На правах рукописи

ПАВЛОВА НАТАЛЬЯ ГЕННАДЬЕВНА

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ И УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена в Российском университете дружбы народов

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Арутюнов Арам Владимирович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Васильев Федор Павлович

доктор физико-математических наук,
профессор Никольский Михаил Сергеевич

Ведущая организация:

Институт системного анализа РАН

Защита состоится "___"__________ 2008 г. в ___ на заседании диссертационного совета Д.501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119899, ГСП, Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВМиК, ауд. .

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВМиК МГУ.

Автореферат разослан "___"__________ 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
д. ф.-м.н., профессор

Е.В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В настоящее время математический аппарат теории оптимального управления системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями, разработан достаточно полно. Фундаментальным результатом, полученным в этой области является принцип максимума Л.С. Понтрягина.

Одним из важных разделов теории оптимального управления является исследование задач оптимального импульсного управления, где изучаются динамические процессы с разрывными траекториями и обобщенными управлениями импульсного типа – векторными мерами. Это обусловлено в частности тем, что многие задачи оптимального управления, первоначально поставленные как классические, не имеют решения в традиционном классе абсолютно непрерывных траекторий и измеримых ограниченных управлений. Если в классической задаче оптимального управления множество допустимых значений управления неограничено, то в общем случае задача может не иметь решения в классе обычных управлений.

Первые прикладные задачи, имеющие подобные особенности, возникли в ракетодинамике. Наиболее ярким примером является широко известная задача Лоудена о переводе космического корабля с одной орбиты на другую при минимальном расходе топлива.

Наглядным примером импульсного воздействия в макроэкономике могут служить так называемые монетарные импульсы — резкие изменения денежной массы в обращении. Они вызывают скачкообразное изменение ценовых уровней — важнейших показателей функционирования экономической системы. При попытке описать динамику цен с учетом монетарных импульсов мы вновь сталкиваемся с необходимостью рассматривать разрывные траектории.

Многочисленные примеры моделирования скачкообразных процессов возникают при решении технических задач. Например, реакция опоры при ударном столкновении с нею ног шагающего робота или лазерное излучение в квантовой электронике являются импульсными по своей природе. Поэтому их моделирование также невозможно без введения обобщенных траекторий. Траекторные компоненты минимизирующих последовательностей в таких задачах сводятся к разрывным функциям, а управляющие функции характеризуются наличием дельтообразных составляющих и сходятся в смысле распределений. Поэтому возникает проблема расширения этого класса задач, направленная на включение предельных элементов в множество допустимых процессов. На этом пути и возникают задачи импульсного управления.

В становление и развитие теории оптимального импульсного управления важнейший вклад внесли работы Н.Н. Красовского[1], А.Б. Куржанского[2], Ю.С. Осипова, В.Ф. Кротова, А.Г. Ченцова, А. Брессана, Дж. Варги, Р. Винтера, В.И. Гурмана[3], М.И. Гусева, В.А. Дыхты, О.Н. Самсонюк[4], С.Т. Завалищина, А.Н. Сесекина[5], А.Д. Иоффе, Г.А. Колокольниковой, Б.М. Миллера, Ю.В. Орлова, Ф. Перейры, Ф. Рампаццо, Р. Ришела, Р. Рокафеллара, В.М. Тихомирова и др. Важнейшую роль при получении условий оптимальности и управляемости для вырожденных управляемых систем сыграли работы Е.Р. Авакова, А.А. Аграчева, А.В. Арутюнова, А.А. Милютина.

Основным отличием этой диссертационной работы является получение условий оптимальности и управляемости без априорных предположений невырожденности (нормальности) исследуемых процессов.

Цель работы Основными целями диссертационной работы являются:

- изучение условий регулярности, 2-регулярности и 2- нормальности применительно к управляемым системам;
- получение необходимых и достаточных условий 2-регулярности и достаточных условий 2-нормальности для управляемых систем;
- исследование локальной управляемости динамических систем при наличии импульсных управлений;
- получение необходимых условий оптимальности второго порядка для управляемых систем с импульсными управлениями, содержательных и в анормальном случае.

Методика исследований. Поставленные в диссертации вопросы решаются с применением методов функционального анализа, теории функций вещественной переменной, дифференциальных уравнений, теории экстремальных задач и теории возмущений.

[1] Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. - М.: Наука, 1968. -475 с.

[2] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. - М.: Наука, 1977. - 392 с.

[3] Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. -М.: Наука, 1977. -304 с.

[4] Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. -М.: Физматлит, 2000. -255 с.

[5] Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы: Модели и приложения. -М.: Наука, 1991. -256 с.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми. Среди них можно выделить следующие наиболее важные:

1. Исследованы условия регулярности, 2-регулярности и 2- нормальности применительно к управляемым системам, в том числе системам с импульсными управлениями. Получены необходимые, а также достаточные условия 2-регулярности и достаточные условия 2-нормальности этих систем.

2. Исследована локальная управляемость динамических систем с импульсными управлениями. Показано, что 2-регулярный по некоторому направлению процесс локально управляем. Получены достаточные условия локальной управляемости 2-нормальных процессов.

