МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
Кафедра общей математики

На правах рукописи

Никитин Алексей Антонович

ТРЕТЬЕ КРАЕВОЕ УСЛОВИЕ В ЗАДАЧАХ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена на кафедре общей математики
факультета вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Научный руководитель:	академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор Ильин Владимир Александрович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Васильев Фёдор Павлович
	доктор физико-математических наук, профессор Ишмухаметов Альберт Зайнутдинович
Ведущая организация:	Институт програмных систем РАН, г. Переславль-Залесский

Защита диссертации состоится "   "   2008 г. в
на заседании Диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, второй учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ.

Автореферат диссертации разослан "   " марта 2008 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор   Е. В. Захаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Главным предметом изучения в настоящей диссертационной работе является задача граничного управления для волнового уравнения с одной пространственной переменной

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) является математической моделью большого числа волновых процессов, встречающихся в самых разных физических явлениях, таких как: механические колебания в упругих струнах и кристаллах кварца, колебания в радиотехнических устройствах, перемещение сечений каната в судовых спускоподъемных операциях и др. В приложениях возникают задачи, когда желательно генерировать колебания заданных частот, или же наоборот, переводить изучаемую систему в состояние полного покоя. В связи с ними большую актуальность приобретают задачи о граничном управлении процессом колебаний, которое описывается волновым уравнением.

Исследованию решений задач граничного управления и их оптимизации посвящены работы многих математиков. Основной целью является изучение условий, при которых процесс колебаний струны под воздействием некоторого граничного управления может быть переведен из одного состояния, характеризуемого начальным смещением и начальной скоростью точек струны, в наперед заданное финальное состояние. В математическом плане такие задачи граничного управления формулируются в терминах краевых задач для волнового уравнения (1) и более общих гиперболических уравнений.

Во многих работах доказывается существование определенного промежутка времени, который, следуя литературе, мы будем называть *критическим* ($T_{\text{крит}}$). Было показано, что если промежуток времени, за который производится управление, не превосходит $T_{\text{крит}}$, то задача граничного управления не имеет решения для произвольных начальных и финальных условий. При промежутках времени строго больших $T_{\text{крит}}$, существует бесконечно много решений задачи граничного управления при любых начальных и финальных функциях. Для волнового уравнения (1) было установлено, что $T_{\text{крит}} = 2l$, в случае граничного управления на одном конце струны и $T_{\text{крит}} = l$, в случае управления на двух концах.

Одним из первых задачу об управлении колебаниями в форме смешанных задач для волнового уравнения рассмотрел в своей известной работе 1988 года Ж.Л. Лионс[1]. В этой работе данная задача изучалась в цилиндре $\Omega \times (0,T)$

[1] J. L. Lions, *"Exact Controllability, Stabilization and Perturbations for Distributed Systems" SIAM Review, (Mar., 1988).*

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad \text{в } \Omega \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(x,t) = \mu(t), \quad \text{в } \Gamma \times (0,T). \tag{3}$$

Начальные и граничные условия были взяты из следующих классов: $\varphi(x) \in L_2(\Omega)$, $\psi(x) \in H^{-1}(\Omega)$, $\mu(t) \in L_2[0,T]$, а $u(x,t)$ являлось слабо обобщенным решением. Задача заключалась в нахождении такой функции $\mu(t) \in L_2[0,T]$, для которой в классах L_2 и H^{-1} выполнялись бы равенства

$$u(x,T) = 0; \;\; u_t(x,T) = 0, \quad \text{в } \Omega,$$

где $u(x,t)$ - решение задачи (1) - (3) с граничным условием $\mu(t)$. Лионсом была доказана неединственность решения сформулированной задачи при промежутках времени $T > 2R(\Omega)$ [2]. Разработанный Лионсом метод (Hilbert uniqueness method) позволил изучить проблему существования граничного управления исследуемой задачи не только в одномерном, но и в многомерном случае.

В дальнейшем HUM-метод Лионса был обобщен его учениками и последователями на случай квазилинейного волнового уравнения, однородного транспортного уравнения, неавтономных гиперболических систем и др.

В статье Ф.П. Васильева[3] была предложена трактовка основ теории двойственности в линейных задачах управления и наблюдения. Его совместные с учениками работы посвящены конструктивному решению задач о граничном управлении процессом колебаний[4]. В этих статьях были построены эффективные численные алгоритмы нахождения искомого граничного управления.

А.З. Ишмухаметовым[5] была изучена задача приведения однородного стержня в состояние как можно более близкое к заданному за промежуток времени T. При условии, что левый его конец закреплен, правый свободен, а управление производится внешней поперечной нагрузкой и начальным состоянием.

Отметим также, что близкими вопросами теории граничного управления с использованием формулы Даламбера и разложения в тригонометрический

[2] Под $R(\Omega)$ понимается диаметр области Ω

[3] Ф. П. Васильев, *"О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения" Дифференциальные уравнения, 1995.*

[4] Ф. П. Васильев, М. А. Куржанский, М. М. Потапов *"Метод прямых в задачах граничного управления и наблюдения для уравнения колебаний струны"// Вестник МГУ, сер. 15, вычисл. матем. и киберн. 1993. №3.*

Ф. П. Васильев, М. А. Куржанский, А. В. Разгулин *"О методе Фурье для решения одной задачи управления колебаниями струны"// Вестник МГУ, сер. 15, вычисл. матем. и киберн. 1993. №2.*

[5] А. З. Ишмухаметов *"Оптимальное управление поперечными колебаниями стержня"// Вестник МГУ, сер. 15, вычисл. матем. и киберн. 1981. №4, с. 46 - 50.*

ряд Фурье еще ранее занимались А.Г.Бутковский, А.И.Егоров и Л.Д. Акуленко.

