МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления

На правах рукописи

МЕДВЕДЕВ Иван Сергеевич

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ НАБЛЮДАТЕЛИ МИНИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2008

Работа выполнена на кафедре нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор технических наук, академик РАН, профессор С. К. Коровин
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор А. П. Крищенко
	кандидат физико-математических наук, доцент М. В. Орлов
Ведущая организация:	Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

Защита диссертации состоится "____"____________ 2008 в ____ ч. ____ мин. на заседании Диссертационного совета Д.501.001.43 в Московском Государственном Университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, ауд. 685

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ.

Автореферат разослан "____"____________ 2008.

Учёный секретарь Диссертационного совета
профессор Е. В. Захаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Оценивание фазового вектора динамической системы по измерениям её выхода является одной из классических задач теории автоматического управления. Наблюдателем называется динамическая система, которая получает на входе известную информацию об исходной системе (ее вход и выход), а на выходе дает оценку вектора состояния системы (наблюдатель полного фазового вектора), либо оценку некоторого функционала состояния (функциональный наблюдатель). Часто желательно, чтобы размерность наблюдателя (порядок динамической системы-наблюдателя) была минимальной. Для линейных полностью определенных систем построение минимальных наблюдателей полного фазового вектора указано Люенбергером (1963-1967), однако для функциональных наблюдателей задача полностью до сих пор не решена.

В ряде случаев, например, при решении задач стабилизации, информация о полном фазовом векторе системы не требуется, и можно обойтись информацией лишь о некотором скалярном или векторном функционале от этого вектора. В связи с этим возникает задача о построении функционального наблюдателя, т.е. динамической системы, формирующей асимптотическую оценку искомого функционала. Подобная задача имеет смысл, так как размерность такого наблюдателя может оказаться ниже размерности наблюдателя Люенбергера для полного фазового вектора.

Как правило, рассматривается следующая задача: задана линейная стационарная конечномерная[1] динамическая система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu; \\ y = Cx, \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ - неизвестный фазовый вектор, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ - известные вход и выход системы, а $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $C \in \mathbb{R}^{n\times r}$ - известные постоянные матрицы. Не ограничивая общности, предполагается, что $\operatorname{rank} C = r$, то есть все выходы линейно независимы.

[1] Далее упоминание о конечномерности обычно опускается.

Пусть задан неизвестный линейный *функционал* от фазового вектора

$$\sigma(t) = Fx(t) \in \mathbb{R}^p \tag{2}$$

с известной постоянной матрицей $F \in \mathbb{R}^{p\times n}$ полного ранга[2].

Задача состоит в том, чтобы построить наблюдатель минимального порядка, использующий вход и выход исходной системы (1) и дающий на выходе асимптотическую оценку искомого функционала $\tilde{\sigma}(t)$ такую, что ошибка оценивания

$$\varepsilon(t) = \tilde{\sigma}(t) - \sigma(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Впервые возможность построения таких наблюдателей была исследована Люенбергером (1966). Оказалось, что порядок функционального наблюдателя для систем с несколькими выходами может быть понижен по сравнению с порядком наблюдателя состояния. Люенбергер использовал каноническую форму наблюдаемости для системы с многими выходами (**M**ultiple **O**utputs, MO) и доказал, что для любого *скалярного* функционала (**S**ingle **F**unction, SF) существует асимптотический наблюдатель порядка $k = \nu - 1$, где ν - индекс наблюдаемости системы. Динамические свойства такого наблюдателя могут назначаться по произволу.

Можно выделить две разновидности задач о построении функциональных наблюдателей:

1. **Построение асимптотического функционального наблюдателя минимального порядка для заданного функционала.** Единственным ограничением на наблюдатель является асимптотическая сходимость оценки к функционалу, скорость сходимости не важна.