3. Исследована близость необходимых и достаточных условий экстремума для 2-нормальных процессов с импульсными управлениями.

4. Для управляемых динамических систем с импульсными управлениями получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядка, содержательные и без априорных предположений нормальности.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты применяются при исследовании управляемых систем. Диссертационная работа может представлять интерес для специалистов в области оптимального и импульсного оптимального управления. Результаты диссертации могут составить содержание специального курса для студентов физико-математических факультетов.

Достоверность и обоснованность полученных в диссертационной работе результатов вытекает из проведенной проверки полученных решений, а также из совпадения ряда полученных результатов в частных случаях с известными в литературе.

Аппробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- Воронежских весенних математических школах "Понтрягинские чтения - XVI, XX"(Воронеж, 2005, 2008);

- XLII, XLIV Всероссийских конференциях по проблемам математики, информатики, физики и химии (Москва, РУДН, 2006, 2008);

- семинаре кафедры нелинейных динамических систем факультета ВМиК МГУ (рук. академик РАН, проф. С.К. Коровин, 2008);

- семинаре кафедры оптимального управления факультета ВМиК МГУ (рук. д.ф.-м.н., проф. Ф.П. Васильев, д.ф.-м.н., проф. А.В.Дмитрук, 2008);

- семинаре кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ (рук. д.ф.-м.н., проф. М.И. Зеликин, 2008);

- семинаре кафедры нелинейного анализа и оптимизации Российского университета дружбы народов (рук. д.ф.-м.н., проф. А.В. Арутюнов, к.ф.-м.н., доц. В.Н. Розова, 2004 - 2008).

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в работах [1-6]. Из совместной работы [1] в диссертацию включены только те результаты, которые получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация объемом 139 страниц состоит из четырех глав, каждая из которых разделена на параграфы, и библиографического списка. Нумерация теорем, предложений, лемм, определений, замечаний, а также ссылок на формулы сквозная в пределах каждой главы.

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, сформулирована цель работы, описана структура и дан краткий обзор работы, изложены основные научные результаты, выносимые на защиту, раскрыта научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

В первой главе диссертации рассматривается управляемая динамическая система, содержащая импульсные управления

$$dx(t) = f(x(t), u(t), t)dt + G(t)d\mu(t),\ t \in [t_1, t_2], \tag{1}$$

$$x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2, \tag{2}$$

$$W(x_1, x_2) = 0,\ \mu \in \mathbb{K}. \tag{3}$$

Здесь $t \in [t_1, t_2]$ — время, $t_1 < t_2$ заданы, x — фазовая переменная, принимающая значения в n-мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ - управление, f — n-мерная, G —$n \times k$-мерная, а W — w-мерная вектор-функции (n, m, w — натуральные числа). Функция W предполагается дважды непрерывно дифференцируемой, а функция G — непрерывной. n-мерная вектор-функция f удовлетворяет следующим предположениям: при почти всех фиксированных t

$f(x,u,t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая по (x,u) функция; для любых фиксированных (x,u) функции $f(x,u,t)$, $\partial f(x,u,t)/\partial(x,u)$, $\partial^2 f(x,u,t)/\partial(x,u)^2$ измеримы по t и на любом ограниченном множестве ограничены и непрерывны по (x,u) равномерно по t.

$$\mathbb{K} = \Bigg\{ \mu \in C^*\left([t_1,t_2];\mathbb{R}^k\right) : \forall \text{ непрерывной функции } \ \varphi : \varphi(t) \in K^* \ \forall\, t,$$

$$\int_B \varphi(t) d\mu \geq 0 \ \ \forall \text{ борелевского множества } \ B \subset [t_1,t_2] \Bigg\},$$

где $K \subseteq \mathbb{R}^k$ — заданный острый выпуклый замкнутый конус, K^* — его сопряженный. Другими словами, μ — k-мерная мера Бореля, такая, что $\mu(B) \subset K$ для любого борелевского множества B.

В качестве класса допустимых управлений рассматривается множество пар $(u,\mu): \ \mu \in \mathbb{K}, \ \ u \in L_\infty^m[t_1,t_2]$.

Тройка $(x(t),u(t),\mu(t)), \ \ t \in [t_1,t_2]$, называется допустимым процессом, если $(u(\cdot),\mu(\cdot))$ — допустимое управление, а $x(\cdot)$ — соответствующее ему решение уравнения (1), т.е.

$$x(t) = x(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} f(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \int\limits_{[t_1,t]} G(\tau)\mu(\tau) \ \ \forall\, t \in (t_1,t_2], \tag{4}$$

которое удовлетворяет концевым ограничениям (2), (3). В силу регулярности меры μ функция $x(\cdot)$ непрерывна слева.

В главе 1 исследованы условия 2-регулярности и 2-нормальности применительно к управляемой системе (1)- (3), а также для соответсвующей ей классической управляемой системы. Кроме того, получены необходимые и достаточные условия 2-регулярности и достаточные условия 2-нормальности.