Большой цикл работ, выполненный В.А. Ильиным и продолженный его учениками, опубликованный в 1999 - 2008 годы, связан с решением задач управления процессом колебаний в терминах обобщенного решения смешанных задач сначала из класса $\widehat{W}_2^2(Q_T)$, а потом и из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$; здесь через Q_T обозначен прямоугольник $[0 \leqslant x \leqslant l] \times [0 \leqslant t \leqslant T]$. Эти классы были впервые введены В.А. Ильиным в его работах 1999, 2000 годов. Так класс $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ определяется как[6] множество функций $u(x,t)$, непрерывных в прямоугольнике Q_T и имеющих в нём обе обобщенные производные $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$, каждая из которых не только принадлежит классу $L_2(Q_T)$, но и принадлежит классу $L_2[0,l]$ для всех $t \in [0,T]$ и классу $L_2[0,T]$ для всех $x \in [0,l]$. Принадлежность решения этому классу позволяет точно сформулировать требования гладкости, накладываемые на начальные, финальные и граничные условия. В работах В.А. Ильина решалась задача управления процессом, описываемым волновым уравнением (1) и различными граничными условиями Дирихле и Неймана, переводящими струну из произвольного начального состояния

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant l \tag{4}$$

в произвольное финальное состояние

$$u(x,T) = \widehat{\varphi}(x) \quad u_t(x,T) = \widehat{\psi}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5}$$

где $\widehat{\varphi}(x) \in W_2^1[0,l]$, $\widehat{\psi}(x) \in L_2[0,l]$. При этом отдельно исследовались случаи управления на двух концах и управление на одном конце.

В первых работах был подробно изучен случай малых промежутков времени $T:\ 0 < T \leqslant T_{\text{крит}}$. Сначала для управления смещением на двух концах и для управления смещением на одном конце при закрепленном втором были установлены конструктивно проверяемые необходимые и достаточные условия для существования единственного решения из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления, при выполнении которых это решение выписывалось в явном виде, а также была конструктивно доказана неединственность (*континуальность*) решения данных задач при промежутках времени T строго больших, чем $T_{\text{крит}}$. Затем эти результаты были перенесены на случай задач с другими граничными условиями. В свете этих результатов особую актуальность приобретают задачи оптимизации, которые позволили бы выделить из бесконечного числа решений то, которое минимизирует граничную энергию струны. Поэтому, в дальнейших работах В.А. Ильина и Е.И. Моисеева

[6] Класс $\widehat{W}_2^2(Q_T)$ определяется аналогично

был сформулирован критерий оптимальности, основанный на минимизации соответствующего интеграла граничной энергии при наличии условий связи, вытекающих из выполнения начальных и финальных условий и условия согласования начальных и финальных смещений. Была доказана единственность оптимального решения, удовлетворяющего этому критерию. Это решение предъявлялось в явном виде для промежутков времени T кратных $2l$ или $4l$.

Для решения аналогичных задач при произвольных (больших $T_{\text{крит}}$) промежутов времени, техники развитой в более ранних работах оказалось недостаточно. Поэтому, потребовалась ее существенная модификация. В.А. Ильиным и Е.И. Моисеевым был разработан новый метод, основанный на сведении рассматриваемой задачи оптимизации к другой задаче, содержащей произвольную постоянную в минимизируемом интеграле и не содержащей условия согласования начальных и финальных условий.

В задачах оптимизации с одним закрепленным концом было доказано, что если вместо функции, доставляющей минимум интегралу граничной энергии

$$\int_0^T [\mu'(t)]^2 dt \quad \text{или} \quad \int_0^T [\mu(t)]^2 dt$$

искать функцию, минимизирующую интеграл с подынтегральным выражением, возведенным в произвольную степень p.

$$\int_0^T |\mu'(t)|^p dt \quad \text{или} \quad \int_0^T |\mu(t)|^p dt,$$

то при всех $p \geqslant 1$ оптимальные граничные управления будут иметь тот же аналитический вид, что и при $p = 2$.

Г.Д. Чебакаури[7] при $0 < T < T_{\text{крит}}$ рассмотрел случай, когда начальные и финальные функции не удовлетворяют необходимым условиям существования граничного управления, полученным в его совместной с П.А. Рево работе[8]. Он нашел в явном виде финальные функции $\widehat{\varphi}_*(x), \widehat{\psi}_*(x)$, наименее отклоняющиеся в метрике $W_2^1[0,l] \times L_2[0,l]$ от желаемого, но недостижимого финального состояния $\widehat{\varphi}(x), \widehat{\psi}(x)$.