2. **Построение минимального функционального наблюдателя для заданного функционала, обладающего произвольным заданным спектром (или произвольной заданной степенью устойчивости).** Дополнительное ограничение для этой задачи состоит в том, чтобы спектр минимального наблюдателя можно было задать произвольным устойчивым, без повышения порядка.

[2] Далее предполагается, что $p \leq n$, $\operatorname{rank} F = p$.

В большинстве известных работ динамические свойства функциональных наблюдателей назначаются по произволу, то есть решается задача второго типа. Если отказаться от этого условия, а потребовать только асимптотической (экспоненциальной) сходимости оценки, то размерность функционального наблюдателя можно уменьшить.

Необходимые и достаточные условия существования асимптотического функционального наблюдателя заданного порядка k (без ограничения на произвольность спектра) были впервые получены Fortmann и Williamson (1972). В дальнейшем, Moore и Ledwich (1975) удалось преобразовать эти условия и понизить число неизвестных, которые требуется определить при синтезе наблюдателя. В случае $r = 1$ (скалярный выход, SO) число неизвестных не превосходит k. Roman и Bullock (1973) свели вопрос к задаче о минимальной реализации некоторой динамической системы. Trinh, Tran, Nahavandi (2006) привели ранговое условие, выполнение которого для некоторого устойчивого спектра $s_1, \ldots, s_k$ гарантирует существование асимптотического наблюдателя порядка k с этим спектром. Однако, все эти методы не получили достаточно широкого применения из-за отсутствия эффективных способов решения входящих в них систем нелинейных уравнений.

Особый интерес представляет случай системы с векторным выходом и векторного же функционала (**M**ultiple **O**utputs, **M**ultiple **F**unctions, MOMF). В этом случае сложность задачи существенно выше. Можно выделить работу Darouach (2000), в которой приведены необходимые и достаточные условия существования функционального наблюдателя специального класса (без ограничения на произвольность спектра) при $k = p$, то есть с порядком, равным размерности восстанавливаемого функционала.

Tsui (1986) привел оценку *сверху* минимального порядка функционального наблюдателя с произвольным заданным спектром для системы с r выходами и p-мерного функционала:

$$k^* \leq \sum_{i=1}^{\min(p,r)} (\nu_i - 1),$$

где r - число выходов системы, p - размерность оцениваемого функционала, ν_i - индексы наблюдаемости (индексы Кронекера) системы, упорядоченные по невозрастанию, k^* - минимальный порядок наблюдателя. Работа Aldeen и Trinh (1999) дает простой алгоритм построения функционального наблюдателя с произвольным заданным спектром порядка

$$k \geq \frac{p(n-r)}{r}.$$

Многими авторами рассматривалась аналогичная задача о минимальном функциональном наблюдателе для неопределенных систем, то есть систем с неизвестной помехой на входе. Можно выделить работы Bhattacharyya (1978), Kobayashi и Nakamizo (1982), Hou и Muller (1992), Trinh и Ha (2000), Xiong и Saif (2003). В основном используемые методы сводятся к некоторому невырожденному преобразованию системы и выделению подсистемы, независимой от неизвестного возмущения.

Основная задача диссертации - построение в общем случае функционального наблюдателя минимально возможного порядка.

Для решения этой задачи, во-первых, требуется получить необходимые и достаточные условия существования функционального наблюдателя заданного порядка для данного функционала. Важно отметить, что необходимые и достаточные условия существования наблюдателя приводились в литературе и ранее, однако все они имеют достаточно сложную форму систем матричных уравнений, решение которых представляется весьма трудной задачей. Таким образом, одной из задач работы было получение необходимых и достаточных условий в минимальной форме, то есть в форме с минимальным числом неизвестных параметров. Последовательно проверяя необходимые и достаточные условия существования функционального наблюдателя для различных порядков, можно получить в точности минимальный порядок наблюдателя, для которого эти условия удовлетворены.

Во-вторых, требуется построить алгоритм синтеза функционального наблюдателя для данного функционала по заданному порядку наблюдателя. Задав алгоритму найденный минимальный порядок, можно получить искомый минимальный функциональный наблюдатель и, следовательно, решить основную задачу.

