

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

УДК 517.95

Тихонов Иван Владимирович

ОБРАТНЫЕ, НЕЛОКАЛЬНЫЕ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва — 2008

Работа выполнена на кафедре высшей математики Московского инженерно-физического института (государственного университета).

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук, профессор
Вабищевич Петр Николаевич

доктор физ.-мат. наук, профессор
Денисов Александр Михайлович

доктор физ.-мат. наук, профессор
Треногин Владилен Александрович

Ведущая организация: Российский университет дружбы народов
(РУДН, Москва)

Защита состоится 29 октября 2008 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.43 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП–1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМиК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ф-та ВМиК МГУ.

Автореферат разослан « 16 » сентября 2008 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
профессор

Е. В. Захаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. Вопросы существования и единственности решения относятся к наиболее значимым, принципиальным вопросам теории дифференциальных уравнений. Всякое существенное продвижение в этой области представляет не только академический интерес, но и имеет важное прикладное значение, образуя фундамент для последующих исследований. Коротко говоря, никакая содержательная задача математической физики не может быть осмыслена без установления понятных, легко проверяемых условий существования и единственности решения.

Наиболее традиционной задачей для эволюционных уравнений является, без сомнения, задача Коши. Хорошо известна, например, та роль, которую в общей теории уравнений с частными производными сыграли выдающиеся работы А. Н. Тихонова, И. Г. Петровского, И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова, посвященные проблеме корректности в задаче Коши. Долгие годы создавалась теория абстрактной задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Некоторые общие подходы предложили здесь Э. Хилле и Ю. И. Любич.

В последние десятилетия наметился активный интерес к разнообразным *неклассическим задачам* — для дифференциальных уравнений усложненной структуры и (или) с более сложными дополнительными условиями, отличными от условий Коши. Исследования ведутся по многим направлениям. В результате формируются современные теории обратных и некорректных задач, спектральная теория дифференциальных операторов, возникают новые импульсы для прикладной математики, для разработки численных методов. Существенное влияние на развитие этих областей оказали работы А. Н. Тихонова, А. А. Самарского, В. А. Ильина, М. М. Лаврентьева, Е. И. Моисеева, В. А. Садовниченко, А. В. Бицадзе, В. К. Иванова, В. Г. Романова, И. А. Шишмарева, А. А. Дезина, А. М. Денисова, Ю. А. Дубинского, А. Г. Костюченко, С. Г. Крейна, А. М. Нахушева, А. И. Прилепко, А. Л. Скубачевского, П. Е. Соболевского, А. А. Шкаликова, их учеников и последователей.

Диссертация органически вписана в данный контекст — в контекст современной теории дифференциальных уравнений. В работе изучен цикл обратных, нелокальных и краевых задач для дифференциальных уравнений с выделенной переменной « t », означающей условное «время». Подобные уравнения часто называют *эволюционными*. Дополнительные условия, характеризующие задачу, ставятся по выделенной переменной.

Все задачи являются *линейными*. Для каждой из них установлены новые, законченные результаты по единственности решения. В ряде случаев получены также весьма общие теоремы разрешимости.

Изложение ведется на языке абстрактных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Это дает возможность охватить сразу много приложений. В качестве примера подробно разобрана модельная нелокальная задача для многомерного уравнения теплопроводности.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ — разработать новые, универсальные подходы, позволяющие проводить исследование обратных, нелокальных и краевых задач для эволюционных уравнений при минимальных ограничениях, доводя теорию до полной завершенности, когда окончательные ответы на поставленные вопросы формулируются в простых спектральных терминах собственных значений линейных операторов, нулей характеристических функций и т. д.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА. Основные результаты диссертации являются оригинальными, принадлежат автору и состоят в следующем.

1. С общих позиций проанализирован ряд новых и классических задач для абстрактных дифференциальных уравнений произвольного порядка. При этом: а) проведено исчерпывающее изучение вопроса единственности в периодической задаче; б) найдены условия, при которых абстрактное дифференциальное уравнение имеет только тривиальное решение; в) изучены структурные свойства нуль-решений в абстрактной задаче Коши; г) получен законченный критерий единственности в модельной обратной задаче, выраженный в терминах распределения нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера; д) поставлена и изучена «обобщенная задача Уорда»,

для которой также найден критерий единственности. Все перечисленные рассмотрения проведены без ограничений сверху на порядок уравнения и без каких-либо качественных предположений о природе линейных операторов в составе дифференциального уравнения. Отдельные аналоги результатов автора встречались ранее лишь для уравнений первого и второго порядков, при тех или иных жестких ограничениях.

2. Исследована линейная нелокальная «по времени» задача для абстрактного дифференциального уравнения первого порядка. На конечном промежутке «времени» получен исчерпывающий критерий единственности решения без ограничений на оператор в уравнении и на меру в нелокальном условии. Указаны основные следствия и обобщения; приведены эффективные достаточные признаки единственности. Никаких общих подходов к подобным нелокальным задачам ранее не было; встречались лишь частные работы по каким-то отдельным случаям.

3. В линейной нелокальной задаче на неограниченном промежутке «времени» отдельно изучены два практически важных случая: монотонной и периодической весовых функций в нелокальном условии. Установлены новые теоремы разрешимости. В периодическом случае разработана оригинальная методика, основанная на теоремах об отображении спектра для интегралов от полугрупп. Методика допускает перенос на целый ряд других ситуаций в нелокальной «по времени» задаче.

4. Доказана новая теорема об отображении точечного спектра для интеграла от полугруппы на конечном отрезке $[0, T]$. Данный результат принципиально важен для ряда задач из теории абстрактных дифференциальных уравнений. В классических источниках (работы Э. Хилле и Р. Филлипса) были лишь частичные аналоги подобного утверждения.

5. Получен цикл теорем единственности в линейной обратной задаче с финальным переопределением. Всесторонне исследован так называемый «скалярный» случай. Результаты являются окончательными, ограничения — неослабляемыми. Аналогичные вопросы поднимались ранее лишь при специальных качественных ограничениях на оператор в дифференциальном уравнении (работы Д. Г. Орловского, Ю. С. Эйдельмана и др).