Глава 2 посвящена исследованию локальной управляемости динамических систем.

Рассматривается управляемая динамическая система

$$\dot{x} = f(x,u,t), \ t \in [t_1,t_2], \tag{5}$$

$$x(t_1) = x_1. \tag{6}$$

Функция f удовлетворяет тем же предположениям, что и выше.

В качестве класса допустимых управлений рассматривается множество измеримых существенно ограниченных функций $u \in L_\infty^m[t_1,t_2]$.

Пара вектор-функций $(x(t),u(t)), t\in[t_1,t_2]$, называется допустимым процессом, если $u(\cdot)$ — допустимое управление, а $x(\cdot)$ — соответствующее ему решение уравнения (5), удовлетворяющее начальному условию (6).

Фиксируем точку $(\hat{x}_1,\hat{u}(\cdot))\in\mathbb{R}^n\times L_\infty^m[t_1,t_2]$, такую, что $(\hat{x},\hat{u})$ — допустимый процесс, и $\hat{x}(t_1)=\hat{x}_1$.

Для заданного $\xi(\cdot)\in L_\infty^m[t_1,t_2]$ через $\delta_1 x_\xi(\cdot)$ обозначим решение системы уравнений в вариациях

$$\frac{d}{dt}\delta_1 x_\xi=\frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)\delta_1 x_\xi+\frac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)\xi(t)$$

с начальным условием

$$\delta_1 x_\xi(t_1)=0.$$

Для заданных $\xi(\cdot),\eta(\cdot)\in L_\infty^m[t_1,t_2]$ через $\delta_2 x_{\xi\eta}(\cdot)$ обозначим решение системы уравнений в вариациях

$$\frac{d}{dt}(\delta_2 x_{\xi\eta})(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)\delta_2 x_{\xi\eta}(t)dt+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)[\delta_1 x_\xi(t),\delta_1 x_\eta(t)]+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)[\delta_1 x_\xi(t),\eta(t)]+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)[\delta_1 x_\eta(t),\xi(t)]+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)[\xi(t),\eta(t)]$$

с начальным условием

$$\delta_2 x_{\xi\eta}(t_1)=0.$$

Положим $T(\hat{x}_1,\hat{u}(\cdot))=\{h\in L_\infty^m[t_1,t_2]:\delta_1 x_h(t_2)=0,\ \exists g\in L_\infty^m[t_1,t_2]: \delta_2 x_{hh}(t_2)=\delta_1 x_g(t_2)\}$.

Определение 2.1. Пусть $h\in T(\hat{x}_1,\hat{u}(\cdot))$. Для задачи (5), (6) в точке $(\hat{x}_1,\hat{u}(\cdot))$ выполнено условие 2-регулярности по направлению h, если

$$\forall\, y\in\mathbb{R}^n\ \ \exists\,\xi_1,\xi_2\in L_\infty^m[t_1,t_2]:$$

$$\delta_1 x_{\xi_1}(t_2)+\delta_2 x_{h\xi_2}(t_2)=y,$$

$$\delta_1 x_{\xi_2}(t_2)=0.$$

Обозначим через P оператор ортогонального проектирования $\mathbb{R}^n$ на ортогональное дополнение подпространства $\{y\in\mathbb{R}^n:\exists\xi\in L_\infty^m[t_1,t_2]: y=\delta_1 x_\xi(t_2)\}$.

Показано, что 2-регулярный по некоторому направлению процесс является локально управляемым, а именно, доказана

Теорема 2.1. Если для задачи (5), (6) в точке $(\hat{x}_1,\hat{u}(\cdot))$ выполнено условие 2-регулярности по некоторому направлению h, то процесс

$(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ является локально управляемым из точки $\hat{x}_1\in\mathbb{R}^n$ в точку $\hat{x}(t_2)$, т.е. существуют константы κ_1, κ_2 такие, что

$$\forall z:\ |z-\hat{x}(t_2)|<\kappa_1\ \ \exists u_z\in L^m_\infty[t_1,t_2]: x(t_2)=z,$$

$$\| u_z-\hat{u}\|_{L^m_\infty}\le\kappa_2(|\hat{x}(t_2)-z|+|P(\hat{x}(t_2)-z)|^{1/2}),$$

где $x(\cdot)$ — решение задачи Коши

$$\dot{x}=f(x,u_z(t),t),\ t\in[t_1,t_2],\ x(t_1)=\hat{x}(t_1).$$

Получено достаточное условие, гарантирующее локальную управляемость 2-нормального процесса.

Проведено исследование локальной управляемости систем с импульсными управлениями.

Рассматривается управляемая динамическая система

$$dx(t)=f(x(t),u(t),t)dt+G(t)d\mu(t),\ t\in[t_1,t_2], \tag{7}$$

$$x(t_1)=x_1,\ \mu\in\mathbb{K}. \tag{8}$$

Функции f и G удовлетворяют тем же предположениям, что и выше.