В случаях, когда не удается получить необходимые и достаточные условия в простой форме и вычислить точный минимальный порядок, требуется построить алгоритм, дающий наблюдатель по возможности наименьшего (не обязательно минимального) порядка. Также, желательно улучшить приведенные в литературе классические оценки минимального порядка наблюдателя с заданной скоростью сходимости.

Все вышеописанные задачи относятся к полностью определенным системам, однако важный класс задач составляют задачи о наблюдателях для неопределенных систем. Для таких систем ставятся те же задачи, что и для полностью определенных. Наиболее простой способ построить функциональный наблюдатель для неопределенной системы - свести проблему к задаче о функциональном наблюдателе для полностью определенной подсистемы (если такой переход возможен).

В соответствии с целью исследования были поставлены следующие задачи:

1. Развитие новых методов построения функциональных наблюдателей, применимых для широкого класса систем и функционалов.

2. Исследование вопроса о минимальном порядке функционального наблюдателя для заданного функционала. Разработка алгоритма построения минимального функционального наблюдателя.

3. Усиление существующих оценок на минимальный порядок функционального наблюдателя.

Методы исследования. В работе используются методы теории управления, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории устойчивости.

Научная новизна работы.

1. Получено необходимое и достаточное условие существования функционального наблюдателя заданного порядка для скалярной системы и векторного функционала или для векторной системы и скалярного функционала в минимальной форме.

2. Приведен новый алгоритм построения функционального наблюдателя минимального порядка.

3. Для случая векторной системы и векторного функционала получена новая оценка сверху на минимальный порядок наблюдателя, улучшающая существующие оценки.

4. Построен алгоритм синтеза наблюдателя с произвольной наперед заданной скоростью сходимости, реализующий эту оценку почти для всех функционалов.

5. Результаты для определенных систем распространены на случай систем с неопределенностью.

Теоретическая и практическая ценность. Разработаны и реализованы новые алгоритмы построения наблюдателей, которые во многих случаях позволяют существенно понизить порядок функционального наблюдателя. В приложениях часто требуется, чтобы порядок наблюдателя был минимальным, так как с порядком наблюдателя существенно растет объем вычислений, требуемый для его работы. Уменьшение порядка может дать существенный выигрыш и снизить объем вычислений в несколько раз. Такое улучшение существенно и для современных вычислительных мощностей.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. На международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам “Ломоносов-2004” (Москва, Россия, 2004 г.)

2. На научной школе-конференции “Мобильные роботы” (Москва, Россия, 2005 г.)

3. На международной конференции “Системный анализ и информационные технологии” (Обнинск, Россия, 2007 г.)

4. Неоднократно на семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством академиков РАН С.В. Емельянова и С.К. Коровина (Москва, 2004-2008).

Публикации. Содержание диссертации изложено в работах [1 – 7].

Объем и структура работы. Диссертация содержит 160 страниц текста, состоит из введения, четырех глав, трех приложений, библиографии.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обоснована актуальность исследуемой проблемы, сформулирована цель и задачи диссертационной работы, введены необходимые определения, перечислены полученные в диссертации новые результаты и описана структура диссертации.

В **Главе 1** дано подробное рассмотрение методов построения функциональных наблюдателей для случаев $p = 1$, $r = 1$ (**S**ingle **O**utput, **S**ingle **F**unction; SOSF) и $p > 1$, $r = 1$ (**S**ingle **O**utput, **M**ultiple **F**unctions; SOMF).

На примере случая SOSF в **разделах 1.1** и **1.2** проиллюстрированы два метода построения функциональных наблюдателей, описанных в диссертации - метод псевдовходов и метод скалярных наблюдателей. Первый метод имеет более широкую область применения: в частности, только он используется в случае MOMF. Второй метод позволяет получить решение более быстрым и изящным способом, однако, он не применим в случае системы с векторным выходом (MO).