6. Поставлена и полностью решена принципиально новая задача с нелокальным условием «среднего по времени» для многомерного уравнения теплопроводности. Дано описание классов единственности и разрешимости; выявлены все сопутствующие технические обстоятельства. Результаты выражены в терминах экспоненциального поведения решений на бесконечности. Найдены точные границы между единственностью и неединственностью, корректностью и некорректностью. Предложенные подходы открывают широкие возможности для обобщений — на другие виды параболических уравнений и другие виды нелокальных условий.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ весьма разнообразны. Изучение абстрактных задач основано на технике дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Используются операторные соотношения и уравнения, различные операторные характеристики, такие, как резольвенты, спектры, собственные значения. Часто приходится прибегать к некоторым базовым положениям функционального анализа. Например, с помощью теоремы Хана–Банаха абстрактные векторные ситуации сводятся к скалярным моделям. После скаляризации центральную роль играют средства классического анализа, главным образом, теории целых функций одной переменной. Отсюда заимствуются различные характеристики роста целых функций, «метод частных» Б. Я. Левина, известные результаты А. Вимана, Г. Полиа, Т. Карлемана, Э. Ч. Титчмарша и т. д. В задачах для уравнений высокого порядка появляются целые функции типа Миттаг-Леффлера. Исследование разрешимости в нелокальных задачах проводится на основе теории полугрупп; особенно полезны ее спектральные главы, созданные Э. Хилле и Р. Филлипсом. Модельная нелокальная задача теплопроводности потребовала иной аналитической техники. Здесь встречаются специальные функции Бесселя и Ханкеля, преобразование Фурье, теория асимптотических разложений; окончательную завершенность изложению придает конструкция расширенного оператора Лапласа, предложенная И. И. Приваловым.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. Диссертация носит теоретический характер и создает базу для дальнейших исследований. Рассмотренные задачи имеют естественную и понятную постановку. Результаты обладают универсальным, достаточно общим характером. Они позволяют охватить широкий спектр разнообразных приложений, относящихся к математическим моделям теплопроводности, диффузии, переноса, а также гидродинамики и метеорологии. Построенная *линейная* теория обратных, нелокальных и краевых задач формирует основу для разработки соответствующей *нелинейной* теории. Материал диссертации представляет интерес для специалистов в области дифференциальных уравнений, функционального анализа и теории функций. Работа может быть востребована во многих отечественных и международных математических центрах, где ведутся исследования, связанные с дифференциальными уравнениями и их приложениями.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Результаты диссертации с полными доказательствами доложены автором на семинаре мех-мата МГУ «Обратные задачи анализа, математической физики и естествознания» (руководители: академик В. А. Садовничий и профессор А. И. Прилепко). В разные годы основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на ведущих семинарах Москвы по уравнениям в частных производных, по спектральной теории дифференциальных операторов, по теории функций и ее приложениям в анализе (среди руководителей семинаров: академики В. А. Ильин, Е. И. Моисеев, В. А. Садовничий, профессора М. С. Агранович, М. И. Вишик, В. В. Власов, А. А. Дезин, А. М. Денисов, А. Г. Костюченко, А. К. Мирзоев, А. М. Седлецкий, А. Л. Скубачевский, А. А. Шкаликов). Центральные результаты диссертации доложены также на международных конференциях И. Г. Петровского (Москва, 2004) и А. Н. Тихонова (Москва, 2006). Цикл докладов был сделан автором на регулярных конференциях по обратным и некорректным задачам (Москва, факультет ВМиК МГУ).

ПУБЛИКАЦИИ. Результаты диссертации полностью опубликованы. Список основных 15 статей приведен в конце автореферата. Из нескольких совместных работ на защиту выносятся лишь результаты, полученные лично автором. Вклад соавторов (А. Ю. Попова и Ю. С. Эйдельмана) четко оговорен в тексте диссертации и отделен от результатов автора.

СТРУКТУРА И ОБЪЕМ РАБОТЫ. Полный текст диссертации составляет 283 страницы. Вначале идет введение и небольшой технический раздел «Терминология, обозначения, соглашения», где оговорены некоторые стандарты. Далее следует основная часть, разбитая на четыре главы. Главы делятся на параграфы, параграфы — на пункты. Нумерация параграфов — сквозная, нумерация пунктов и прочих единиц (утверждений, определений, замечаний, примеров, формул) ведется по параграфам. Завершает всё список литературы, где сперва в алфавитном порядке перечислены работы на кириллице, а потом — на латинице. Библиография содержит 273 наименования.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Во **ВВЕДЕНИИ** обсуждается общая направленность работы и дается краткое изложение ее содержания. Сведения исторического и приоритетного характера приводятся в ограниченном объеме, необходимом лишь для предварительной оценки ситуации. Подробные ссылки и сопоставления собраны в основном тексте диссертации, в конце каждого параграфа. Ввиду большого разнообразия материала такой порядок более удобен для чтения.

После введения идет короткий **РАЗДЕЛ** «Терминология, обозначения, соглашения», содержание которого ясно из названия. Упомянутые здесь сведения используются в основном тексте без особых оговорок.

Сам основной текст разбит на четыре главы, разные по темам, но тесно связанные по смыслу друг с другом. Отметим наиболее принципиальные результаты, составляющие остов работы. Нумерация теорем в автореферате будет совпадать с нумерацией теорем диссертации. Формулы пронумеруем заново, независимо от нумерации формул, принятой в диссертации.

В первых трех главах изучаются задачи для абстрактных дифференциальных уравнений в комплексном банаховом пространстве E . Считаем, что в E задан линейный замкнутый оператор A с областью определения $D(A) \subset E$. Других условий на A изначально не налагается. Требование «банаховости» тоже не является слишком обязательным — многие результаты без труда переносятся на уравнения в секвенциально полных локально выпуклых пространствах.

В ГЛАВЕ 1 (§§ 1–5) рассматриваются задачи для уравнений произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$. Базовое уравнение имеет вид

$$\frac{d^n u(t)}{dt^n} = Au(t), \quad (1)$$

но иногда обсуждаются другие варианты, например, *полное уравнение*

$$A_n u^{(n)}(t) + A_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \dots + A_1 u'(t) + A_0 u(t) = 0 \quad (2)$$

с линейными замкнутыми операторами $A_0, A_1, \dots, A_n$. Переменная t изменяется по соответствующему промежутку $J \subset \mathbb{R}$, зависящему от ситуации. Чаще всего $J = [0, T]$, бывает также, что $J = [0, \infty)$ или $J = (-\infty, \infty)$.