[7] Г. Д. Чебакаури, *"Оптимальное граничное управления процессом колебаний на одном конце при свободном втором конце в случае ограниченной энергии" Дифференциальные уравнения. 2007.*

[8] П. А. Рево, Г. Д. Чебакаури, *"Граничное управление процессом колебаний на одном конце при свободном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией" Дифференциальные уравнения. 2001.*

Отметим, что во всех вышеуказанных работах решались задачи граничного управления, основанные на смешанных задачах с краевыми условиями первого и второго родов. Процессы с условиями третьего рода изучались в работах В.В. Тихомирова[9], Л.Н. Знаменской[10], А.С. Дудкина. Но в перечисленных работах исследование проводилось лишь для промежутков времени T не превосходящих $T_{\text{крит}}$, когда решение задачи граничного управления не более, чем единственно[11]. Назовем также работу Ф.О. Найдюка и В.Л.Прядиева,[12] в которой изучалась смешанная задача для волнового уравнения (1) с однородными граничными условиями

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \;\; t > 0$$

и следующими начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, \;\; 0 \leqslant x \leqslant l.$$

М.М. Потаповым была предложена устойчивая вычислительная процедура построения приближенных решений задач управления и наблюдения для широкого класса линейных динамических систем[13]. В его дальнейших работах была показана применимость этого метода для волнового уравнения с переменными коэффициентами и краевыми условиями третьего рода для случаев односторонних и двусторонних граничных управлений. Построенные в этих работах разностные приближения, при измельчении разностной сетки сходятся сильно в метрике пространства L_2 к граничым управлениям с минимальной L_2 - нормой.

Трудности в изучении управляемых процессов с граничными условиями третьего рода были вызваны отсутствием на достаточно больших временных промежутках аналитических представлений для обобщенных решений смешанных задач при фиксированных управлениях. Существенным прорывом в исследовании задач управления с граничными условиями третьего рода стала работа Е.И. Моисеева и В.В. Тихомирова[14]. В ней была решена в аналитиче-

[9] В. В. Тихомиров, *"Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. I,II" Дифференциальные уравнения, 2002.*

[10] Л. Н. Знаменская, *"Управление упругими колебаниями", 2004. М. ФИЗМАТЛИТ.*

[11] В упомянутой выше работе В.В. Тихомирова кроме того была доказана неединственность решения задачи граничного управления смещением на левом конце струны при упруго закрепленном правом конце для промежутков времени $T > T_{\text{крит}}$.

[12] Ф. О. Найдюк, В. Л. Прядиев, *"Формула продолжения начальных данных в решении Даламбера для волнового уравнения на отрезке с краевым условием третьего рода", Вестник ВГУ, Серия физика, математика, 2004.*

[13] М. М. Потапов, *"Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущенным оператором"*, Доклады академии наук. 1999

[14] Е. И. Моисеев, В. В. Тихомиров, *"О волновом процессе с конечной энергией при заданном граничном режиме на одном конце и упругом закреплении на другом конце Нелинейная динамика и управление, 2005.*

ской форме следующая смешанная задача с *однородным* краевым условием третьего рода

$$\begin{gathered} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \end{gathered}$$

для `произвольных` промежутков времени T. Именно в этой работе было установлено, что для представления этого решения в явном виде приходится использовать *полиномы Лагерра.* Попутно в этой статье была доказана единственность решения смешанной задачи для волнового уравнения с первым и третьим краевыми условиями. Решение, сформулированной смешанной задачи, полученное в работе Е.И. Моисеева и В.В. Тихомирова имеет вид[15]

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \,\underline{\mu}(t-x-2kl) \; - \; \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \,\underline{\mu}(t+x-2kl) \; +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int\limits_0^t e^{-h\tau} \mathbf{L}_k^1(2h\tau) \Big[\underline{\mu}(t-x-2l(k+1)-\tau) - \underline{\mu}(t+x-2l(k+1)-\tau) \Big] \, d\tau,$$

где $\mathbf{L}_k^1(z)$ - полиномы Лагерра.

Цель работы. В свете перечисленных выше работ, приобретают актуальность следующие задачи. Во-первых, важным представляется рассмотрение смешанных задач с *неоднородным* условием третьего рода. Во-вторых, представляет интерес исследование малоизученных задач граничного управления с условием третьего рода. В частности получение критерия оптимальности при промежутках времени больших $T_{\text{крит}}$, основанного на минимизации некоторого интеграла граничной энергии.

Основные результаты работы.

1) Решена в явном аналитическом виде смешанная задача для волнового уравнения с нулевыми начальными данными и с неоднородными третьим и первым краевыми условиями.

2) Доказана единственность решения смешанной задачи для волнового уравнения с нулевыми начальными данными и со вторым и третьим граничными условиями. Выведена формула, описывающая через краевые условия решение этой смешанной задачи.

[15]Через $\underline{\mu}(t)$ обозначена функция равная функции $\mu(t)$ и продолженная нулем при $t \leqslant 0$.

3) Сформулирован критерий оптимальности для решения задачи граничного управления, основанной на смешанной задаче с управлением третьим краевым условием на левом конце струны при закрепленном правом. Данный критерий основан на минимизации интеграла от линейной комбинации самого управления и его первообразной, возведенного в произвольную степень $p \geqslant 1$. Функция, удовлетворяющая данному критерию, выписана в явном виде.

4) Изучена задача граничного управления, основанная на смешанной задаче с неоднородным условием второго рода на левом конце струны и с упруго закрепленным правым концом. Разработан новый метод оптимизации, основанный на продолжении финальных функций на отрезок $[-T, T]$. Это позволило провести минимизацию интеграла от квадрата граничного управления. Функция $\mu(t)$, минимизирующая этот интеграл энергии, выписана в явном виде.

Методы исследования. В работе используется теория дифференциальных и интегральных уравнений, выпуклый анализ, метод множителей Лагранжа, методы работы со специальными функциями.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность работы. Разработан подход к новому классу задач оптимизации граничного управления для уравнения колебаний. Построены методы, основанные на выборе подходящего минимизируемого интеграла, выборе удобного условия связи начальных и финальных данных и условия согласования начальных и финальных смещений. Построены аналитические решения пяти ранее не решенных начально-краевых задач для уравнения колебаний.