Оба метода дают одинаковые необходимые и достаточные условия существования функционального наблюдателя порядка k. Наиболее простой вид эти условия принимают для систем со скалярным выходом, когда система находится в канонической форме наблюдаемости Люенбергера. Они сформулированы в виде основной теоремы

Теорема. *Пусть система (1) находится в каноническо форме наблюдаемости, $r = 1$ и $p = 1$. Линейный функционал $\sigma = fx \in \mathbb{R}$, где $f = \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \end{pmatrix}$, а $x \in \mathbb{R}^n$ - вектор состояния системы, восстанавливается наблюдателем порядка k тогда и только тогда, когда существует* *вектор* $l = (l_1, \ldots, l_k)^T$, *являющийся решением системы*

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_k \\ f_2 & f_3 & \ldots & f_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-k-1} & f_{n-k} & \ldots & f_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_{k+2} \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

и такой, что полином $p_l(s) = s^k + s^{k-1} l_k + \ldots + l_1$ *- гурвицев*[3].

Замечание. Система (3) имеет решение (не обязательно гурвицево) тогда и только тогда, когда выполнено ранговое условие:

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_k \\ f_2 & f_3 & \ldots & f_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-k-1} & f_{n-k} & \ldots & f_{n-2} \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_{k+1} \\ f_2 & f_3 & \ldots & f_{k+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-k-1} & f_{n-k} & \ldots & f_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Указан алгоритм построения минимального функционального наблюдателя для заданного функционала, использующий вышеприведенную теорему:

1. Найти минимальное значение $k = k^*$, при котором выполняется условие (4). При любом значении $k \geq k^*$ система (3) разрешима.

2. Далее перебором значений k ($k^* \leq k \leq n-1$) найти минимальное значение $k = k^{**}$, при котором среди решений системы (3) есть гурвицев столбец l.

3. Для найденного значения $k = k^{**}$ и гурвицева столбца l построить наблюдатель, такой, что $p_l(s)$ - характеристический полином матрицы наблюдателя.

В **разделе 1.3** результаты, полученные при анализе случая SOSF, распространены на случай $r = 1, p > 1$, то есть систему со скалярным выходом и векторный функционал размерности $p > 1$ (**S**ingle **O**utput, **M**ultiple **F**unctions). В случае SOMF оба метода построения наблюдателей также

[3] В дальнейшем будем называть *гурвицевым* столбцом столбец $l = (l_1, \ldots, l_k)^T$, такой, что полином $p_l(s) = s^k + s^{k-1} l_k + \ldots + l_1$ — устойчив.

приводят к одинаковым результатам, а необходимые и достаточные условия существования наблюдателя порядка k имеют чуть более сложный вид, чем в случае SOSF. Алгоритм построения наблюдателя остается прежним с точностью до вида необходимых и достаточных условий. Доказана модификация основной теоремы

Теорема. *Пусть система (1) наблюдаема и задана в канонической форме наблюдаемости, $r = 1$ и $p > 1$. Функционал $\sigma = Fx$, где $F = [f_i^j] \in \mathbb{R}^{p\times n}$; $j = 1, \ldots, p$; $i = 1, \ldots, n$, может быть восстановлен наблюдателем порядка k тогда и только тогда, когда линейная система*

$$\begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 & \cdots & f_k^1 \\ f_2^1 & f_3^1 & \cdots & f_{k+1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-k-1}^1 & f_{n-k}^1 & \cdots & f_{n-2}^1 \\ f_1^2 & f_2^2 & \cdots & f_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-k-1}^2 & f_{n-k}^2 & \cdots & f_{n-2}^2 \\ f_1^3 & f_2^3 & \cdots & f_k^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-k-1}^p & f_{n-k}^p & \cdots & f_{n-2}^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_{k+1}^1 \\ f_{k+2}^1 \\ \vdots \\ f_{n-1}^1 \\ f_{k+1}^2 \\ \vdots \\ f_{n-1}^2 \\ f_{k+1}^3 \\ \vdots \\ f_{n-1}^p \end{pmatrix} \tag{5}$$

имеет решение $(l_1, \ldots, l_k)$ такое, что полином $p_l(s) = s^k + l_k s^{k-1} + \ldots + l_1$ - гурвицев.