В качестве класса допустимых управлений рассматривается множество пар $(u,\mu):\ u\in L^m_\infty[t_1,t_2],\ \ \mu\in\mathbb{K}$.

Тройка $(x(t),u(t),\mu(t)),\ \ t\in[t_1,t_2]$, называется допустимым процессом, если $(u(\cdot),\mu(\cdot))$ — допустимое управление, а $x(\cdot)$ — соответствующее ему решение уравнения (7), т.е. имеет место (4), которое удовлетворяет начальному условию из (8).

Фиксируем точку $(\hat{x}_1,\hat{u}(\cdot),\hat{\mu}(\cdot))\in\mathbb{R}^n\times L^m_\infty[t_1,t_2]\times\mathbb{K}$, такую, что $(\hat{x},\hat{u},\hat{\mu})$ — допустимый процесс, и $\hat{x}(t_1)=\hat{x}_1$.

Для заданных $\xi(\cdot)\in L^m_\infty[t_1,t_2]$, $\nu\in\mathbb{T}_{\mathbb{K}}(\hat{\mu})$ через $\delta_1x_{\xi\nu}(\cdot)$ обозначим решение системы уравнений в вариациях

$$d(\delta_1x_{\xi\nu})(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)\delta_1x_{\xi\nu}(t)dt+\frac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)\xi(t)dt+G(t)d\nu(t)$$

с начальным условием

$$\delta_1x_{\xi\nu}(t_1)=0.$$

Для заданных $\xi(\cdot),\eta(\cdot)\in L^m_\infty[t_1,t_2]$, $\nu,\theta\in\mathbb{T}_{\mathbb{K}}(\hat{\mu})$ через $\delta_2x_{\xi\eta\nu\theta}(\cdot)$ обозначим решение системы уравнений в вариациях

$$d(\delta_2x_{\xi\eta\nu\theta})(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)\delta_2x_{\xi\eta\nu\theta}(t)dt+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)[\delta_1x_{\xi\nu}(t),\delta_1x_{\eta\theta}(t)]+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)[\delta_1x_{\xi\nu}(t),\eta(t)]+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)[\delta_1x_{\eta\theta}(t),\xi(t)]+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)[\xi(t),\eta(t)]$$

с начальным условием

$$\delta_2 x_{\xi\eta\nu\theta}(t_1)=0.$$

Положим $C=\{y\in\mathbb{R}^n:\exists\xi\in L^m_\infty[t_1;t_2],\exists\nu\in\mathbb{T}_{\mathbb{K}}(\hat{\mu})+\mathrm{Lin}\{\hat{\mu}\}:\delta_2\mathrm{x}_{\xi\nu}(\mathrm{t}_2)=\mathrm{y}\}$.

Положим $T(\hat{x}_1,\hat{u}(\cdot),\hat{\mu}(\cdot))=\{(h,g)\in L^m_\infty[t_1,t_2]\times(\mathbb{T}_{\mathbb{K}}(\hat{\mu})+\mathrm{Lin}\{\hat{\mu}\}):\delta_1\mathrm{x}_{\mathrm{hg}}(\mathrm{t}_2)=0,\ \exists(\bar{\mathrm{h}},\bar{\mathrm{g}})\in\mathrm{L}^{\mathrm{m}}_\infty[\mathrm{t}_1,\mathrm{t}_2]\times(\mathbb{T}_{\mathbb{K}}(\hat{\mu})+\mathrm{Lin}\{\hat{\mu}\}):\ -\delta_2\mathrm{x}_{\mathrm{hhgg}}(\mathrm{t}_2)=\delta_1\mathrm{x}_{\bar{\mathrm{h}},\bar{\mathrm{g}}}(\mathrm{t}_2)\}$.

Определение 2.5. Пусть $(h,g)\in T(\hat{x}_1,\hat{u}(\cdot),\hat{\mu}(\cdot))$. Для задачи (7), (8) в точке $(\hat{x}_1,\hat{u}(\cdot),\hat{\mu}(\cdot))$ выполнено условие 2-регулярности относительно K по направлению (h,g), если

$$\forall\, y\in\mathbb{R}^n\ \ \exists\,\xi_1,\xi_2\in L^m_\infty[t_1,t_2],\ \exists\nu_1,\nu_2\in\mathbb{T}_{\mathbb{K}}(\hat{\mu})+\mathrm{Lin}\{\hat{\mu}\}:$$

$$\delta_1 x_{\xi_1\nu_1}(t_2)+\delta_2 x_{h\xi_2 g\nu_2}(t_2)=y,$$
$$\delta_1 x_{\xi_2\nu_2}(t_2)=0.$$