Апробация работы. Результаты работы были представлены в виде докладов на российском симпозиуме с международным участием "Управление упругими колебаниями", г. Переславль-Залесский, 31 января – 2 февраля 2006 г.; XIII Международной молодежной конференции "Ломоносов - 2006", 12 – 15 апреля 2006г.; научной конференции "Понтрягинские чтения 2006", 3 – 6 мая 2006г., научной конференции "Тихоновские чтения 2006", 24 – 27 октября 2006г.; Международной молодежной конференции "Ломоносов - 2007".11-14 апреля 2007 г.; научном семинаре кафедры оптимального управления факультета ВМиК МГУ (рук. профессор Ф.П. Васильев).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] — [6]. Все результаты вошедшие в диссертацию и в перечень опубликованных работ получены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, приложения и библиографии. Общий объем диссертации 61 страница. Библиография содержит 52 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении раскрываются цели и задачи работы, ее актуальность, а также кратко описываются основные результаты, полученные в работе.

В **первой главе** исследуется смешанная начально-краевая задача для волнового уравнения (с неоднородным третьим краевым условием на левом конце струны $x = 0$ и неоднородным первым краевым условием на правом конце $x = l$), то есть задача

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad \text{в } Q_T, \tag{6}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{7}$$

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) = \nu(t), \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$

Замечание. Необходимыми условиями принадлежности решения $u(x,t)$ классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ являются следующие

Требования принадлежности

$$u(x,0) = \varphi(x) \in W_2^1[0,l], \quad u_t(x,0) = \psi(x) \in L_2[0,l];$$
$$\mu(t) \in L_2[0,T], \quad \nu(t) \in W_2^1[0,T].$$

Удовлетворение условию согласования при $x = l$

$$\nu(0) = \varphi(l). \tag{9}$$

Определение 1. *Обобщенным решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ указанной смешанной задачи назовём функцию $u(x,t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству:*

$$\int_0^l \int_0^T u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)]dxdt + \int_0^T \mu(t)\Phi(0,t)dt + \int_0^T \nu(t)\Phi_x(l,t)dt +$$
$$+ \int_0^l \varphi(x)\Phi_t(x,0)dx - \int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)dx = 0$$

для произвольной функции $\Phi(x,t)$ *из класса* $C^2(Q_T)$, *удовлетворяющей условиям:*

$$\Phi_x(0,t)-h\Phi(0,t)\equiv 0,\quad \Phi(l,t)\equiv 0 \text{ при } 0\leqslant t\leqslant T \quad \text{и}$$
$$\Phi(x,T)\equiv 0,\quad \Phi_t(x,T)\equiv 0 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant l\ .$$

Далее эта смешанная задача изучается при нулевых начальных условиях.

Определение 2. *Будем говорить, что функция* $\underline{\nu}(t)$ *принадлежит классу* $\underline{W}^1_2(-\infty,T]$, *если эта функция определена при всех* $t\leqslant T$, *принадлежит классу* $W_2^1\,(0,T]$ *и, кроме того, удовлетворяет тождеству* $\underline{\nu}(t)\equiv 0$ *при* $t\leqslant 0$.

Замечание. В силу условия согласования (9), в задаче возбуждения $\nu(0)=\varphi(l)=0$. Это позволяет продолжить функцию $\nu(t)$ тождественным нулём на значения $t<0$, превратив ее в функцию $\underline{\nu}(t)\in\underline{W}^1_2(-\infty,T]$. Функцию $\mu(t)\in L_2[0,T]$ также продолжим нулём на значения $t<0$, превратив ее в функцию $\underline{\mu}(t)\in L_2(-\infty,T]$.

Основной результат первой главы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. *Смешанная задача* (6) – (8) *с нулевыми начальными данными, где* $\mu(t)$ *и* $\nu(t)$ *- произвольные функции из классов* $L_2[0,T]$ *и* $W_2^1[0,T]$ *соответственно, удовлетворяющие условиям согласования* (9), *имеет единственное обобщенное решение* $u(x,t)$ *из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, *которое определяется равенством:*

$$u(x,t)=-\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\int\limits_0^{t-x-2kl}\underline{\mu}(\xi)d\xi\;-\;\sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^k\int\limits_0^{t+x-2kl}\underline{\mu}(\xi)d\xi\;+$$
$$+\sum_{k=0}^{2n+1}\;(-1)^k\underline{\nu}(t-2kl-l+x)\;-\;\sum_{k=1}^{2n+2}\;(-1)^k\underline{\nu}(t-2kl+l-x)\;+$$
$$+h\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\int\limits_0^{t}e^{-h\tau}\boldsymbol{L}^1_k(2h\tau)\Big[\int\limits_0^{t-x-2kl-\tau}\underline{\mu}(\xi)d\xi\;-\int\limits_0^{t+x-2l(k+1)-\tau}\underline{\mu}(\xi)d\xi\;-\int\limits_0^{t-x-2l(k+1)-\tau}\underline{\mu}(\xi)d\xi\;+\int\limits_0^{t+x-2l(k+2)-\tau}\underline{\mu}(\xi)d\xi\Big]d\tau-$$
$$-2h\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\int\limits_0^{t}e^{-h\tau}\boldsymbol{L}^1_k(2h\tau)\Big[\underline{\nu}(t-x-2kl-l-\tau)-\underline{\nu}(t+x-2kl-3l-\tau)\Big]d\tau,$$

где $\boldsymbol{L}^1_k(z)$ *- полиномы Лагерра, а* $n=\left[\dfrac{T}{4l}\right]-1$.