Каждый параграф посвящен своей задаче. Понятие *решения* вводится всякий раз заново, обычно при постановке задачи в начале параграфа. Эти определения вполне традиционны, считаем их ясными и будем напоминать лишь в случаях, способных привести к недоразумению. Например, рассматривая решение $u(t)$ уравнения (1) на промежутке $J \subset \mathbb{R}$, обычно полагаем, что $u \in C^n(J; E)$ и $u(t) \in D(A)$ при любом $t \in J$.

Во вводном § 1 обсуждается *периодическая задача*:

$$\frac{d^n u(t)}{dt^n} = Au(t), \quad u(t+T) = u(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad (3)$$

где $T > 0$ — фиксированное число. Сразу выясняется (теорема 1.1), что задача (3) имеет лишь тривиальное решение $u(t) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда среди собственных значений оператора A нет чисел λ_k вида

$$\lambda_k = \left(\frac{2k\pi i}{T} \right)^n, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad i^2 = -1.$$

В случае, когда такие собственные значения есть, подробно анализируются разные типы решений (теоремы 1.2–1.6). Еще приведены обобщения (теоремы 1.7 и 1.8), в том числе на случай периодической задачи для полного уравнения (2). Методы основаны на векторных рядах Фурье и вполне элементарны. Но четко выявляется главная идея — изучать дифференциальное уравнение (1) при максимально широких допущениях.

Столь общий подход порождает неожиданный вопрос: всегда ли уравнение (1) обладает хоть какими-то нетривиальными решениями? Эта тема затрагивается в следующем § 2. Если на любом промежутке $J \subset \mathbb{R}$ возможно лишь тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, то (1) называется *нуль-уравнением*. В теореме 2.1 показано, что (1) будет нуль-уравнением, если резольвента оператора A есть целая функция нулевого типа при порядке $\rho = 1/n$. Последнее заведомо выполняется, когда A^{-1} — ограниченный оператор из подходящего вольтерровского класса (теоремы 2.2 и 2.3). Например, в теореме 2.2 фигурирует условие

$$\|A^{-k}\| \leq \frac{C^k}{(km)!}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad C > 0, \quad m > n, \quad (4)$$

где константы C, m не зависят от k , а значение n — то же, что и в уравнении (1). Выполнение (4) гарантирует, что (1) является нуль-уравнением.

В качестве иллюстрации разобрана задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial^n u}{\partial t^n} = a_0(x) \frac{\partial^m u}{\partial x^m} + a_1(x) \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}} + \dots + a_m(x) u, \\ u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \dots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}}(0, t) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

в прямоугольнике $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$ для функции $u = u(x, t)$ из класса

$$C^{m,n}([0, 1] \times [0, T]). \quad (6)$$

Краевые условия в (5) поставлены только на одном краю — при $x = 0$, $0 \leq t \leq T$; иные дополнительные условия отсутствуют. Коэффициенты $a_0(x), a_1(x), \dots, a_m(x)$ предполагаются непрерывными на $[0, 1]$ и могут

быть вещественными или комплексными. Применение абстрактной теории дает следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $m > n \geq 1$, и $|a_0(x)| \geq \varepsilon > 0$ при $0 \leq x \leq 1$ с некоторым фиксированным $\varepsilon > 0$. Тогда задача (5) имеет в классе (6) только тривиальное решение $u(x, t) \equiv 0$.

В § 2 отмечается связь подобных утверждений с некоторыми результатами для параболических уравнений (А. Н. Тихонов, Е. М. Ландис), с теорией локального преобразования Лапласа (Ю. И. Любич, В. А. Ткаченко). Интерес предшественников относился к уравнениям первого порядка по t , т. е. к случаю $n = 1$; доказательства отличались технической сложностью. В диссертации удалось осмыслить материал с общих позиций — для уравнений произвольного порядка $n \geq 1$ — и предложить совсем простые доказательства. В основе успеха лежит замечательная теорема Поля о целых функциях нулевого экспоненциального типа, ограниченных на последовательности точек типа $z_k = k \in \mathbb{Z}$.

В следующем § 3 изучается противоположная ситуация, когда дифференциальное уравнение (1) имеет «много» решений в том смысле, что задача Коши для него оказывается *недетерминированной*. Тогда у однородной задачи Коши появляются *нуль-решения*, т. е. нетривиальные решения уравнения (1), удовлетворяющие однородным условиям Коши:

$$u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-1)}(0) = 0. \quad (7)$$

Такие примеры встречаются на практике при определенных способах выбора оператора A . Первые исследования по поводу нуль-решений выполнены Э. Хилле и Ю. И. Любичем в 1950-60-х гг., им же принадлежат наиболее значимые результаты.

В диссертации подробно проанализирован один специальный эффект, связанный с нуль-решениями. В частном случае — для уравнения первого порядка — он когда-то отмечался Ю. И. Любичем. Оказывается, важно различать два случая: 1) собственные значения A заполняют всю комплексную плоскость; 2) собственные значения A не заполняют комплексной плоскости. В первом случае поведение отдельных нуль-решений может

быть весьма замысловатым: становясь ненулевыми, они затем вновь обращаются в нуль, потом опять отличны от нуля и так далее *ad infinitum*. Второй случай является основным: нуль-решения (если они есть) подчиняются строгим правилам. Например, став ненулевым, нуль-решение $u(t)$ больше уже в нуль не обращается; также отличными от нуля будут производные $u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)$. Отметим для примера следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $u(t)$ — решение однородной задачи Коши (1), (7) при $0 \leq t \leq T$ с линейным замкнутым оператором A . Предположим, что собственные значения оператора A не заполняют всей комплексной плоскости. Выберем константы $C_0, C_1, \dots, C_{n-1} \in \mathbb{C}$ так, чтобы $\sum |C_k| > 0$. Если при некотором $t_0 \in (0, T]$ выполняется соотношение:

$$C_0 u^{(n-1)}(t_0) + C_1 u^{(n-2)}(t_0) + \dots + C_{n-1} u(t_0) = 0, \quad (8)$$

то $u(t) \equiv 0$ на $[0, t_0]$.

В § 3 разработан универсальный подход к такого рода результатам, основанный на аппарате обобщенных гиперболических функций. Рассмотрены модификации условия (8) в виде конечных сумм интегралов Стильтьеса:

$$\int_0^{t_0} u^{(n-1)}(t) d\mu_0(t) + \int_0^{t_0} u^{(n-2)}(t) d\mu_1(t) + \dots + \int_0^{t_0} u(t) d\mu_{n-1}(t) = 0.$$

Подробные формулировки даны в теоремах 3.2–3.4. Имеются примеры и комментарии.

