Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Воробьев Федор Юрьевич

О предельных свойствах случайных КНФ

Специальность 01.01.09 – дискретная математика
и математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена на кафедре математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Александр Антонович Сапоженко.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, руководитель отдела ИСП РАН Николай Николаевич Кузюрин; кандидат физико-математических наук, с.н.с. ВЦ РАН Михаил Николаевич Вялый.
Ведущая организация:	Институт системного анализа РАН.

Защита диссертации состоится 16 мая 2008 г. в 11 : 00 на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП–1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2–ой учебный корпус, факультет ВМиК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМиК МГУ.

С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМиК Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова http://www.cs.msu.su
в разделе «Наука» — «Работа диссертационных советов» — «Д 501.001.44».

Автореферат разослан «_____» апреля 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор Трифонов Н. П.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Значительное место в дискретной математике занимают вопросы сложности алгоритмов. Центральной открытой проблемой теории алгоритмов является задача о равенстве классов сложности P и NP. Одной из наиболее исследуемых NP-полных задач является задача k-выполнимости. Для изучения «типичных» экземпляров этой задачи используется модель, когда соответствующие формулы выбираются случайным образом. Дополнительный интерес к этой модели вызван существованием значительной связи с моделями статистической физики. Работа посвящена исследованию некоторых свойств таких формул.

Задача выполнимости состоит в том, чтобы по произвольной булевой формуле определить, является ли она выполнимой, то есть существует ли набор значений переменных, на котором формула обращается в единицу. Теорема Кука гласит, что задача о выполнимости КНФ является NP-полной.[1] Другими словами, задача о выполнимости лежит в классе NP и к ней полиномиально сводится любая задача из этого класса.

k-конъюнктивной нормальной формой (k-КНФ) называется КНФ, в которой каждая элементарная дизъюнкция состоит из не более чем k литералов (букв). Задача k-выполнимости — это задача о выполнимости k-КНФ. Известно, что для задачи 2-выполнимости существует алгоритм с полиномиальной сложностью (то есть задача 2-выполнимости принадлежит классу P), в то время как при $k > 2$ задача k-выполнимости NP-полна. Интенсивно изучается модель, когда k-КНФ выбирается случайно. Задача оказалась интересной для физиков, так как она обладает свойствами, характерными для ряда физических моделей. Одним из таких свойств является существование порога выполнимости.

Пусть $F_k(n, m)$ — случайная k-КНФ, полученная путем случайного, равновероятного и независимого выбора m скобок (с повторением) из числа всех возможных скобок (элементарных дизъюнкций длины k над переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Пусть k фиксировано, число переменных n

[1] Cook S. A., *The complexity of theorem-proving procedures*, STOC '71: Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing. New York, NY, USA: ACM Press, 1971. Pp. 151–158.

стремится к бесконечности, а число скобок m равно rn, где r — некоторая константа. *Верхним порогом выполнимости*, r_k, называется точная верхняя грань таких r, что вероятность выполнимости формулы $F_k(n, rn)$ стремится к единице. *Нижним порогом выполнимости*, r_k^*, называется точная нижняя грань таких r, что вероятность выполнимости формулы стремится к нулю. Существует предположение, что $r_k = r_k^*$. Такое число r_k называется *порогом выполнимости.*

Существование порога в виде некоторой константы не доказано, но известно следующее утверждение:

Утверждение 1. (Friedgut[2]) *Для любого $k \geq 2$ существует такая последовательность $r_k(n)$, что для любого $\varepsilon > 0$*

если $r = (1-\varepsilon)r_k(n)$, то вероятность выполнимости $F_k(n, rn)$ стремится к единице,

если $r = (1+\varepsilon)r_k(n)$, то вероятность выполнимости $F_k(n, rn)$ стремится к нулю.

Здесь роль порога выполняет последовательность $r_k(n)$. Если у нее есть предел, то порог выполнимости существует и равен этому пределу.