Теорема 2.6. Пусть для задачи (7), (8) в точке $(\hat{x}_1,\hat{u}(\cdot),\hat{\mu}(\cdot))$ выполнено условие 2-регулярности относительно K по некоторому направлению (h,g). Тогда процесс $(\hat{x}_1,\hat{u}(\cdot),\hat{\mu}(\cdot))$ является локально управляемым из точки $\hat{x}_1\in\mathbb{R}^n$ в точку $\hat{x}(t_2)$, то есть для произвольного $l\in\mathrm{riC}$ существуют константы $\kappa_1>0$, $\kappa_2>0$, $\kappa_3>0$ такие, что

$$\forall z:\ |z-\hat{x}(t_2)|<\kappa_1\ \ \exists u_z\in L^m_\infty[t_1,t_2],\ \mu_z\in\mathbb{K}(\mathbb{T}_{\mathbb{K}}(\hat{\mu})+\mathrm{Lin}\{\hat{\mu}\}):$$

$$x(t_2)=z,$$

$$\parallel u_z-\hat{u}\parallel_{L^m_\infty}+\parallel\mu_z-\hat{\mu}\parallel_{C^*}\le\kappa_2\left(|\hat{x}(t_2)-z|+\rho(\hat{x}(t_2)-z,C_{\kappa_3})^{1/2})\right),$$

где $x(\cdot)$ — решение задачи Коши

$$dx(t)=f(x(t),u_z(t),t)dt+G(t)d\mu_z(t),\ x(t_1)=\hat{x}(t_1),$$

ρ— расстояние от точки до множества и $C_{\kappa_3}=cone(B_{\kappa_3}(l))\cap LinC$.

В третьей главе диссертации исследована близость между необходимыми и достаточными условиями экстремума для 2-нормальных задач оптимального импульсного управления.

Рассматривается задача оптимального импульсного управления, заключающаяся в минимизации функционала

$$J=J(x_1,u,\mu)=W_0(x_1,x_2)+\int\limits_{t_1}^{t_2}f^0(x(t),u(t),t)dt+\int\limits_{[t_1,t_2]}g^0(t)d\mu(t)\to min \quad (9)$$

на множестве допустимых процессов, описываемых дифференциальной связью и концевыми ограничениями (1)-(3).

Здесь g^0 —k-мерная вектор-функция, W_0 и f^0 — скалярные функции. Функция W_0 предполагается дважды непрерывно дифференцируемой, функция f^0 — дважды дифференцируемой по x и u для п.в. $t \in [t_1, t_2]$, а функция g^0 — непрерывной.

Определим на множествах $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{1+w}$ гамильтониан и малый лагранжиан по формулам

$$H(x, u, t, \psi, \lambda^0) = \langle f(x, u, t), \psi \rangle - \lambda^0 f^0(x, u, t),$$

$$l(x_1, x_2, \lambda) = \lambda^0 W_0(x_1, x_2) + \left\langle \lambda^1, W(x_1, x_2) \right\rangle, \ \lambda = (\lambda^0, \lambda^1).$$

Здесь $\lambda^0 \in \mathbb{R}^1$, $\lambda^1 \in \mathbb{R}^w$, а ψ — n-мерный вектор-столбец. Пусть $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$— заданный допустимый процесс.

Определение 3.1. Процесс $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа, если существует такой вектор $\lambda \neq 0$, что $\lambda^0 \geq 0$ и для вектор-функции ψ, являющейся решением задачи Коши

$$\dot{\psi} = -\partial H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t, \psi(t))/\partial x, \ \ \psi(t_1) = \partial l(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda)/\partial x_1,$$

имеет место

$$\partial H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t, \psi(t), \lambda^0)/\partial u = 0 \ \text{ для п.в.}\, t \in [t_1, t_2],$$

$$\psi(t_2) = -\partial l(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda)/\partial x_2,$$
$$\langle \psi(t), G(t)v \rangle - \lambda^0 \left\langle g^0(t), v \right\rangle \leq 0 \ \forall v \in K, \ \forall t \in [t_1, t_2],$$
$$\langle \psi(t), G(t)\hat{v}(t) \rangle - \lambda^0 \left\langle g^0(t), \hat{v}(t) \right\rangle = 0 \ \text{ для } \hat{\mu} - \text{п.в. } t \in [t_1, t_2].$$

Здесь $\hat{v}(t) = \frac{d\hat{\mu}}{d|\hat{\mu}|}(t)$ — производная Радона-Никодима, $|\hat{\mu}|$ — полная вариация $\hat{\mu}$, $\hat{x}_1 = \hat{x}(t_1)$, $\hat{x}_2 = \hat{x}(t_2)$.

Обозначим через $\Lambda(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ множество всех векторов λ, которые отвечают заданной экстремали $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ в силу уравнений Эйлера-Лагранжа.

Если конус Λ не содержит элементов вида $(0, \lambda^1)$ (т.е. элементов с $\lambda^0 = 0$), то задача называется нормальной. В противном случае задачу называют анормальной и для нее необходимые условия первого порядка выполняются тривиально.