Итак, в §§ 2, 3 речь идет о самых общих вопросах теории абстрактных дифференциальных уравнений. Заметного прогресса в этой области не было давно — со времен упомянутых работ Э. Хилле и Ю. И. Любича.

Следующие §§ 4, 5 относятся к более специальной тематике. В § 4 рассмотрена модельная обратная задача:

$$\begin{cases} \frac{d^n u(t)}{dt^n} = Au(t) + g, & 0 < t < T, \\ u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-1)}(0) = 0, \\ u(T) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

с неизвестной функцией $u: [0, T] \rightarrow E$ и неизвестным элементом $g \in E$. Ранее подобные задачи изучались лишь для уравнений первого и второго порядков ($n = 1$ и $n = 2$) при тех или иных ограничениях на оператор A (А. В. Кибенко, А. И. Перов, У. Ранделл, Ю. С. Эйдельман, Д. Г. Орловский, В. В. Васильев и др.). Оказалось, что ограничения нужны не всегда. В § 4 для задачи (9) установлен общий критерий единственности решения, использующий лишь собственные значения оператора A и нули целой функции

$$Y_n(\lambda) \equiv \frac{1}{n!} + \frac{\lambda}{(2n)!} + \frac{\lambda^2}{(3n)!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{(mn+n)!}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (10)$$

где n совпадает с порядком уравнения. Точный результат выглядит так.

ТЕОРЕМА 4.1 (ОДНОРОДНАЯ ВЕРСИЯ). *Пусть A — линейный замкнутый оператор в E . Для того чтобы однородная обратная задача (9) имела на $[0, T]$ только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$, необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел λ_k/T^n , $k \in \mathfrak{K}$, не являлось собственным значением оператора A . Здесь $\Lambda(Y_n) \equiv \{\lambda_k : k \in \mathfrak{K}\}$ — множество нулей целой функции (10) с индексацией $k \in \mathfrak{K} \subset \mathbb{Z}$.*

Функция (10) называется *характеристической* для задачи (9). Она принадлежит важному классу целых функций типа Миттаг-Леффлера. При $n=1$ и $n=2$ ситуация с нулями элементарна:

$$Y_1(\lambda) = \frac{e^\lambda - 1}{\lambda}, \quad \Lambda(Y_1) = \{2k\pi i : k = \pm 1, \pm 2, \dots\};$$

$$Y_2(\lambda) = \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda} - 1}{\lambda}, \quad \Lambda(Y_2) = \{-4k^2\pi^2 : k = 1, 2, \dots\};$$

далее картина усложняется — в полном объеме вопрос о нулях лишь совсем недавно разрешил А. Ю. Попов. Он показал, что при $n \geq 3$ все нули функции $Y_n(\lambda)$ являются вещественными, отрицательными, простыми и принадлежат определенным интервалам локализации. Тем самым, обратная задача (9) оказалась связана с классической проблематикой комплексного анализа.

Отметим также, что именно задача (9) стала отправным пунктом для прочих сюжетов, затронутых в главе 1. Многие идеи зародились именно здесь. Например, начальный импульс к изучению нуль-решений (см. § 3) придал такой вопрос: следует ли из соотношений (9) с $g = 0$ то, что $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$?

В § 5 близкими методами исследуется краевая задача:

$$\begin{cases} \frac{d^n u(t)}{dt^n} = Au(t), & 0 < t < T, \\ u^{(j)}(0) = 0, & \forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \{p\}, \\ u^{(q)}(T) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

называемая *обобщенной задачей Уорда*. Здесь $n \geq 3$, $p, q \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ — фиксированные числа (*параметры задачи*). Особенно важна разность $d \equiv p - q$. С ее помощью вводится *характеристическая функция*

$$Y_d(\lambda) \equiv \frac{1}{d!} + \frac{\lambda}{(n+d)!} + \frac{\lambda^2}{(2n+d)!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{(mn+d)!}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (12)$$

которая тоже относится к функциям типа Миттаг-Леффлера. Справедлив критерий единственности.

ТЕОРЕМА 5.2. (ОДНОРОДНАЯ ВЕРСИЯ). Пусть A — линейный замкнутый оператор в E . Для того чтобы однородная краевая задача (11) имела на $[0, T]$ только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел λ_k/T^n , $k \in \mathfrak{K}$, не являлось собственным значением оператора A . Здесь $\Lambda(Y_d) \equiv \{\lambda_k : k \in \mathfrak{K}\}$ — множество нулей характеристической функции (12) с индексацией $k \in \mathfrak{K} \subset \mathbb{Z}$.

Идею перенести результат с обратной задачи (9) на краевую задачу (11) автор получил от В. А. Ильина, заметившего, что сочетание краевых условий в задаче (9) напоминает известную задачу Уорда из спектральной теории.

Важную роль в §§ 4, 5 играет одно утверждение из теории целых функций, восходящее, видимо, к Карлеману (см. Г. Поля, Г. Сеге, «Задачи и теоремы из анализа», часть II, отдел IV, № 199). Это утверждение должным образом развито в § 5 и может быть полезно для других обратных и краевых задач, где встречаются целые функции порядка $\rho < 1/2$. Последнее типично для уравнений порядка $n \geq 3$. Но сейчас оставим уравнения высокого порядка.

Следующая ГЛАВА 2 (§§ 6–12) посвящена нелокальной «по времени» задаче для абстрактных дифференциальных уравнений первого порядка. Традиционное условие Коши $u(0) = u_0$ заменяется нелокальным условием вида

$$\int_0^T u(t) d\mu(t) = u_1 \quad (13)$$

с заданным элементом $u_1 \in E$. В отличие от задачи Коши для нелокальной задачи на конечном отрезке $[0, T]$ удастся построить исчерпывающую теорию единственности. Условие (13) позволяет формулировать ответы в спектральных терминах.

Главный результат содержится в § 6. Рассмотрим однородную задачу:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \int_0^T u(t) d\mu(t) = 0. \quad (14)$$

Здесь $T > 0$ — конечное число; скалярная функция $\mu(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, T]$, причем обычно $t = 0$ и $t = T$ считаются *точками вариации* меры $d\mu(t)$, т. е. $\text{Var}\{\mu(t)\}|_0^{\varepsilon} > 0$ и $\text{Var}\{\mu(t)\}|_{T-\varepsilon}^T > 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Решением задачи (14) называется функция $u: [0, T] \rightarrow E$, удовлетворяющая соотношениям (14) на отрезке $[0, T]$ в предположениях, что $u \in C^1([0, T]; E)$ и $u(t) \in D(A)$ при $0 \leq t \leq T$. Рассматриваются также обобщенные решения.