Более сложным является получение необходимых и достаточных условий существования функционального наблюдателя порядка k для систем с многими выходами (**M**ultiple **O**utputs, MO), описанное в **Главе 2**. В этом случае метод псевдовходов не применим, так как предполагает представление системы в виде одной передаточной функции. В случае MOSF (**M**ultiple **O**utputs, **S**ingle **F**unction) метод скалярных наблюдателей с использованием канонической формы наблюдаемости Люенбергера позволяет получить необходимые и достаточные условия, аналогичные условиям для случаев SOSF и SOMF, и аналогичный алгоритм построения наблюдателя (**раздел 2.1**). Основная теорема в этом случае имеет вид

Теорема. *Пусть система (1) наблюдаема и находится в канонической форме наблюдаемости, $r > 1$, $p = 1$ и ν_i - индексы наблюдаемости (индексы Кронекера). Функционал $\sigma = Fx$, где $F = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$, может быть восстановлен наблюдателем k-го порядка тогда и только тогда, когда система линейных уравнений*

$$\left(\begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & \cdots & f_k \\ f_2 & f_3 & \cdots & f_{k+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{\nu_1-k-1} & f_{\nu_1-k} & \cdots & f_{\nu_1-2} \\ \hline f_{\nu_1+1} & f_{\nu_1+2} & \cdots & f_{\nu_1+k} \\ f_{\nu_1+2} & f_{\nu_1+3} & \cdots & f_{\nu_1+k+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{\nu_1+\nu_2-k-1} & f_{\nu_1+\nu_2-k} & \cdots & f_{\nu_1+\nu_2-2} \\ \hline \vdots & & & \vdots \\ f_{n-k-1} & f_{n-k} & \cdots & f_{n-2} \end{array}\right) \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_k \end{pmatrix} = -\left(\begin{array}{c} f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{\nu_1-1} \\ \hline f_{\nu_1+k+1} \\ \vdots \\ f_{\nu_1+\nu_2-1} \\ \hline \vdots \\ f_{n-1} \end{array}\right) \tag{6}$$

имеет решение $l = [l_1, \ldots, l_k]^T$, где l_i - коэффициенты гурвицева полинома $p_l(s) = s^k + l_k s^{k-1} + \ldots + l_1$ с различными вещественными корнями.

Особенности наиболее сложного случая векторного выхода системы и векторного функционала (**M**ultiple **O**utputs, **M**ultiple **F**unctions) описаны в **разделе 2.2**.

В **Главе 3** подробно исследовано построение функционального наблюдателя в случае MOMF с заданной степенью устойчивости. Приведена оценка сверху на порядок минимального функционального наблюдателя в этом случае, выполненная для почти всех функционалов размерности p.

В **разделе 3.1** описан алгоритм построения функционального наблюдателя, реализующий новую оценку, исследована его облать применения. Показано, что существуют функционалы, для которых классическая оценка не может быть улучшена:

Теорема. *Пусть система (1) с r выходами находится в канонической форме наблюдаемости, индексы наблюдаемости (индексы Кронекера) $\nu_1 \geq \ldots \geq \nu_r$. Тогда среди функционалов состояния $\sigma = Fx$ заданной размер-*

ности p всегда найдется функционал, который не может быть восстановлен наблюдателем порядка менее чем $k(p) = \sum_{i=1}^{\min(r,p)}(\nu_i - 1)$.