Для формулировки условий второго порядка для процесса $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ введем в рассмотрение систему уравнений в вариациях

$$d(\delta x) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)\delta x dt + \frac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)\delta u(t) dt + G(t) d(\delta \mu)(t). \quad (10)$$

Здесь $\delta u \in L^m_\infty[t_1,t_2]$, $\delta\mu \in \mathbb{T}_{\mathbb{K}}(\hat\mu)$, а решение уравнения в вариациях должно удовлетворять условию

$$\frac{\partial W}{\partial x_1}(\hat x_1,\hat x_2)\delta x(t_1)=0,\ \frac{\partial W}{\partial x_2}(\hat x_1,\hat x_2)\delta x(t_2)=0. \tag{11}$$

Пусть $\lambda \in \Lambda(\hat x,\hat u,\hat\mu)$. На пространстве $V = R^n \times L^m_\infty[t_1,t_2]$ пар $(\zeta,\delta u)$ определим квадратичную форму Ω_λ формулой

$$\Omega_\lambda(\zeta,\delta u)=\frac{\partial^2 l}{\partial(x_1,x_2)^2}(\hat x_1,\hat x_2,\lambda)\left[(\delta x(t_1),\delta x(t_2)),(\delta x(t_1),\delta x(t_2))\right]-$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 H}{\partial(x,u)^2}(\hat x,\hat u,t,\psi)\left[(\delta x(t),\delta u(t)),(\delta x(t),\delta u(t))\right]dt.$$

Здесь и далее δx — соответствующее $(\delta u,\delta\mu)$ решение системы уравнений в вариациях (10) с начальным условием $\delta x(t_1)=\zeta$.

Через $\mathcal{X}$ обозначим линейное подпространство $X = R^n \times L^m_\infty[t_1,t_2] \times C^*$, состоящее из всех тех $(\zeta,\delta u,\delta\mu)$, что решение системы (10) δx удовлетворяет граничным условиям (11). Для произвольного целого неотрицательного числа r через $\Lambda_r = \Lambda_r(\hat x,\hat u,\hat\mu)$ обозначим множество тех $\lambda \in \Lambda(\hat x,\hat u,\hat\mu)$, для которых индекс сужения формы Ω_λ на подпространство $\mathcal{X}$ не превышает r.

Пусть Φ — фундаментальная матрица системы уравнений в вариациях (10), т.е. Φ является решением однородной системы

$$\frac{d}{dt}\Phi=\frac{\partial f}{\partial x}(\hat x(t),\hat u(t),t)\Phi,\ \Phi(t_1)=I,$$

где I—единичная матрица. Обозначим через d размерность ядра блочной матрицы $(Z_1^*Z_2^*)$, где

$$Z_1=\frac{\partial W}{\partial x_1}(\hat x_1,\hat x_2)+\Phi(t_2)\frac{\partial W}{\partial x_2}(\hat x_1,\hat x_2),$$

$$Z_2=\frac{\partial W}{\partial x_2}(\hat x_1,\hat x_2)^*\Phi(t_2)^*\int\limits_{t_1}^{t_2}\Phi^{-1}(t)^*\frac{\partial f}{\partial u}(\hat x(t),\hat u(t),t)^*\frac{\partial f}{\partial u}(\hat x(t),\hat u(t),t)\Phi^{-1}(t)dt\times$$

$$\times\Phi(t_2)\frac{\partial W}{\partial x_2}(\hat x_1,\hat x_2).$$

Теорема 3.1. Пусть допустимый процесс $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ является слабым локальным минимумом в задаче (1)-(3), (9). Тогда $\Lambda_d \neq \emptyset$ и для $(\zeta, \delta u, \delta\mu) \in \mathcal{X}$, таких, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left\langle \delta x(t), \frac{\partial f^0}{\partial x}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) \right\rangle + \left\langle \delta u(t), \frac{\partial f^0}{\partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) \right\rangle \right] dt +$$

$$+ \int_{[t_1,t_2]} \langle g^0(t), \delta\hat{\mu} \rangle + \left\langle \frac{\partial W_0}{\partial(x_1, x_2)}(\hat{x}_1, \hat{x}_2), (\delta x(t_1), \delta x(t_2))^T \right\rangle \leq 0,$$

имеет место

$$\max_{\lambda \in \Lambda_d, |\lambda|=1} \Omega_\lambda(\zeta, \delta u) \geq 0. \tag{12}$$

Пусть экстремаль $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ анормальна (т.е. $d > 0$). Тогда если $conv\,\Lambda_d$ содержит ненулевое подпространство, то условие (12) выполняется автоматически, так как максимум зависящей от переменной λ линейной функции по множеству, содержащему одновременно два вектора $\bar{\lambda}$ и $(-\bar{\lambda})$, неотрицателен. Таким образом, если конус $conv\,\Lambda_d$ не является острым, то условие (12) содержательной информации не несет. Приведенная ниже теорема показывает, что в 2-нормальном случае это не так. Оказывается, что в этом случае "зазор" между необходимыми условиями из теоремы 3.1 и достаточными условиями локального минимума в некотором смысле неулучшаем:

Определение 3.2. Допустимый процесс $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ называется конечномерным минимумом, если для любого содержащего точку $\hat{u}$ конечномерного подпространства $R_1 \subset L_\infty^m[t_1, t_2]$ и любого содержащего точку $\hat{\mu}$ конечномерного подпространства $R_2 \subset C^*$ процесс $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ является локальным минимумом в задаче (1)-(3), (9) с дополнительным ограничением $u(\cdot) \in R_1$, $\mu(\cdot) \in R_2$.