Следствие. *Зафиксируем $k \geq 2$. Если вероятность выполнимости формулы $F_k(n, r^*n)$ ограничена снизу положительной константой, не зависящей от n, то при $r < r^*$ вероятность выполнимости $F_k(n, rn)$ стремится к единице.*

Изучение предельных свойств случайных КНФ можно рассматривать как продолжение изучения случайных функций. Модели похожи как по геометрическим свойствам (например, наличие кластеризации), так и по успешно применяющимся методам (например, метод вторых моментов).

Изучение числовых характеристик случайных КНФ может позволить сделать выводы о более общем случае. В качестве примера можно привести результаты последних лет, согласно которым возрастание сложности вычислений вблизи порога связано с эффектом кластеризации, когда

[2] Friedgut, E., *Necessary and sufficient conditions for sharp thresholds of graph properties, and the k-sat problem*, J. Amer. Math. Soc., 1999, vol. 12, pp. 1017–1054.

множество выполняющих наборов формулы разбивается на небольшие подмножества, причем расстояния между подмножествами относительно велики.

Кроме того, изучение случайных КНФ имеет значение для разработки алгоритмов, решающих задачу выполнимости, а также для генерирования формул, на которых эти алгоритмы тестируются.

В середине 80-х годов Y. Fu и P. Anderson впервые предположили существование значительной связи между NP-полными задачами и моделями статистической физики, такими как модель Изинга. Одно из общих свойств — существование порога (фазового перехода) и резкое возрастание сложности вычислений вблизи порога. Прослеживаются аналогии между задачей выполнимости случайной k-КНФ и моделями спинового стекла (материалов с неупорядоченной магнитной структурой).

В связи с этим, исследованием модели случайной k-КНФ стали заниматься физики (M. Mézard, R. Monasson, G. Parisi, R. Zecchina и другие). Методы, которыми они пользовались для анализа моделей статистической физики, удалось успешно применить и к случайным k-КНФ. Предложенный ими алгоритм для поиска выполняющих наборов случайной k-КНФ (Survey propagation) по эффективности превосходит прочие известные алгоритмы вблизи порога выполнимости.

Многие работы были посвящены оценкам порога выполнимости, как в общем случае, так и для конкретных значений k. В 2004-м году D. Achlioptas и Y. Peres успешно применили метод вторых моментов для улучшения нижней оценки r_k.[3] Им удалось доказать, что $r_k \sim 2^k \ln 2$ (при $k \to \infty$). Кроме того, ими были улучшены нижние оценки r_k для всех $k > 3$.

В диссертации предложена модификация использованного ими метода, позволяющая дальнейшее улучшение нижних оценок порога выполнимости.

Кроме порога выполнимости, с 2005-го года изучается эффект клас-

[3] Achlioptas D., Peres Y., *The threshold of random k-sat is* $2^k \ln 2 - o(k)$, J. Amer. Math. Soc., 2004, vol. 17, pp. 947–973.

теризации, когда множество выполняющих наборов случайной формулы разбивается на экспоненциально много множеств маленького диаметра, расположенных относительно далеко друг от друга.

Еще одна важная характеристика множества выполняющих наборов ($N_{F_k(n,rn)}$) — наличие в нем граней различных размерностей. Изучение вероятности присутствия граней различных размерностей в $N_{F_k(n,rn)}$ позволит более подробно понять структуру кластеров, а в случае, когда кластеризация не доказана (или не происходит) — позволит сделать первые конкретные выводы о структуре множества выполняющих наборов.

Цель диссертации. Целью диссертации является изучение предельных свойств случайных КНФ вблизи порога выполнимости.

Задачи диссертации.

- Улучшение нижних оценок порога k-выполнимости.
- Изучение структуры множества выполняющих наборов случайных k-КНФ вблизи порога выполнимости, изучение вероятности присутствия граней различных размерностей в этом множестве.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

1. Улучшен метод получения нижних оценок порога k-выполнимости при $k \geq 3$, разработанный D. Achlioptas и Y. Peres.
2. Улучшены нижние оценки порога k-выполнимости для $k = 4, 5, 6, 7$.
3. Доказано существование порога в форме последовательности для присутствия граней.
4. Найден метод получения нижних оценок порога присутствия граней размерности ns в $N_{F_k(n,rn)}$ при $k \geq 3$.