Показано, что почти для всех функционалов эта оценка может быть улучшена, сформулирована основная теорема главы

Теорема. *Пусть система (1) с r выходами находится в канонической форме наблюдаемости, индексы наблюдаемости (индексы Кронекера)* $\nu_1 \geq \ldots \geq \nu_r$ *упорядочены по невозрастанию. Тогда почти для всех функционалов* $\sigma = Fx$ *заданной размерности* $F \in \mathbb{R}^{p\times n}$ *существует асимптотический наблюдатель порядка* k^**:*

$$
\begin{gathered}
k^*(p) = \sum_{i=1}^{r} k_i; \\
k_i = \max(\nu_i - 1 - \left[\frac{\sum_{j=1}^{i-1} k_j}{p}\right], 0), \\
k_1 = \nu_1 - 1,
\end{gathered}
\tag{7}
$$

где $[.]$ *- целая часть числа. Для любого устойчивого, вещественного и различного спектра* $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{k^*}\}$ *найдется сколь угодно близкий к нему устойчивый, вещественный и различный спектр* Λ'*, такой, что можно построить наблюдатель для функционала* σ *порядка* k^* *со спектром* Λ'.

Раздел 3.2 посвящен сравнению новой оценки с описанными в литературе. Приведены примеры выигрыша новой оценки по сравнению с классическими. Показано, что новая оценка заведомо не хуже ранее приведенной Tsui (1986) оценки:

$$
k^*(p) \leq \sum_{i=1}^{\min(p,r)} (\nu_i - 1) = k(p).
$$

Однако, далее показано, что новая оценка не всегда дает в точности минимальный порядок наблюдателя.

В **Главе 4** приведены результаты о функциональных наблюдателях для неопределенных систем. Рассматриваются системы вида

$$
\begin{cases}
\dot{x} = Ax + Dw, \\
y = Cx.
\end{cases}
\tag{8}
$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ - фазовый вектор системы; $y(t) \in \mathbb{R}^r$ - известный выход системы; $w(t) \in \mathbb{R}^m$ - неизвестное возмущение. В данной работе рассматриваются только системы с числом входов, не превосходящим число выходов $(r \geq m)$.

В **разделе 4.1** для случая гипервыходной системы $(r > m)$ указано невырожденное преобразование системы, приводящее к задаче о функциональном наблюдателе для определенной системы. Оно возможно при выполнении следующих предположений:

Предположение (П.1): $r > m$, то есть число выходов больше числа неизвестных входов.

Предположение (П.2): Матрицы C, D и CD - полного ранга, т.е.

$$\operatorname{rank} C = r; \quad \operatorname{rank} D = m; \quad \operatorname{rank} CD = m.$$

Предположение (П.3): Инвариантные нули матрицы Розенброка

$$R(s) = \left[\begin{array}{c|c} sI - A & -D \\ \hline C & 0 \end{array}\right] \in \mathbb{C}^{(n+r)\times(n+m)},$$

т.е. числа $s \in \mathbb{C}$ такие, что $\operatorname{rank} R(s) < n + m$, лежат в левой открытой полуплоскости комплексной плоскости $\mathbb{C}$, либо отсутствуют. Эти числа определяют так называемую нулевую динамику и, согласно П.3, нулевая динамика системы асимптотически устойчива либо отсутствует.

Предположение (П.4): Пара $\{C, A\}$ - наблюдаема.

В этом случае можно представить выход $y(t)$ в виде

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 x \\ C_2 x \end{pmatrix},\ y_1 \in \mathbb{R}^m,\ y_2 \in \mathbb{R}^{(r-m)},$$

и можно указать преобразование системы (8), сводящее задачу к задаче о наблюдателе для определенной системы пониженного порядка

$$\begin{cases} \dot{x}' = A_{11}x' + A_{12}y_1, \\ \tilde{y} = C_2' x' \end{cases} \tag{9}$$

где $x' \in \mathbb{R}^{(n-m)}$ - неизвестный фазовый вектор, а $\tilde{y} = y_2 - C_2'' y_1$, где $C_2'' \in \mathbb{R}^{(r-m)\times m}$ - постоянная матрица. В представлении (9) x' не зависит явно от возмущения $w(t)$. Таким образом, для системы (9) с известными входом y_1

и выходом $\tilde{y}$ уже можно строить наблюдатель описанными выше методами для полностью определенных систем.