В заключении показывается как решение данной задачи может быть использовано для изучения задачи граничного управления при промежутках времени T меньших $T_{\text{крит}} = l$. Устанавливается единственность решения задачи граничного управления при данных значениях промежутка времени T. Отметим, что подобные результаты были получены Л.Н. Знаменской для решения из класса $\widehat{L}_2(Q_T)$.

Вторая глава посвящена исследованию смешанной задачи для волнового уравнения с неоднородным условием Неймана на левом конце струны и неоднородным третьим краевым условием на правом конце струны. То есть задачи

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad \text{в } Q_T, \tag{10}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{11}$$

$$u_x(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) + hu(l,t) = \nu(t), \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{12}$$

где

$$\varphi(x) \in W_2^1[0,l], \quad \psi(x) \in L_2[0,l]; \quad \mu(t),\ \nu(t) \in L_2[0,T].$$

Определение 3. *Обобщенным решением из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *указанной смешанной задачи назовём функцию* $u(x,t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$, *удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\int_0^l \int_0^T u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)]dxdt + \int_0^T \mu(t)\Phi(0,t)dt - \int_0^T \nu(t)\Phi(l,t)dt +$$
$$+ \int_0^l \varphi(x)\Phi_t(x,0)dx - \int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)dx = 0$$

для произвольной функции $\Phi(x,t)$ *из класса* $C^2(Q_T)$, *удовлетворяющей условиям*

$$\Phi_x(0,t) \equiv 0, \quad \Phi_x(l,t) + h\Phi(l,t) \equiv 0 \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T \quad \text{и}$$
$$\Phi(x,T) \equiv 0, \quad \Phi_t(x,T) \equiv 0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant l\ .$$

Доказывается следующее

Утверждение 1. *Для всех* $T > 0$ *смешанная задача* (10) - (12) *может иметь только одно обобщенное решение из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.

Предположим далее, что начальные условия в рассматриваемой смешанной задаче являются нулевыми.

Замечание. Продолжим функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ нулем при $t \leqslant 0$, превратив их в функции $\underline{\mu}(t)$ и $\underline{\nu}(t)$ из класса $L_2(-\infty, T)$.

Доказывается следующая

Теорема 2. *Смешанная задача* (10) – (12) *с нулевыми начальными данными, где* $\mu(t)$ *и* $\nu(t)$ *- произвольные функции из класса* $L_2[0,T]$, *имеет единственное обобщенное решение* $u(x,t)$ *из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, *которое определяется равенством*

$$u(x,t) = -\sum_{k=0}^{n} \int\limits_0^{t-x-2kl} \underline{\widehat{\mu}}(\xi)\, d\xi \; - \sum_{k=1}^{n+1} \int\limits_0^{t+x-2kl} \underline{\widehat{\mu}}(\xi)\, d\xi \; + \sum_{k=0}^{n} \int\limits_0^{t+x-2kl-l} \underline{\nu}(\xi)\, d\xi \; + \sum_{k=1}^{n+1} \int\limits_0^{t-x-2kl+l} \underline{\nu}(\xi)\, d\xi \; +$$

$$+2h \sum_{k=0}^{n} \int\limits_0^{t} e^{-h\tau} \boldsymbol{L}_k^1(2h\tau) \Big[\int\limits_0^{t+x-2kl-2l-\tau} \underline{\widehat{\mu}}(\xi)\, d\xi + \int\limits_0^{t-x-2kl-2l-\tau} \underline{\widehat{\mu}}(\xi)\, d\xi \Big]\, d\tau \; -$$

$$-h \sum_{k=0}^{n} \int\limits_0^{t} e^{-h\tau} \boldsymbol{L}_k^1(2h\tau) \Big[\int\limits_0^{t+x-l-2kl-\tau} \underline{\nu}(\xi)\, d\xi + \int\limits_0^{t-x-l-2kl-\tau} \underline{\nu}(\xi)\, d\xi + \int\limits_0^{t+x-3l-2kl-\tau} \underline{\nu}(\xi)\, d\xi + \int\limits_0^{t-x-3l-2kl-\tau} \underline{\nu}(\xi)\, d\xi \Big] d\tau,$$

где $\boldsymbol{L}_k^1(z)$ *- полиномы Лагерра, а* $n = \left[\dfrac{T}{2l} \right] - 1$.

Аналогично первой главе, показывается как эта смешанная задача используется для решения задачи граничного управления при промежутках времени $T:\ 0 < T < l$.

Третья глава посвящена установлению критерия оптимальности для решения задачи граничного управления, основанной на смешанной задаче с управлением третьим краевым условием на левом конце струны при закрепленном правом.