Для задачи (14) вводится характеристическая функция:

$$L(\lambda) = \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (15)$$

целая по переменной λ , с множеством нулей $\Lambda(L) = \{\lambda_k : k \in \mathfrak{K} \subset \mathbb{Z}\}$.

Справедлив критерий единственности.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть A — линейный замкнутый оператор в E . Пусть $t=0$ и $t=T$ суть точки вариации меры $d\mu(t)$. Для того чтобы однородная нелокальная задача (14) имела на $[0, T]$ только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль λ_k характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (15) не являлся собственным значением оператора A .

Возможно, это самый значимый результат работы. Отсутствие ограничений на оператор A и меру $d\mu(t)$ сильно расширяет круг приложений. Доказательство критерия единственности, данное в § 6, использует некоторые соображения из теории целых функций, в том числе «метод частных» Б. Я. Левина и теорему Поля о целых функциях нулевого типа, уже встречавшуюся в § 2 при рассмотрении нуль-уравнений.

Еще в § 6 даны подробные комментарии к теореме 6.2 и приведены уточнения для нескольких типичных ситуаций. Вот, например, вариант критерия единственности для оператора A , порождающего C_0 -полугруппу.

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть оператор A порождает C_0 -полугруппу $U(t)$, $t \geq 0$, в банаховом пространстве E . Пусть $\mu(t)$ — скалярная функция ограниченной вариации на $[0, T]$. Предположим, что выполнено любое из условий:

- 1) $t=0$ есть точка вариации меры $d\mu(t)$;
- 2) полугруппа $U(t)$ имеет тривиальное ядро, и мера $d\mu(t)$ имеет хотя бы одну точку вариации на $[0, T]$, т. е. функция $\mu(t)$ отлична от тождественной константы.

Тогда справедлив критерий единственности: для того чтобы однородная нелокальная задача (14) имела на $[0, T]$ только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль λ_k характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (15) не являлся собственным значением оператора A .

В связи с условием 2) теоремы 6.4 напомним, что полугруппа $U(t)$ имеет *тривиальное ядро*, если $U(t)f \neq 0$ для любого $f \in E$, $f \neq 0$ и любого $t > 0$. Это заведомо выполняется для аналитических полугрупп и для полугрупп, вкладываемых в группы. Элементарные примеры показывают, что в рамках полугруппового подхода теорема 6.4 не допускает ослаблений.

В следующем § 7 из основного критерия извлекается ряд удобных достаточных признаков единственности, где уже не требуется точно вычислять нули характеристической функции (15). Наиболее интересна группа теорем 7.3–7.5, связанная с классическими результатами Поля о распределении нулей функции (15) в случае абсолютно непрерывной меры $d\mu(t) = \eta(t) dt$ со знакопостоянной и монотонной на $(0, T)$ функцией $\eta(t)$. Приведем один типичный результат.

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть A — линейный замкнутый оператор в E . Пусть $\eta(t)$ — суммируемая, строго положительная функция на $(0, T)$. Предположим, что выполнено любое из условий:

- 1) функция $\eta(t)$ — неубывающая на $(0, T)$, оператор A не имеет собственных значений на множестве $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$;
- 2) функция $\eta(t)$ — невозрастающая на $(0, T)$, оператор A не имеет собственных значений на множестве $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$.

Тогда однородная нелокальная задача (14) с абсолютно непрерывной мерой $d\mu(t) = \eta(t) dt$ имеет на $[0, T]$ только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$.

В теоремах 7.4 и 7.5 это направление получает дальнейшее развитие.

Два следующих параграфа посвящены обобщениям. В § 8 критерий единственности переносится на более общее уравнение

$$B \frac{du(t)}{dt} = Au(t) \quad (16)$$

с произвольными линейными замкнутыми операторами A, B , а в § 9 — на более общее нелокальное условие

$$\int_0^T u(t) d\mu_0(t) + \int_0^T u'(t) d\mu_1(t) = 0 \quad (17)$$

с заданными скалярными функциями $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ ограниченной вариации на $[0, T]$. В обоих параграфах получены законченные результаты, аналогичные основной теореме 6.2. Для уравнения (16) собственные значения оператора A надо заменить собственными значениями операторного пучка $P(\lambda) \equiv \lambda B - A$, а для нелокального условия (17) нули характеристической функции (15) надо заменить нулями характеристической функции

$$G(\lambda) = \int_0^T e^{\lambda t} d\mu_0(t) + \lambda \int_0^T e^{\lambda t} d\mu_1(t), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Функция $G(\lambda)$ получается из (17) при формальной замене $u(t)$ на $e^{\lambda t}$. Попутно в § 9 проведено систематическое изучение нелокального условия (17) в терминах свойств интегрирующих функций $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$.

Еще раз подчеркнем, что всё исследование единственности в нелокальных задачах выполнено в самых общих предположениях; основные требования к операторам в дифференциальных уравнениях сведены к минимуму — только линейность и замкнутость.

При изучении разрешимости нужны более жесткие ограничения. Один из возможных подходов представлен в §§ 10, 11, где на бесконечном промежутке $0 \leq t < \infty$ рассматривается нелокальная задача:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \int_0^\infty u(t)\eta(t) dt = u_1, \quad (18)$$

с заданным элементом $u_1 \in E$. Оператор A порождает полугруппу $U(t)$ класса (C_0) , причем $\|U(t)\| \leq Me^{-\delta t}$ при $t \geq 0$ с константами $M \geq 1$ и $\delta > 0$, т. е. полугруппа $U(t)$ считается *экспоненциально убывающей*. Весовая скалярная функция $\eta(t) \not\equiv 0$ предполагается измеримой и локально суммируемой на $(0, \infty)$, интегрирующей полугруппу $U(t)$ в том смысле, что

$$\int_0^\infty \|U(t)\| |\eta(t)| dt < \infty.$$

Тогда интеграл в (18) корректно определен (по Бохнеру) для любой векторной функции $u(t) = U(t)u_0$, $t \geq 0$.

Обобщенным решением нелокальной задачи (18) называется векторная функция $u(t) = U(t)u_0$, $t \geq 0$, с элементом $u_0 \in E$, для которой интеграл, входящий в (18), принимает значение, равное заданному элементу $u_1 \in E$. Если при этом $u_0 \in D(A)$, то решение $u(t) = U(t)u_0$, $t \geq 0$, называется классическим.