Научная и практическая ценность. Работа имеет теоретическую направленность. Улучшены нижние оценки порога k-выполнимости для $k = 4, 5, 6, 7$, указан способ улучшения таких оценок для $k > 7$. Найден метод получения таких $r_{k,s}$, что вероятность присутствия грани размерности ns в $N_{F_k(n, r_{k,s} n)}$ стремится к единице.

Полученные результаты дают информацию о структуре множества выполняющих наборов случайных КНФ и могут применяться при тестировании и разработке алгоритмов для решения задачи выполнимости.

Методы исследования. В диссертации используются методы комбинаторики, вероятностные методы и компьютерные вычисления.

Публикации и апробирование. Результаты диссертации докладывались на семинаре ВМиК МГУ «Дискретный анализ» (руководители — А. А. Сапоженко, Н. Н. Кузюрин, В. П. Воронин), на семинаре ВМиК МГУ «Теория риска» (руководители — В. Е. Бенинг, В. Ю. Королев, А. А. Кудрявцев), на VI Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 2004 г.), на XIV Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Пенза, 2005 г.), на IX Международном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 2007 г.), а также на VI Молодежной научной школе по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 2007 г.).

По теме диссертации опубликовано 6 работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Объем диссертации — 77 страниц. Список литературы содержит 48 наименований.

Краткое содержание диссертации

Введение содержит обоснование актуальности темы исследования, обзор результатов, связанных с темой диссертации. В нем описана структура диссертации и перечислены основные результаты.

В главе 1 предложена модификация метода получения нижних оценок для порога k-выполнимости при $k \geq 3$, который разработали D. Achlioptas и Y. Peres.[3]

В параграфе 1.1 приведены предыдущие известные оценки порога k-выполнимости для $k = 3, 4, 5, 6, 7$ в сравнении с результатами первой главы.

k	3	4	5	6	7
Верхняя оценка	4,51	10,23	21,33	43,51	87,88
Алгоритмическая нижняя оценка	3,52	5,54	9,63	16,78	33,32
Нижняя оценка Achlioptas, Peres	2,68	7,91	18,79	40,74	84,82
Результат первой главы	2,82	8,09	18,91	40,81	84,87

В параграфе 1.2 описано, каким образом метод вторых моментов может быть использован для получения нижних оценок порога выполнимости. Метод применяется в следующем виде.

Лемма 1. *(Метод вторых моментов) Пусть X — неотрицательная случайная величина. Тогда*

$$\mathbf{P}(X > 0) \geq \frac{\mathbf{M}(X)^2}{\mathbf{M}(X^2)}.$$

Если X — неотрицательная случайная величина, значение которой определяется выбором формулы $F_k(n, rn)$, и при $X > 0$ КНФ выполнима, то вероятность выполнимости $F_k(n, rn)$ будет не меньше $\mathbf{M}(X)^2/\mathbf{M}(X^2)$. Таким образом, если $\mathbf{M}(X^2) = O\left(\mathbf{M}(X)^2\right)$ при $n \to \infty$, то $r_k \geq r$ по следствию утверждения 1. D. Achlioptas и Y. Peres исследовали применимость метода вторых моментов к различным случайным величинам. В простейшем случае, когда случайная величина X_0 равна числу выполняющих наборов случайной формулы, $X_0 = |N_{F_k(n,rn)}|$, метод вторых моментов не дает результатов, поскольку $\mathbf{M}(X_0)^2/\mathbf{M}(X_0^2) \to 0$ при $n \to \infty$.

Для улучшения нижней оценки порога выполнимости требуется выбрать такую случайную величину X, что из $X > 0$ следует выполнимость формулы, и к X применим метод вторых моментов.