Для формулировки результатов этой главы рассмотрим следующую смешанную задачу для волнового уравнения (1) с начальными условиями (4) и граничными условиями

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) = 0, \tag{13}$$

Функции $\varphi(x), \psi(x), \mu(t)$ в данной смешанной задаче принадлежат классам

$$u(x,0) = \varphi(x) \in W_p^1[0,l], \quad u_t(x,0) = \psi(x) \in L_p[0,l];$$
$$u(x,T) = \widehat{\varphi}(x) \in W_p^1[0,l], \quad u_t(x,T) = \widehat{\psi}(x) \in L_p[0,l];$$
$$\mu(t) \in L_p[0,T].$$

и удовлетворяют условиям закрепления

$$\varphi(l)=0,\ \ \widehat{\varphi}(l)=0.$$

Определение 4. *Класс* $\widehat{W}_p^1(Q_T)$*;* Q_T *- прямоугольник* $[0\leqslant x\leqslant l]\times[0\leqslant t\leqslant T]$*, определяется как множество функций* $u(x,t)$*, непрерывных в прямоугольнике* Q_T *и имеющих в нём обе обобщенные производные* $u_x(x,t),\ u_t(x,t)$*, каждая из которых не только принадлежит классу* $L_p(Q_T)$*, но и принадлежит классу* $L_p[0,l]$ *для всех* $t\in[0,T]$ *и классу* $L_p[0,T]$ *для всех* $x\in[0,l]$*.*

Заметим, что этот класс был впервые введен В.А.Ильиным[16]

Определение 5. *Обобщенным решением из класса* $\widehat{W}_p^1(Q_T)$ *смешанной задачи для волнового уравнения* (1)*, начальных условий* (4) *и граничных условий* (13) *назовём функцию* $u(x,t)\in\widehat{W}_p^1(Q_T)$*, удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\int\limits_0^l\int\limits_0^T u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t)-\Phi_{xx}(x,t)]dxdt+\int\limits_0^T\mu(t)\Phi(0,t)dt+ \\ +\int\limits_0^l\left[\varphi(x)\Phi_t(x,0)-\psi(x)\Phi(x,0)\right]dx=0,$$

выполненного для произвольной функции $\Phi(x,t)$ *из класса* $C^2(Q_T)$*, удовлетворяющей условиям:*

$$\Phi_x(0,t)-h\Phi(0,t)\equiv0,\quad \Phi(l,t)\equiv0\ \ \text{при}\ \ 0\leqslant t\leqslant T\quad \text{и} \\ \Phi(x,T)\equiv0,\quad \Phi_t(x,T)\equiv0\ \ \text{при}\ \ 0\leqslant x\leqslant l\ .$$

В третьей главе решается задача нахождения функции $\mu(t)\in L_p[0,T]$, такой чтобы для решения $u(x,t)\in\widehat{W}_p^1(Q_T)$ рассматриваемой смешанной задачи с заданными начальными условиями (4) в момент времени $t=T$ выполнялись заданные финальные условия (5). Причем равенства понимаются в смысле соответствующих пространств.

Далее мы будем рассматривать эту задачу для промежутка времени T, удовлетворяющего условию

$$\mathbf{T=4l(n{+}1)},\ \text{где}\ \ n=0,1,2,\dots$$

[16] В. А. Ильин, *"Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией"* // *Дифференциальные уравнения. 2000.*

Продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из начальных условий (4) и функции $\widehat{\varphi}(x)$ и $\widehat{\psi}(x)$ из финальных условий (5) нечётно относительно точки $x = l$ с сегмента $[0, l]$ на сегмент $[l, 2l]$. Условия закрепления гарантируют принадлежность так продолженных функций на сегменте $[0, 2l]$ классам

$$\varphi(x),\ \widehat{\varphi}(x) \in W_p^1[0, 2l], \quad \psi(x),\ \widehat{\psi}(x) \in L_p[0, 2l];$$

При $T > 2l$ данная задача имеет бесконечно много решений. Поэтому может быть поставлена задача об определении среди них *оптимального*. В этой главе мы устанавливаем критерий оптимальности для решения рассматриваемой задачи граничного управления. Данный критерий основан на минимизации интеграла от линейной комбинации самого управления и его первообразной, возведенного в произвольную степень $p \geqslant 1$. Для постановки задачи оптимизации введём в рассмотрение следующую функцию $\mathbf{H}(t, \tau)$, определенную равенством

$$\mathbf{H}(t, \tau) \ = \ \Big\{ e^{-h\tau} \cdot \Big[\mathbf{L}^1_{2n-m+1}(2h\tau) \ + \ \mathbf{L}^1_{2n-m}(2h\tau) \Big] \, ,$$
$$\text{при } 2lm < t \leqslant 2l(m+1), \ m = \overline{0, 2n+1} \Big\},$$

Поставим задачу, заключающуюся в отыскании среди всех функций $\mu(t) \in L_p[0, T]$, являющихся граничными управлениями, той, которая доставляет минимум обобщенному интегралу граничной энергии

$$\int\limits_0^T \left| \mu(t) - h \cdot \int\limits_0^t \mathbf{H}(t, t-\xi) \ \mu(\xi) \, d\xi \right|^p dt$$

при наличии условий связи, извлекаемых из выполнения произвольно заданных начальных и финальных условий. Доказывается следующая

Теорема 3. *Решение рассматриваемой задачи граничного управления, удовлетворяющее данному критерию оптимальности, существует.*

На каждом отрезке $[2lm, \, 2l(m+1)]$ $\big(m = \overline{0, 2n+1} \, \big)$ *оно представляется формулой*

$$\mu(y) = \frac{(-1)^{m+1} \, \boldsymbol{D}(y - 2lm)}{2n+2} + h \int\limits_0^y \boldsymbol{R}_m(y-t) \, \frac{(-1)^{m+1} \, \boldsymbol{D}(t - 2lm)}{2n+2} \, dt,$$

где $\mathbf{D}(y)$ *- определяемая в явном виде функция, зависящая только от начальных и финальных условий задачи,*

$$\boldsymbol{R}_m(y-t) \ = \ \sum_{i=0}^{2n-m+2} h^{i-1} (y-t)^{i-1} \begin{pmatrix} 2n-m+2 \\ i \end{pmatrix} {}_1\tilde{\boldsymbol{F}}_1\big(2n-m+1; \ i; \ h(y-t)\big),$$

${}_1\tilde{\boldsymbol{F}}_1(a;c;z)$ - вырожденная гипергеометрическая функция Куммера.