Предположим, что концевые ограничения регулярны, т.е.
$rank\frac{\partial W}{\partial(x_1,x_2)}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = w$.

Теорема 3.2. Предположим, что допустимый процесс $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ является 2-нормальным для задачи (1)-(3), (9) и для него выполняются необходимые условия второго порядка из теоремы 3.1.

Предположим также, что матрица $\partial f(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)/\partial u$ имеет ранг m при почти всех t и существует непрерывная n-мерная функция ξ такая, что $\xi(t)G(t) \equiv 0$ и $\xi(t)\frac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) = 0$ для п.в.$t \in [t_1, t_2]$.Тогда существуют такие вектор $v \in \mathbb{R}^w$ и вектор-функция $\beta(t) \in L_\infty^n[t_1, t_2]$, что для любого $\varepsilon > 0$ тройка $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ доставляет строгий конечномерный минимум в следующей возмущенной задаче:

$$W_0(x_1, x_2) + \varepsilon|(x_1, x_2) - (\hat{x}_1, \hat{x}_2)|^2 +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(f^0(x(t),u(t),t)+\varepsilon|x(t)-\hat{x}(t)|^2\right)dt+\int\limits_{[t_1,t_2]} g^0(t)d\mu(t)\to min,$$

$$dx(t)=f(x(t),u(t),t)dt+\varepsilon\beta(t)|x(t)-\hat{x}(t)|^2dt+G(t)d\mu(t),\ t\in[t_1,t_2],$$

$$W(x_1,x_2)+\varepsilon v|(x_1,x_2)-(\hat{x}_1,\hat{x}_2)|^2=0,\ \mu\in\mathbb{K}.$$

В четвертой главе получены необходимые условия оптимальности второго порядка для задачи (1)-(3), (9), основанные на модифицированной функции Лагранжа (функции Лагранжа - Авакова).

Обозначим через $L_1=L_1(t,x,\dot{x},u,d\mu,\psi)$ функцию

$$L_1=\langle\psi,\dot{x}-f(x,u,t)-G(t)d\mu(t)\rangle\,,\quad L_1:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},$$

а через $L_2=L_2(t,x,\dot{x},u,d\mu,p,\psi,\lambda_0,\delta_1x^h_{g\rho},g)$ функцию

$$L_2=\lambda_0\left(f^0(x,u,t)+g^0(t)d\mu(t)\right)+\langle p,\dot{x}-f(x,u,t)-G(t)d\mu(t)\rangle-$$

$$-\left\langle\psi,f_x(x,u,t)\delta_1x^h_{g\rho}+f_u(x,u,t)g\right\rangle,$$

$$L_2:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}.$$

Для заданных $h\in\mathbb{R}^n$, $g(\cdot)\in L^m_\infty[t_1,t_2]$, $\rho\in T_{\mathbb{K}}(\hat{\mu})$ через $\delta_1x^h_{g\rho}(\cdot)$ обозначим решение системы уравнений в вариациях

$$d(\delta_1x^h_{g\rho})(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)\delta_1x^h_{g\rho}(t)dt+\frac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)g(t)dt+G(t)d\rho(t)$$

с начальным условием

$$\delta_1x^h_{g\rho}(t_1)=h.$$

Теорема 4.2. Для того, чтобы процесс $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{\mu}(\cdot))$ доставлял локальный минимум в задаче (1)-(3), (9), необходимо, чтобы для любой тройки $(h,g(\cdot),\rho(\cdot))\in T(\hat{x}_1,\hat{u}(\cdot),\hat{\mu}(\cdot))$ нашлись такие вектор $l\in\mathbb{R}^w$, вектор-функция $p(\cdot):[t_1,t_2]\to\mathbb{R}^n$ и не равные одновременно нулю число λ_0, вектор $s\in\mathbb{R}^{k_1}$ и вектор-функция $\psi(\cdot):[t_1,t_2]\to\mathbb{R}^n$, что выполнены следующие соотношения:

$$1)\ \left(-\frac{d}{dt}L_{1\dot{x}}+L_{1x}\right)\Big|_{(\hat{x}(t),\hat{u}(t))}=0, \qquad (13)$$

$$L_{1\dot{x}}|_{\hat{x}(t_j)}=(-1)^{j+1}\frac{\partial W^*}{\partial x_j}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)s,\ j=1,2, \qquad (14)$$

$$L_{1u}|_{(\hat{x}(t),\hat{u}(t))}=0 \text{ для п.в.} t\in[t_1,t_2], \qquad (15)$$

$$L_{1d\mu}|_{(\hat{x}(t),\hat{u}(t),\hat{\mu})} = -\psi(\cdot)G(\cdot) \in \mathbb{K}^{\oplus}(\hat{\mu}); \tag{16}$$

$$2)\ \left(-\frac{d}{dt}L_{2\dot{x}} + L_{2x}\right)\Big|_{(\hat{x}(t),\hat{u}(t))} = 0,$$