В параграфе 1.3 приведены рассуждения, которыми D. Achlioptas и Y. Peres руководствовались при выборе случайной величины. Пусть W — множество действительнозначных функций вида $w(\sigma, c)$, где $\sigma \in \{0,1\}^n$, а c — некоторая k-буквенная скобка. Рассматривается класс случайных величин

$$X = \sum_{\sigma} \prod_{c} \omega(\sigma, c),$$

где сумма берется по всем $\sigma \in \{0,1\}^n$, а произведение — по всем скобкам случайной КНФ, и $\omega(\sigma, c) \in W$.

Так как переменные, входящие в формулу, выбираются равновероятно, естественно рассматривать функции вида $\omega(\sigma, c) = \omega_{\mathbf{v}(\sigma,c)}$, где $\mathbf{v}(\sigma, c)$ — это число букв скобки c, обращающихся в единицу на наборе σ. Таким образом, функция ω определяется выбором $k+1$ параметров $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_k$. Метод вторых моментов применим, если из невыполнимости формулы следует $X = 0$. Это возможно только при $\omega_0 = 0$. Кроме того, равенство

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i \binom{k}{i} (k - 2i) = 0$$

является необходимым условием применимости метода вторых моментов.

С учетом условия нормировки, выбор функции ω удается свести к выбору $k-2$ параметров.

Приведены выражения для $\mathbf{M}X$ и $\mathbf{M}(X^2)$, которые легко получаются благодаря независимости выбора скобок и линейности математического ожидания.

D. Achlioptas и Y. Peres среди всех членов класса случайных величин X выбрали одну случайную величину, которая, по словам авторов, позволяла получить наилучшие для данного класса нижние оценки порога выполнимости, хотя строго это не доказывалось. Они выбрали

$$\omega(\sigma, c) = \frac{1}{Z}\lambda^{\mathbf{v}(\sigma,c)},$$

где Z и λ — константы. Такой выбор существенно упрощает необходимые вычисления и рассуждения.

В параграфе 1.4 метод, который применили D. Achlioptas и Y. Peres, обобщается с целью получения более точных нижних оценок порога выполнимости.

Пусть $N^+ \subset \{0,1\}^n$ — множество наборов, на которых не менее половины букв формулы обращаются в единицу.

Основной вклад в $\mathbf{M}(X^2)$ дают наборы, на которых в единицу обращается меньше половины букв формулы. Поэтому имеет смысл рассмотреть случайную величину

$$X_+ = \sum_{\sigma \in N^+} \prod_c \omega(\sigma, c).$$

Для того, чтобы оценить $\mathbf{M}X_+$, доказывается следующая лемма.

Лемма 4. $\mathbf{M}(X_+)/\mathbf{M}(X) \to 1/2$.

Получено выражение для оценки сверху $\mathbf{M}(X_+^2)$. Найдена функция $g_r(\alpha, \beta)$, зависящая от параметров r, $\omega_1, \ldots, \omega_k$, такая, что верна следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для фиксированного r существуют ω_i, $i = \overline{1,k}$ и кусочно-постоянная функция $b(\alpha) \geq 1$, такие, что для всех $\alpha \neq 1/2$ выполняется неравенство $g_r(1/2, 1) > g_r(\alpha, b(\alpha))$. Пусть кроме того $g_r''(\alpha, 1) < 0$ при $\alpha = 1/2$. Тогда r – нижняя оценка порога k-выполнимости.*

Таким образом, задача получения нижней оценки порога k-выполнимости для некоторого фиксированного k сводится к следующей задаче. Нужно найти r, параметры $\omega_1, \ldots, \omega_k$ и кусочно-постоянную функцию $b(\alpha) \geq 1$, чтобы выполнялось условие теоремы 1. Такую задачу можно решать численными методами.