При $p>1$ вышеуказанное оптимальное решение является единственным.

Замечание. Используя технику из работы В.А. Ильина и Е.И. Моисеева[17], возможно рассмотреть изученную задачу для случая произвольных промежутков времени T, не обязательно кратных $4l$.

В **Приложении А** мы продолжаем изучение задач оптимизации граничного управления, основанных на смешанных задачах для волнового уравнения с третьим краевым условием. Как и ранее, нами рассматривается задача граничного управления колебаниями струны, описываемыми волновым уравнением (1). Но в данном случае управление производится вторым краевым условием $u_x(0,t) = \ \mu(t)$ на левом конце при упруго закрепленном правом $u_x(l,t)+hu(l,t) = \ 0$. Трудность этой задачи заключается в отсутствии условия закрепления, поэтому кроме условия связи, связывающего начальные, финальные и граничные условия, нам необходимо установить дополнительное условие согласования.

Наше рассмотрение ведётся в терминах обобщенного решения волнового уравнения из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.

Далее нам будет удобно, выписать необходимые условия, накладываемые на начальные, финальные и граничные функции в рассматриваемой задаче для принадлежности решения $u(x,t)$ классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.

Требования принадлежности

$$\begin{gathered} u(x,0)=\varphi(x)\in W_2^1[0,l], \quad u_t(x,0)=\psi(x)\in L_2[0,l]; \\ u(x,T)=\widehat{\varphi}(x)\in W_2^1[0,l], \quad u_t(x,T)=\widehat{\psi}(x)\in L_2[0,l]; \\ \mu(t)\in L_2[0,T]. \end{gathered} \tag{14}$$

Для формулировки изучаемой задачи граничного управления рассмотрим следующую смешанную задачу для волнового уравнения (1) с начальными условиями (4) и граничными условиями

$$u_x(0,t)=\mu(t), \quad u_x(l,t)+hu(l,t)=0, \tag{15}$$

где функции $\varphi(x),\psi(x),\mu(t)$ принадлежат классам (14), а на начальные функции наложено дополнительное условие

$$\int\limits_0^l e^{-h\tau}\Big(h\varphi(\tau)+\psi(\tau)\Big)d\tau=0 \tag{16}$$

[17]В. А. Ильин, Е.И. Моисеев, *"Минимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени T интеграла от модуля производной производимого смещением граничного управления, возведенного в произвольную степень $p\geqslant 1$" // Дифференциальные уравнения, 2006.*

Можно заметить, что условию (16) удовлетворяют, например, начальные функции тождественно равные нулю. Следовательно, под наше рассмотрение попадает важная задача "возбуждения начальных данных".

Определение 6. *Обобщенным решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ этой смешанной задачи назовём функцию $u(x,t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\int_0^l \int_0^T u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)]\,dxdt + \int_0^T \mu(t)\Phi(0,t)dt + \\ + \int_0^l \varphi(x)\Phi_t(x,0)dx - \int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)dx = 0,$$

выполненному для произвольной функции $\Phi(x,t) \in C^2(Q_T)$, удовлетворяющей условиям:

$$\Phi_x(0,t) \equiv 0, \quad \Phi_x(l,t) + h\Phi(l,t) \equiv 0 \ \textit{ при } \ 0 \leqslant t \leqslant T \quad \textit{и} \\ \Phi(x,T) \equiv 0, \quad \Phi_t(x,T) \equiv 0 \ \textit{ при } \ 0 \leqslant x \leqslant l\ .$$

Определение 7. *Под решением соответствующей задачи граничного управления мы будем понимать такую функцию $\mu(t) \in L_2[0,T]$, для которой обобщенное решение $u(x,t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения* (1) *с начальными условиями* (4) *и граничными условиями* (15) *удовлетворяет финальным условиям* (5)*.*

При $T > 2l$ данная задача граничного управления имеет бесконечно много решений. Поэтому может быть поставлена задача об определении среди них *оптимального.* При этом среди всех функций $\mu(t)$, являющихся граничными управлениями, отыскивается функция, которая доставляет минимум интегралу граничной энергии

$$\int_0^T \mu^2(t)dt.$$

Далее мы будем решать эту задачу для промежутка времени T, удовлетворяющего условию

$$T = 2l(n+1), \text{ где } \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Заметим, что не ограничивая общности рассмотрений можно предполагать, что $\varphi(0) = 0$, $\widehat{\varphi}(0) = 0$. В противном случае, с помощью линейной замены следует перейти к функции, для которой данное условие выполнено.

