, $y^{1-\alpha} D^{\alpha}_{0y} u(x,t) \in C(D^{+} \bigcup J)$, $u(x,y) \in C(\overline{D}^{-})$, $u_{xx}(x,y) \in C(D^{+} \bigcup D^{-})$, $u_{yy}(x,y) \in C(D^{-})$.*

В главе III исследуются аналоги задач Геллерстедта для дифференциально-разностных уравнений смешанного типа с дробной производной по времени, распределенным и сосредоточенным запаздыванием, отклонением опережающе-запаздывающего типа и отражением.

В §7, в области $D = D^{+} \bigcup D^{-} \bigcup J$, где $D^{+} = \bigcup\limits_{l=0}^{+\infty} D^{+}_{l}$,

$$D^{+}_{l} = \{(x,y) : |x| < +\infty, lh \le y \le (l+1)h\};$$

$$D^{-} = D^{-}_{1} \bigcup D^{-}_{2}, \quad D^{-}_{1} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} D^{-}_{1k}, \quad D^{-}_{2} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} D^{-}_{2k},$$

$$D_{1k}^{-} = \{(x,y) : k\tau - y \le x \le (k+1)\tau + y, -\tau/2 < y < 0\},$$

$$D_{2k}^{-} = \{(x,y) : -(k+1)\tau - y \le x \le -k\tau + y, -\tau/2 < y < 0\},$$

$$J = \{(x,y) : |x| < +\infty, y = 0\},$$

$(0 < h, \tau \equiv \mathrm{const})$, рассматривается уравнение смешанного типа с дробной производной, распределенным и сосредоточенным запаздыванием при $y > 0$ и отклонением опережающе-запаздывающего типа при $y < 0$ (1) ($\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\theta_1 = 1$, $\delta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ , $\gamma_2 = 1$, $\delta_2 = 0$ ).

$$0 = \begin{cases} u_{xx}(x,y) - D_{0y}^{\alpha}u(x,t) + \int\limits_0^h R(\xi)u(x-\tau, y-\xi)d\xi, y > 0, \\ u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) - H(|x|-\tau)u(x-\tau sgnx, y), y < 0, \end{cases} \tag{7}$$

для которого поставлена

**Задача 3.1.** *Найти регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (7) в области $D$, удовлетворяющее начальному и граничным условиям*

$$u(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in D_{(-1)}^{+} \setminus D^{-}, \\ u(x,y), & (x,y) \in D^{-}; \end{cases}$$

$$u(x, k\tau - x) = \psi_{1k}(x), \quad k\tau \le x \le (2k+1)\tau/2 \quad (k = 0,1,2,..);$$

$$u(x, x + k\tau) = \psi_{2k}(x), \quad -(2k+1)\tau/2 \le x \le -k\tau \quad (k = 0,1,2,..);$$

*условиям сопряжения*

$$\lim_{y\to 0+} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,t) = \lim_{y\to 0-} u(x,y) = \omega(x), \ x \in \overline{J},$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}D_{0y}^{\alpha}u(x,t) = \lim_{y\to 0-} u_y(x,y) = \nu(x), \ x \in J,$$

*где $\psi_{ik}(x)$ $(i = 1,2; k = 0,1,2...)$ – заданные непрерывные, достаточно гладкие функции $\psi_{10}(0) = \psi_{20}(0)$.*

Доказана

**Теорема 3.1.** *Пусть $R(y)$ – ограниченая функция; $\psi_{1k}(x) \in \in C\,[k\tau, (2k+1)\tau/2] \bigcap C^2(k\tau, (2k+1)\tau/2)$, $\psi_{2k}(x) \in C\,[-(2k+1)\tau/2, -k\tau] \bigcap \bigcap C^2\,(-(2k+1)\tau/2, -k\tau)$, $(k = 0,1,2,..)$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \max\limits_{x\in[k\tau,(2k+1)\tau/2]} |\psi_{1k}(x)| = 0$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \max\limits_{x\in[-(2k+1)\tau/2,-k\tau]} |\psi_{2k}(x)| = 0$ и $\psi_{20}(0) = \psi_{10}(0)$.*