В параграфе 1.5 с помощью теоремы 1 улучшены нижние оценки порога k-выполнимости при $k = 4, 5, 6, 7$. Значения параметров $\omega_1, \ldots, \omega_k$ получены с помощью простейшего метода итеративного спуска.

Теорема 2. $r_4 \geq 8{,}09, r_5 \geq 18{,}91, r_6 \geq 40{,}81, r_7 \geq 84{,}87$.

В главе 2 рассматривается вопрос присутствия во множестве выполняющих наборов случайной k-КНФ граней различных размерностей.

В параграфе 2.1 используется тот факт, что присутствие фиктивных переменных в формуле обеспечивает наличие граней в множестве ее выполняющих наборов. Если у формулы есть один выполняющий набор, то присваивая фиктивным переменным всевозможные значения, получим грань, состоящую из выполняющих наборов, причем размерность грани равна числу фиктивных переменных. Это число оценено с помощью метода вторых моментов в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть c — константа, $c < e^{-kr}$. Тогда с вероятностью, стремящейся к единице, не менее cn из переменных $x_1, \ldots, x_n$ не войдут в формулу $F_k(n, rn)$.*

Направлением грани $B^{n,i_1,\ldots,i_q}_{\delta_1\ldots\delta_q} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in B^n : x_{i_1} = \delta_1, \ldots, x_{i_q} = \delta_q\}$ называется множество $\{i_1, \ldots, i_q\}$ номеров координат, принимающих единственное значение в грани.

Следствие. *Пусть $r < r_k$, $c < e^{-kr}$. Тогда с вероятностью, стремящейся к единице, множество выполняющих наборов случайной формулы $(N_{F_k(n,rn)})$ может быть разбито на грани одного направления размерности cn.*

Кроме того, в параграфе сделано предположение о существовании порога присутствия граней:

Предположение. *Для любого $k \geq 2$ и для любого s, $0 < s < 1$, существует такое $r_{k,s}$, что*

если $r < r_{k,s}$, то с вероятностью, стремящейся к единице, в $N_{F_k(n,rn)}$ найдется грань размерности ns,

если $r > r_{k,s}$, то с вероятностью, стремящейся к единице, в $N_{F_k(n,rn)}$ отсутствуют грани размерности ns.

Назовем такое $r_{k,s}$ *порогом присутствия граней.*

В параграфе 2.2 доказывается существование порога в форме последовательности для присутствия граней. Для этого используется метод, который разработали E. Friedgut и J. Bourgain в 1999 году.[2] (Утверждение 4).

Леммы 5 — 9 содержат утверждения технического характера, позволяющие получить с помощью этого метода следующую теорему.

Теорема 4. *Для всех $k \geq 2$ и $s \in (0,1)$ существует такая последовательность $r_{k,s}(n)$, что для любого $\varepsilon > 0$*

если $r = (1-\varepsilon)r_{k,s}(n)$, то с вероятностью, стремящейся к единице, в $N_{F_k(n,rn)}$ найдется грань размерности ns,

если $r = (1+\varepsilon)r_{k,s}(n)$, то с вероятностью, стремящейся к единице, в $N_{F_k(n,rn)}$ отсутствуют грани размерности ns.

Теорема 4 в частности означает, что верен аналог следствия утверждения 1 для граней.

Следствие. *Зафиксируем $s \in (0,1)$, $r > 0$, $k \geq 3$. Если вероятность присутствия в $N_{F_k(n,rn)}$ грани размерности ns ограничена снизу положительной константой, не зависящей от n, то $r_{k,s} \geq r$.*

В параграфе 2.3 исследуется случайная величина, равная числу граней размерности ns в $N_{F_k(n,rn)}$,

$$X_0 = \sum_{\sigma \in G^n_{ns}} \mathbf{1}_{\sigma \subset N_{F_k(n,rn)}},$$

где G^n_{ns} — множество граней размерности ns n-мерного куба. Рассматривается вопрос, возможно ли применить к X_0 метод вторых моментов аналогично тому, как это было сделано в первой главе. Получены выражения для $\mathbf{M}X_0$ и $\mathbf{M}(X_0^2)$, и доказано, что при всех $k \geq 3$ и $r > 0$ отношение $\mathbf{M}(X_0)^2/\mathbf{M}(X_0^2)$ стремится к нулю. Таким образом, в данном случае не удается применить метод вторых моментов для оценки порога присутствия граней.