Нам будет удобно продолжить функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из начальных условий (4) и функции $\widehat{\varphi}(x)$, $\widehat{\psi}(x)$ из финальных условий (5) следующим образом

$$\widehat{\varphi}(x)=\begin{cases} 0 & ; -T\leqslant x\leqslant 0,\\ \widehat{\varphi}(x) & ; 0\leqslant x\leqslant l,\\ \widehat{\varphi}(2l-x)+2h\displaystyle\int\limits_{l}^{2l-x}\widehat{\varphi}(\tau)e^{h(2l-x-\tau)}d\tau & ; l\leqslant x\leqslant 2l,\\ -2h\displaystyle\int\limits_{0}^{l}\widehat{\varphi}(\tau)e^{-h\tau}d\tau & ; 2l\leqslant x\leqslant T.\end{cases}$$

Функцию $\varphi(x)$ продолжим аналогично на сегмент $[0,2l]$.

$$\widehat{\psi}(x)=\begin{cases} 0 & ; -T< x< 0,\\ \widehat{\psi}(x) & ; 0< x< l,\\ \widehat{\psi}(2l-x)+2h\displaystyle\int\limits_{l}^{2l-x}\widehat{\psi}(\tau)\,e^{h(2l-x-\tau)}d\tau & ; l< x< 2l,\\ 0 & ; 2l< x< T.\end{cases}$$

Функцию $\psi(x)$ продолжим аналогично на сегмент $[0,2l]$.

Продолженные таким образом функции будут принадлежать следующим классам

$$\varphi(x)\in W_2^1[0,2l],\ \ \psi(x)\in L_2[0,2l],\quad \widehat{\varphi}(x)\in W_2^1[-T,T],\ \ \widehat{\psi}(x)\in L_2[-T,T].$$

Для $x\in[0,l]$ введем в рассмотрение следующие функции

$$\varphi(2l-x)=\varphi(x)+2h\int\limits_{l}^{x}\varphi(\tau)e^{h(x-\tau)}d\tau=\Phi(x)^{18},$$

$$\psi(2l-x)=\psi(x)+2h\int\limits_{l}^{x}\psi(\tau)\,e^{h(x-\tau)}d\tau=\Psi(x).$$

Оптимальная граничная сила является на сегменте $[0,T]$ $2l$-периодической

[18] Данная функция не отождествляется с функцией $\Phi(x,t)$ из определения обобщенного решения.

функцией, и выражается формулой

$$\widetilde{\mu}(2lm+x)=\begin{cases}\dfrac{\mathcal{A}(x)}{n+1}+C(n-2m);\ m=0,\ldots,n\,, & \text{при } 0\leqslant x<l,\\ \dfrac{\mathcal{B}(x)}{n+1}+C(n-2m);\ m=0,\ldots,n\,, & \text{при } l<x\leqslant 2l,\end{cases}$$

$$C=\frac{3\left(\mathbf{D}-\int\limits_0^l\mathcal{A}(x)dx+\int\limits_l^{2l}\mathcal{B}(x)dx\right)}{2\,l\,n(n+1)(n+2)},$$

где функции $\mathcal{A}(x)$ и $\mathcal{B}(x)$ определяются равенствами

$$\mathcal{A}(x)=\,-\frac{1}{2}\Big[\widehat{\psi}(x)-\psi(x)+\widehat{\varphi}'(x)-\varphi'(x)\Big],$$

$$\mathcal{B}(x)=\,-\frac{1}{2}\Big[\widehat{\Psi}(x)-\Psi(x)-\widehat{\Phi}'(x)-\Phi'(x)\Big],$$

а постоянная $\mathbf{D}$ - тождеством

$$\mathbf{D}=-\widehat{\varphi}(l)+2nh\int\limits_0^l\widehat{\varphi}(\tau)e^{-h\tau}d\tau+\frac{n+1}{2}\int\limits_0^l\big[\varphi'(\xi)+\psi(\xi)\big]d\xi+\frac{n-1}{2}\int\limits_l^{2l}\Big[\Phi'(\xi)+\Psi(\xi)\Big]d\xi.$$

Замечание. В этом приложении был рассмотрен случай промежутка времени, кратного $2l$. Перейти к случаю произволных промежутков времени, можно используя технику, разработанную в статьях В.А. Ильина и Е.И. Моисеева[19].

Автор выражает глубокую благодарность своему учителю В.А. Ильину за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Автор благодарит также Е.И. Моисеева, А.А. Кулешова, М.М. Потапова и В.В. Тихомирова за полезные обсуждения.

[19] В. А. Ильин, Е.И. Моисеев, *"Оптимальное граничное управление упругой силой на одном конце струны при свободном втором ее конце за произвольный достаточно большой промежуток времени" // Дифференциальные уравнения, 2007.*

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] А. А. Никитин, *О смешанной задаче для волнового уравнения с третьим краевым условием* // Сборник тезисов XIII Международной молодежной конференции *"Ломоносов-2006"*: 2006г.

[2] А. А. Никитин, *Граничное управление, производимое третьим краевым условием* // Труды научной конференции "Тихоновские чтения *2006"*: 2006г.

[3] А. А. Никитин, *Граничное управление третьим краевым условием,* // Автоматика и телемеханика. *2007, №2, с 120-126.*

[4] А. А. Никитин, *Минимизация интеграла от линейной комбинации граничного управления и его первообразной, производимыми третьим краевым условием* // Сборник тезисов XIV Международной молодежной конференции *"Ломоносов-2007"*: 2007г.

[5] А. А. Никитин, *Минимизация интеграла от линейной комбинации граничного управления и его первообразной, производимыми третьим краевым условием,* // Доклады академии наук. *2007, Т.417, №6, с 743-745.*

[6] А. А. Никитин, *О смешанной задаче для волнового уравнения с третьим и первым краевыми условиями* // Дифференциальные уравнения, *2007, Т.43, №12, с 1692-1700.*