В § 10 разбирается случай, когда весовая скалярная функция $\eta(t)$ — неотрицательная и невозрастающая. Такое сочетание условий обеспечивает корректность задачи (18) на элементах $u_1 \in D(A)$.

ТЕОРЕМА 10.1. Пусть $\|U(t)\| \leq Me^{-\delta t}$ при $t \geq 0$ с константами $M \geq 1$ и $\delta > 0$. Пусть $\eta(t)$ — неотрицательная, невозрастающая функция, определенная при $t > 0$, такая, что $0 < \eta(0+0) < \infty$. Тогда для любого $u_1 \in D(A)$ существует и притом единственное обобщенное решение $u(t) = U(t)u_0$ нелокальной задачи (18), для которого справедлива оценка устойчивости:

$$\|u(t)\| \leq Me^{-\delta t} C \|Au_1\|, \quad t \geq 0, \quad (19)$$

с константой $C > 0$, не зависящей от выбора элемента $u_1 \in D(A)$. Решение $u(t) = U(t)u_0$ является классическим тогда и только тогда, когда $u_1 \in D(A^2)$. Если же $u_1 \in E \setminus D(A)$, то задача (18) неразрешима.

Оценка устойчивости (19) является неулучшаемой. Приведен пример, показывающий, что заменить $\|Au_1\|$ на $\|u_1\|$ в общем случае нельзя.

В следующем § 11 весовая функция $\eta(t)$ взята T -периодической с некоторым периодом $T > 0$. Здесь удастся построить полную теорию корректности, включающую критерий единственности и целый цикл теорем разрешимости. Вначале вводится характеристическая функция

$$L(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} \eta(t) dt, \quad (20)$$

голоморфная в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Используя T -периодичность $\eta(t)$, получаем аналитическое продолжение до мероморфной функции в $\mathbb{C}$ по формуле:

$$L(\lambda) = \frac{1}{1 - e^{\lambda T}} L_T(\lambda), \quad L_T(\lambda) \equiv \int_0^T e^{\lambda t} \eta(t) dt,$$

причем полюсами могут быть лишь точки $2k\pi i/T$, $k \in \mathbb{Z}$. Некоторые из точек $2k\pi i/T$ могут и не быть полюсами $L(\lambda)$, если они являются нулями функции $L_T(\lambda)$.

Вообще, предположение о T -периодичности позволяет сводить изучение задачи (18) к задаче на конечном отрезке $[0, T]$, где имеется полная теория единственности (см. § 6). С помощью таких соображений устанавливаем следующий критерий единственности.

ТЕОРЕМА 11.1. Пусть $\|U(t)\| \leq M e^{-\delta t}$ при $t \geq 0$ с константами $M \geq 1$ и $\delta > 0$. Пусть $\eta(t+T) = \eta(t)$ при $t \geq 0$ с некоторым периодом $T > 0$, причем

$$\int_0^\varepsilon |\eta(t)| dt > 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Предположим, что нелокальная задача (18) с заданным элементом $u_1 \in E$ имеет обобщенное решение $u(t) = U(t)u_0$. Для того чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (20) не являлся собственным значением оператора A .

Этот критерий легко выводится из теоремы 6.4.

Теоремы разрешимости основаны на иной технике. Здесь возникают дополнительные требования гладкости к функции $\eta(t)$, нужные для вывода операторных соотношений. Приходится также более точно учитывать поведение $\eta(t)$ при $t=0$. Приведем для примера базовый результат о корректной разрешимости задачи (18) на элементах $u_1 \in D(A)$.

ТЕОРЕМА 11.4. Пусть $\|U(t)\| \leq M e^{-\delta t}$ при $t \geq 0$ с константами $M \geq 1$ и $\delta > 0$. Пусть $\eta(t+T) = \eta(t)$ при $t \geq 0$ с периодом $T > 0$, причем $\eta \in C^1([0, \infty))$ и $\eta(0) \neq 0$. Предположим, что ни один нуль характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (20) не принадлежит спектру оператора A . Тогда для любого $u_1 \in D(A)$ существует и притом единственное обобщенное решение $u(t) = U(t)u_0$ нелокальной задачи (18), для которого справедлива оценка устойчивости (19) с константой $C > 0$, не зависящей от выбора элемента $u_1 \in D(A)$. Решение $u(t) = U(t)u_0$ является классическим тогда и только тогда, когда $u_1 \in D(A^2)$. Если же $u_1 \in E \setminus D(A)$, то задача (18) неразрешима.

Вместо $\eta \in C^1([0, \infty))$ и $\eta(0) \neq 0$ можно взять случай

$$\eta \in C^n([0, \infty)), \quad \eta^{(k)}(0) = 0 \quad \text{для} \quad k = 0, \dots, n-2, \quad \eta^{(n-1)}(0) \neq 0,$$

при некотором натуральном $n \geq 2$. Тогда справедливо аналогичное утверждение о корректной разрешимости задачи (18) на элементах $u_1 \in D(A^n)$ (теорема 11.5). Дополнительные уточнения внесены в теоремах 11.6 и 11.7. Главная предпосылка корректной разрешимости везде имеет спектральный характер: нули характеристической функции (20) не должны попадать на спектр оператора A . Без такого предположения корректная разрешимость теряется. Важную роль в доказательствах играет теория Э. Хилле и Р. Филлипса об отображении спектра для интегралов от полугрупп (см. Э. Хилле, Р. Филлипс «Функциональный анализ и полугруппы», гл. XVI). Отдельную ценность представляет сама методика изучения разрешимости в нелокальных задачах, разработанная в § 11. Ее можно перенести на ряд других случаев в задаче (18) с абсолютно непрерывной мерой $\eta(t) dt$. Подобные соображения использовались ранее в обратных задачах (Ю. С. Эйдельман, И. В. Тихонов).

Связь нелокальной задачи с *теорией отображения спектра* является принципиальной. В следующем § 12 совершен обратный переход: из результатов § 6 по единственности решения в нелокальной задаче (14) выведена новая теорема об отображении точечного спектра для оператора B , заданного формулой

$$Bf = \int_0^T U(t)f d\mu(t), \quad f \in E. \quad (21)$$

В предварительной теореме 12.1, основанной на теореме 6.4, решается вопрос о тривиальности или нетривиальности ядра оператора B . Отсюда затем извлекается полное описание точечного спектра для интегралов типа (21). Как обычно, *точечные спектры* операторов A, B , т. е. множества их собственных значений, обозначаем через $\sigma_p(A)$, $\sigma_p(B)$.