В конце раздела приведены сформулированные в явном виде результаты о функциональных наблюдателях для гипервыходных неопределенных систем.

Раздел **4.2** посвящен рассмотрению квадратных систем ($r = m$). Здесь, как и в случае гипервыходной системы, проводится преобразование системы с выделением нулевой динамики. Далее, к полученной MOSF-системе непосредственно применяется метод скалярных наблюдателей, что позволяет получить необходимое и достаточное условие существования наблюдателя порядка k. При этом собственные значения наблюдателя могут выбираться только из собственных значений нулевой динамики системы, которая должна быть устойчивой.

В **Приложении A** рассмотрен вопрос о грубости необходимых и достаточных условий существования наблюдателя, сформулированных в Главе 1. Приведены условия, при выполнении которых решение, определяемое этими условиями, будет продолжать существовать при небольших изменениях системы и функционала.

В **Приложении B** подробно исследована задача о существовании гурвицева решения у системы линейных уравнений специального вида (3). В **разделе B.1** дано необходимое условие существование решения у таких систем, использующее тот факт, что гурвицево решение всегда положительно. В **разделе B.2** даны решения в явном виде для некоторых частных случаев системы (3). В **разделе B.3** приведены различные свойства пространства решений систем уравнений специального вида, связанные как с разрешимостью, так и с существованием гурвицева решения.

Наконец, **Приложение C** содержит коды программ в системе MATLAB, реализующие описанные в диссертации алгоритмы построения наблюдателей.

Основные результаты работы:

1. Получены в легко вычислимой форме необходимые и достаточные условия существования функционального наблюдателя заданного порядка для данного функционала; для случаев $p = 1$, $r \geq 1$ (SOSF, SOMF) и $p > 1$, $r = 1$ (MOSF);

2. Разработан алгоритм построения минимального функционального наблюдателя для заданного функционала в этих случаях.

3. Получена оценка минимального порядка функционального наблюдателя с произвольной скоростью сходимости для общего случая $p \geq 1$, $r \geq 1$ (MOMF), выполняющаяся почти для всех функционалов и в большинстве случаев улучшающая существующие оценки.

4. Результаты для определенных систем распространены на линейные системы с неопределенностью.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Фомичев В.В., Медведев И.С. Построение функциональных наблюдателей для неопределенных систем. // Дифференц. уравнения, 2004, Т.40, №8, 1146-1147.

2. Коровин С.К., Медведев И.С., Фомичев В.В. Минимальные функциональные наблюдатели // Докл. РАН. 2005, Т.404, №3, 316-321.

3. Коровин С.К., Медведев И.С., Фомичев В.В. Функциональные наблюдатели для линейных систем с неопределенностью // Дифференц. уравн. 2006, Т.42, №10, 1307-1317.

4. Коровин С.К., Медведев И.С., Фомичев В.В. Функциональные наблюдатели минимального порядка //Нелинейная динамика и управление. Вып. 5. М.: Физматлит, 2006, 25-44.

5. Коровин С.К., Ильин А.В., Медведев И.С., Фомичев В.В. К теории функциональных наблюдателей и стабилизаторов заданного порядка // Докл. РАН. 2006, Т.409, №5, 601-605.

6. Коровин С.К., Медведев И.С., Фомичев В.В. Функциональные наблюдатели для линейных неопределенных стационарных динамических систем // Докл. РАН. 2006, Т.411, №1, 316-320.

7. Медведев И.С. Оценка гарантированного минимального порядка функционального наблюдателя для случая векторной системы и векторного функционала // Дифференц. уравнения, 2007, Т.43, №2, 282-283.