$$L_{2\dot{x}}|_{\hat{x}(t_j)} = (-1)^{j+1}\Big(\lambda_0 \frac{\partial W_0}{\partial x_j}(\hat{x}_1,\hat{x}_2) + \frac{\partial W}{\partial x_j}^*(\hat{x}_1,\hat{x}_2)l +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\delta_1 x_g^h(t_i)\right)^* s\Big),\ j=1,2,$$

$$L_{2u}|_{(\hat{x}(t),\hat{u}(t))} = 0 \text{ для п.в.} t \in [t_1,t_2],$$

$$L_{2d\mu}|_{(\hat{x}(t),\hat{u}(t),\hat{\mu})} = \lambda_0 g^0(\cdot) - p(\cdot)G(\cdot) \in \mathbb{K}^{\oplus}(\hat{\mu}),$$

где

$$T(\hat{x}_1,\hat{u}(\cdot),\hat{\mu}(\cdot)) = \Bigg\{(h,g(\cdot),\rho(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times L_\infty^m[t_1,t_2] \times T_{\mathbb{K}}(\hat{\mu}):$$

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial W}{\partial x_i}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\delta_1 x_{g\rho}^h(t_i) = 0,\ \ \forall s:\ \exists\psi(\cdot),\ \text{удовлетворяющая } (13)-(16),$$

$$\left\langle s, \sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)[\delta_1 x_{g\rho}^h(t_i), \delta_1 x_{g\rho}^h(t_j)]\right\rangle -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\Big\langle \psi(t), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)[\delta_1 x_{g\rho}^h(t), \delta_1 x_{g\rho}^h(t)] +$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)[\delta_1 x_{g\rho}^h(t), g(t)] + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)[g(t),g(t)]\Big\rangle dt = 0\Bigg\},$$

$$\mathbb{K}^{\oplus}(\hat{\mu}) = \left\{\varphi \in \mathbb{C}\left([t_1,t_2];\mathbb{R}^k\right) : \int_{[t_1,t_2]}\varphi(t)(d\hat{\mu} - d\mu)(t) \geq 0\ \ \forall \mu \in \mathbb{K}\right\}.$$

В заключении формулируются основные выводы диссертационной работы.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору Араму Владимировичу Арутюнову за постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

1. Арутюнов А.В., Павлова Н.Г. О топологических свойствах множества достижимости линейных систем. Дифференциальные уравнения, 2004, том 40, N. 11, с.1564-1566.

2. Павлова Н.Г. Множество достижимости линейных систем. Современные методы теории краевых задач: Материалы весенней математической школы "Понтрягинские чтения -XVI". Воронеж: ВГУ, 2005, с.120-121.

3. Павлова Н.Г. Условие 2-регулярности для управляемых систем. XLII Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии. Москва: РУДН, 2006, с.71.

4. Павлова Н.Г. Необходимые и достаточные условия экстремума для задач оптимального импульсного управления. Вестник ВГУ, Серия: Физика. Математика, 2007, N.1, с. 105-111.

5. Pavlova N. 2-regularity and 2-normality conditions for systems with impulsive controls. Yugoslav Journal of Operations Research, 2007, Volume 17, No 2, 149-164.

6. Павлова Н.Г. Условие 2-регулярности для систем с импульсными управлениями. XLIV Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии. Москва: РУДН, 2008, с. 18.

Публикации автора по теме диссертации

1. Арутюнов А.В., Павлова Н.Г. О топологических свойствах множества достижимости линейных систем. Дифференциальные уравнения, 2004, том 40, N.11, с.1564-1566.

2. Павлова Н.Г. Множество достижимости линейных систем. Современные методы теории краевых задач: Материалы весенней математической школы "Понтрягинские чтения -XVI". Воронеж: ВГУ, 2005, с.120-121.

3. Павлова Н.Г. Условие 2-регулярности для управляемых систем. XLII Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии. Москва: РУДН, 2006, с.71.

4. Павлова Н.Г. Необходимые и достаточные условия экстремума для задач оптимального импульсного управления. Вестник ВГУ, Серия: Физика. Математика, 2007, N. 1, с. 105-111.

5. Pavlova N. 2-regularity and 2-normality conditions for systems with impulsive controls. Yugoslav Journal of Operations Research, 2007, Volume 17, No 2, 149-164.

6. Павлова Н.Г. Необходимые условия оптимальности второго порядка в задачах с импульсными управлениями.

7. Павлова Н.Г. 2-регулярные импульсные процессы. - Ломоносов-2008

8. Павлова Н.Г. Условие 2-регулярности для систем с импульсными управлениями. - РУДН-2008

9. Павлова Н.Г. Необходимые условия для анормальных задач оптимального импульсного управления. - ВВМШ-2008

10. Павлова Н.Г. Необходимые условия оптимальности в задачах с импульсными управлениями. - Понтряг.2008

11. Арутюнов А.В., Павлова Н.Г. Локальная управляемость динамических систем с импульсными управлениями.