ТЕОРЕМА 12.2. Пусть оператор A порождает C_0 -полугруппу $U(t)$, $t \geq 0$. Пусть $\mu(t)$ — скалярная функция ограниченной вариации на $[0, T]$. Для отрезка $[0, T]$ определим целую функцию $L(\lambda)$ по формуле (15) и оператор B по формуле (21). Обозначим через ν_0 скачок функции $\mu(t)$ в точке $t=0$, т. е. $\nu_0 \equiv \mu(0+0) - \mu(0) \in \mathbb{C}$ (не исключено, что $\nu_0=0$). Возможны следующие ситуации.

1) $\mu(t) \equiv \text{const}$ при $0 < t \leq T$. Тогда оператор B имеет вид

$$Bf = \nu_0 f, \quad f \in E, \quad (22)$$

и $\sigma_p(B) = \{\nu_0\}$.

2) Полугруппа $U(t)$ имеет нетривиальное ядро, и $\mu(t) \equiv \text{const}$ при $0 < t \leq \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon \in (0, T)$. Тогда оператор B имеет вид

$$Bf = \nu_0 f + \int_{\varepsilon}^T U(t)f d\mu(t), \quad f \in E, \quad (23)$$

и $\sigma_p(B) = L(\sigma_p(A)) \cup \{\nu_0\}$.

3) Во всех остальных случаях $\sigma_p(B) = L(\sigma_p(A))$.

В операторном исчислении полугрупп оператор B , заданный в (21), трактуется как $L(A)$ для производящего оператора A и целой функции $L(\lambda)$ из формулы (15) (см. Э. Хилле, Р. Филлипс «Функциональный анализ и полугруппы», гл. XV). Соотношение вида

$$\sigma_p(L(A)) = L(\sigma_p(A)) \quad (24)$$

называется *теоремой об отображении точечного спектра*. Как выяснилось в § 12, для оператора $B = L(A)$ равенство (24) справедливо почти всегда, за исключением тривиального случая (22) и специального случая (23), когда к $L(\sigma_p(A))$ надо добавлять точку $\nu_0 \equiv \mu(0+0) - \mu(0)$. Теорема 12.2 закрывает тему «точечного спектра» для интегралов на конечном отрезке $[0, T]$ и представляет важное продвижение в теории Э. Хилле и Р. Филлипса. Ранее имелись лишь частичные аналоги такого утверждения.

Полученные результаты об отображении спектра могут пригодиться во многих задачах для абстрактных дифференциальных уравнений. Одна из возможностей открывается сразу же — в следующей главе 3.

В этой ГЛАВЕ 3 (§§ 13–16) изучается известная обратная задача с *финальным переопределением*. Так как речь пойдет о единственности решения, рассмотрим сразу однородную версию:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + \varphi(t)g, & 0 < t < T, \\ u(0) = 0, & u(T) = 0, \end{cases} \quad (25)$$

с заданной скалярной функцией $\varphi(t)$, непрерывной на $(0, T)$, с неизвестной функцией $u : [0, T] \rightarrow E$ и неизвестным элементом $g \in E$. Тривиальное решение очевидно: $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, $g = 0$. Ставится вопрос о наличии других, нетривиальных решений (*единственность решения*).

Задача (25) входит в обширный класс обратных задач «с неизвестным источником», активно изучаемых в последние десятилетия (А. И. Прилепко, В. М. Исаков, Ю. С. Эйдельман, многие другие исследователи). Рассматриваются различные модели, применяются разные подходы. Задача (25) выделяется из прочих двумя особенностями: а) она является достаточно простой — для нее удастся получать законченные результаты; б) она является нетривиальной — для получения результатов требуется качественный математический аппарат. Этот дуализм делает задачу (25) весьма интересной, что продемонстрировано в диссертации на примере единственности решения.

Сравнительно недавно тема единственности в задаче (25) была раскрыта не полностью. Первоначально применялся метод Фурье (А. Д. Искендеров, А. И. Егоров); затем появились отдельные результаты в предположении, что оператор A порождает C_0 -полугруппу (Д. Г. Орловский, Ю. С. Эйдельман). Но общая картина долго не складывалась. В последние годы, развивая некоторые идеи Ю. С. Эйдельмана, автор смог выявить практически все возможности, возникающие в задаче (25) с единственностью и неединственностью решения, причем удалось исследовать как при-

вычный полугрупповой случай, так и общий случай линейного замкнутого оператора A . Последнее оказалось особо неожиданным.

Глава 3 дает полное изложение построенной теории.

В § 13 приведена точная постановка обратной задачи (25). *Решением* называется пара $(u(t), g)$, такая, что

$$u \in C^1((0, T); E) \cap C([0, T]; E), \quad u(t) \in D(A) \text{ при } 0 < t < T, \quad g \in E,$$

и все соотношения в (25) выполняются. Заданная скалярная функция $\varphi(t) \not\equiv 0$ считается непрерывной и суммируемой на $(0, T)$. Не исключено, что при $t = 0$ и $t = T$ функция $\varphi(t)$ имеет особенности, но всегда

$$0 < \int_0^T |\varphi(t)| dt < \infty.$$

Предварительный анализ задачи (25) выявляет элементарные примеры неединственности. Вводится характеристическая функция

$$L(\lambda) = \int_0^T e^{\lambda t} \varphi(T - t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (26)$$

Непосредственная проверка показывает, что если некоторый нуль λ_k характеристической функции (26) является собственным значением оператора A с собственным вектором $f_k \in D(A)$, $f_k \neq 0$, то пара

$$u(t) = \int_0^t e^{\lambda_k s} \varphi(t - s) f_k ds, \quad g = f_k,$$

служит нетривиальным решением обратной задачи (25).

В некоторых случаях единственность может нарушаться из-за обращения функции $\varphi(t)$ в тождественный нуль вблизи одного из краев отрезка $[0, T]$. В связи с этим вводятся соотношения *невыврожденности на краях*:

$$\int_0^\varepsilon |\varphi(t)| dt > 0, \quad \int_{T-\varepsilon}^T |\varphi(t)| dt > 0 \quad \text{для любого малого } \varepsilon > 0. \quad (27)$$

В конце параграфа § 13 даны основные ссылки по задаче (25).