В параграфе 2.4, чтобы обойти проблемы, возникшие в предыдущем параграфе, обобщен подход из первой главы. Пусть W — множество действительнозначных функций вида $\omega(\sigma, c)$, где $\sigma \in G^n_{ns}$ — грань размерности ns n-мерного куба, а c — некоторая скобка. Рассматривается класс случайных величин

$$X = \sum_{\sigma \in G^n_{ns}} \prod_c \omega(\sigma, c),$$

где сумма берется по всем $\sigma \in G^n_{ns}$, а произведение — по всем скобкам случайной формулы, и $\omega(\sigma, c) \in W$.

Найден метод получения нижних оценок порога присутствия граней размерности ns в $N_{F_k(n,rn)}$ при $k \geq 3$. Точнее, найдена функция $g_r(\alpha, \beta)$, зависящая от параметров r, $\omega_1, \ldots, \omega_k$, такая, что верна следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть r — такое, что у функции $g_r(\alpha, \beta)$ есть единственный максимум в точке $\left(\frac{(1-s)^2}{2}, s(1-s)\right)$. Тогда $r_{k,s} \geq r$.*

Равенство

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i \binom{k}{i} \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^i (k(1-s) - 2i) = 0$$

является необходимым условием того, что $g_r(\alpha, \beta)$ достигает максимума в этой точке.

Таким образом, задача получения нижней оценки порога присутствия граней сводится к следующей задаче. Нужно найти r и параметры

$\omega_1, \ldots, \omega_k$, чтобы выполнялось условие теоремы 5. Такую задачу можно решать численными методами.

В параграфе 2.5 продемонстрирована эффективность метода при $k = 7$. Приведены нижние оценки $r_{7,s}$ для конкретных значений s, полученные с помощью теоремы 5, в сравнении с оценками, которые могут быть получены из теоремы 3.

s	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-9}
Нижняя оценка $r_{7,s}$, теорема 3	0,32	0,65	0,98	1,31	2,96
Нижняя оценка $r_{7,s}$, теорема 5	53,76	80,52	82,48	82,64	82,66

Основные результаты диссертации

1. Улучшен метод получения нижних оценок порога k-выполнимости при $k \geq 3$, разработанный D. Achlioptas и Y. Peres.
2. Улучшены нижние оценки порога k-выполнимости для $k = 4, 5, 6, 7$.
3. Доказано существование порога в форме последовательности для присутствия граней.
4. Найден метод получения нижних оценок порога присутствия граней размерности ns в $N_{F_k(n,rn)}$ при $k \geq 3$.

Публикации по теме диссертации

1. Воробьев Ф. Ю., *О нижней оценке порога* 4*-выполнимости*, VI Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем». — М.: Издательский отдел Факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2004. — С. 24.

2. Воробьев Ф. Ю., *О нижней оценке порога* 4*-выполнимости*, Тезисы докладов XIV Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2005. — С. 31.

3. Воробьев Ф. Ю., *О нижней оценке порога* 4*-выполнимости*, Дискретная математика. — 2007. — Т. 19, № 2. — С. 101–108.

4. Воробьев Ф. Ю., *О числе выполняющих наборов случайной k-КНФ*, Материалы IX Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения». — 2007. — С. 210–212.

5. Воробьев Ф. Ю., *Улучшение нижних оценок порога k-выполнимости для небольших k*, Материалы VI молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям. — № 1. — 2007. — С. 21–26.

6. Воробьев Ф. Ю., *О структуре множества выполняющих наборов случайной k-КНФ*, Прикладная математика и информатика. — 2007. — Т. 26. — С. 61–95.