*Тогда существует единственное регулярное решение задачи 3.1. в области $D$.*

В §8 в области $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup J$, где $D^+ = \bigcup\limits_{l=0}^{+\infty} D_l^+$,

$$D_l^+ = \{(x,y) : |x| < +\infty,\ lh \leq y \leq (l+1)h\}\,;\ D^- = D_1^- \bigcup D_2^-,$$

$$D_1^- = \{(x,y) : x > 0,\ y > -x\}\,,\ D_2^- = \{(x,y) : x < 0,\ y > x\}\,,$$

$J = \{(x,y) : |x| < +\infty, y = 0\}$, $(0 < h, \tau \equiv \text{const})$ для уравнения смешанного типа с дробной производной, распределенным и сосредоточенным запаздыванием по обеим переменным, опережением и отражением (1) ($\beta_1 = 1, \gamma_1 = 0, \theta_1 = 0,\ \delta_1 = 1,\ \beta_2 = 0\ ,\ \gamma_2 = 0,\ \delta_2 = 1$)

$$0 = \begin{cases} u_{xx}(x,y) - D_{0y}^{\alpha} u(x,t) + H(y-h)u(x-\tau, y-h) + \\ + \int\limits_0^{\tau} dt \int\limits_0^{h} R(t,\xi) u(x-t, y-\xi) d\xi,\ y > 0; \\ u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) - H(-y-h)u(-x, y+h),\ y < 0 \end{cases} \tag{8}$$

поставлена

**Задача 3.4.** *Найти регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (8) в области $D$, удовлетворяющее начальному и граничным условиям*

$$u(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in D_{(-1)}^+ \setminus D^-, \\ u(x,y), & (x,y) \in D^-, \end{cases}$$

$$u(x,-x) = \psi_1(x), \quad x \geq 0,$$

$$u(x,x) = \psi_2(x), \quad x \leq 0;$$

*условиям сопряжения*

$$\lim_{y \to 0+} D_{0y}^{\alpha-1} u(x,t) = \lim_{y \to 0-} u(x,y) = \omega(x),\ x \in \overline{J},$$

$$\lim_{y \to 0+} y^{1-\alpha} D_{0y}^{\alpha} u(x,t) = \lim_{y \to 0-} u_y(x,y) = \nu(x),\ x \in J,$$

*где $\psi_i(x)$ $(i = 1,2)$ – заданные непрерывные, достаточно гладкие функции.*

Доказана

**Теорема 3.2.** *Пусть $R(x,y)$ – ограниченая функция; $\psi_i(x) \in C\{(-1)^{i+1}x \geq 0\} \bigcap C^2\{(-1)^{i+1}x > 0\}$ $(i = 1,2)$ и $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, $\psi_i((-1)^{i+1}\infty) = 0$ $(i = 1,2)$.*

*Тогда существует единственное регулярное решение задачи 3.4. в области $D$.*

Пользуясь случаем автор выражает глубокую благодарность и признательность научному руководителю – Александру Николаевичу Зарубину за постановку задач и постоянное внимание к работе.

## Работы автора по теме диссертации:

1. *Алешин П. С., Зарубин А. Н.* Краевая задача для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа с дробной производной // Вестник науки.– Орел: ОГУ, В. 3, 2004. – с.16–19.

2. *Алешин П. С.* О единственности решения краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа с дробной производной и распределенным запаздыванием // Вестник науки.– Орел: ОГУ, В. 4, 2004. – с.15–18.

3. *Алешин П. С.* Задача Коши для нелокального, дифферециально-разностного уравнения с дробной производной и распределенным запаздыванием // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Материалы Третьей международной конференции. Нальчик. 2006. С. 24–25.

4. *Алешин П. С., Зарубин А. Н.* Начально-краевая задача для уравнения фрактальной диффузии с распределенным запаздыванием // Материалы конференции "СамДифф". Самара. 2007. С. 5–8

5. *Алешин П. С.* О единственности решения задачи Коши для дифферециально-разностного уравнения дробной диффузии с распределенным и сосредоточенным запаздыванием // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием. – Самара: СамГТУ, 2007. – С. 19-22.

6. *Алешин П. С.* Начально-краевая задача для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа с дробной производной по пространственной координате// Международная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения". Новосибирск, НГУ. 2007. С. 55–56.

7. *Алешин П. С.* Начально-краевая задача для нелокального, дифферециально-разностного уравнения с дробной производной // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Третьей Всероссийской научной конференции. – Самара: СамГТУ, Ч.3. 2006. – С. 19-22.

8. *Алешин П. С.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с дробной производной, распределенным и сосредоточенным запаздыванием // Международная конференция, посвященная памяти И. Г. Петровского: Тезисы докладов. М.:Изд-во МГУ, 2007. – С. 15.

9. *Alyoshin P.* A Trikomi Problem for a Mixed Type Equation with Fractional Derivetive and Distributed Lag // Mathematical Modelling and Analysis. Abstracts of the 12th international Conference MMA2007. Trakai. 2007 P. 18.

10. *Алешин П. С., Зарубин А. Н.* Начально-краевая задача для дифференциально-разностного уравнения диффузии с дробной производной и рапределенным запаздыванием// Дифференциальные уравнения. Т.43, 10, 2007. – С. 1363-1368.