В следующем § 14 при помощи результатов об отображении точечного спектра (из § 12) установлен исчерпывающий критерий единственности в предположении, что оператор A порождает C_0 -полугруппу $U(t)$. Переход к теореме об отображении спектра осуществляется через соотношение

$$\int_0^T U(t)\varphi(T-t)g dt = 0,$$

выражающее значение $u(t)$ при $t = T$. В итоге получаем такое утверждение.

ТЕОРЕМА 14.1. *Пусть оператор A порождает C_0 -полугруппу $U(t)$, $t \geq 0$. Пусть скалярная функция $\varphi(t) \not\equiv 0$ непрерывна и суммируема на $(0, T)$. Предположим дополнительно, что полугруппа $U(t)$ имеет тривиальное ядро, или что выполнено второе из соотношений (27) (на краю $t = T$). Тогда для того чтобы обратная задача (25) имела на $[0, T]$ только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (26) не являлся собственным значением оператора A .*

Данный критерий единственности использует лишь нули характеристической функций (26) и собственные значения оператора A . Кроме того, если полугруппа $U(t)$ имеет нетривиальное ядро, то приходится предполагать невырожденность функции $\varphi(t)$ на краю $t = T$. Элементарный пример, приведенный в § 14, показывает, что дальнейшие ослабления в рамках полугруппового подхода уже невозможны, и вопрос единственности здесь закрыт.

Далее, в § 15, рассматривается общий случай линейного замкнутого оператора A , когда приходится более тщательно учитывать поведение $\varphi(t)$ на краях отрезка $[0, T]$. Здесь требуется особая техника, связанная со свойствами целой функции (26). Снова, как в § 6, применяется «метод частных», с помощью которого установлен следующий результат. (Для упрощения формулировки приведем только один из двух случаев, рассмотренных в теореме 15.1.)

ТЕОРЕМА 15.1. Пусть A — линейный замкнутый оператор в E . Пусть $\varphi \in C([0, T])$, причем $\varphi(0) \neq 0$, $\varphi(T) \neq 0$. Тогда справедлив критерий единственности: для того чтобы обратная задача (25) имела на $[0, T]$ только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (26) не являлся собственным значением оператора A .

Более тонкие результаты требуют введения особого *дефектного значения* d_φ для функции $\varphi(t)$ (определение 15.1 в пункте 15.4). Похожую характеристику некогда использовал Ю. И. Любич в работе «О собственных и присоединенных функциях оператора дифференцирования» (Известия вузов. Математика. 1959. № 4. С. 94-103). Как выяснилось, идеи Любича тесно соприкасаются с нашей тематикой. В теореме 15.2 показано, что если $d_\varphi < \infty$, то критерий единственности в обратной задаче сохраняется. С помощью условия $d_\varphi < \infty$ можно ослаблять требования $\varphi(0) \neq 0$ и $\varphi(T) \neq 0$, допуская, что $\varphi(t)$ имеет в точках $t = 0$ и $t = T$ нули конечного порядка (теорема 15.3). Однако, если в $t = 0$ и $t = T$ функция $\varphi(t)$ имеет нули бесконечного порядка, то $d_\varphi = \infty$, и здесь возникает интересный пример неединственности (пункт 15.6), показывающий, что основной критерий нарушается. Этот пример напоминает знаменитую конструкцию А. Н. Тихонова, установившую неединственность решения в задаче Коши для уравнения теплопроводности. В обратной задаче картина выглядит так.

Рассмотрим следующую модель для задачи (25) (в диссертации модель дана в более общей форме):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(t)g(x), & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, T) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (28)$$

где $u = u(x, t)$ — функция в прямоугольнике $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$. Функция $\varphi \in C^\infty([0, T])$ выбрана так, что $\varphi(t) > 0$ на $(0, T)$, $\varphi^{(m)}(0) = \varphi^{(m)}(T) = 0$ при $m = 0, 1, 2, \dots$, и производные внутри интервала удовлетворяют

оценкам:

$$|\varphi^{(m)}(t)| \leq C^m (m!)^p, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < t < T, \quad (29)$$

с некоторыми константами $C > 0$, $1 < p < 2$. Существование подобных $\varphi(t)$ доказано в теории квазианалитических функций. Для пары

$$u(x, t) = \frac{x^2}{2!} \varphi(t) + \frac{x^4}{4!} \varphi'(t) + \dots + \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \varphi^{(m)}(t) + \dots, \quad g(x) \equiv -1, \quad (30)$$

выполнены все соотношения (28). Сходимость ряда для $u(x, t)$ и возможность его почленного дифференцирования следуют из оценок (29).

Указанную пару (30) можно интерпретировать как нетривиальное решение соответствующей обратной задачи (25), взяв в качестве E пространство $C([0, 1])$, а в качестве A — оператор d^2/dx^2 на области

$$D(A) = \{f \in C^2([0, 1]) : f(0) = f'(0) = 0\}.$$

Очевидно, что A не имеет собственных значений, и сравнивать нули характеристической функции (26) попросту не с чем. Таким образом, в общем случае линейного замкнутого оператора A одни лишь соотношения невырожденности (27) еще не гарантируют того, что единственность решения в задаче (25) может быть выражена через собственные значения оператора A и нули характеристической функции $L(\lambda)$.

Здесь проявляется тонкое различие между обратной задачей (25) и нелокальной задачей (14), изученной в § 6. Согласно теореме 6.2, для задачи (14) примеры с подобной идеей уже невозможны.

В отдельный § 16 вынесен случай положительной и монотонной на $(0, T)$ функции $\varphi(t)$. Для обратной задачи (25) установлены удобные достаточные признаки единственности, не требующие точного вычисления нулей характеристической функции (26). В основе вновь лежат теоремы Полия, уже использованные в § 7. Поскольку характеристическая функция (26) соответствует мере $d\mu(t) \equiv \varphi(T - t) dt$, то возникает определенная двойственность с тем, что было для нелокальной задачи (14) с мерой $d\mu(t) \equiv \eta(t) dt$. Приведем один типичный результат (ср. с теоремой 7.3 выше).

ТЕОРЕМА 16.2. Пусть A — линейный замкнутый оператор в E . Пусть $\varphi(t)$ — непрерывная, суммируемая, строго положительная функция на $(0, T)$, отличная от тождественной константы. Предположим также, что выполнено любое из условий:

- 1) функция $\varphi(t)$ — неубывающая на $(0, T)$, оператор A не имеет собственных значений на множестве $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$;
- 2) функция $\varphi(t)$ — невозрастающая на $(0, T)$, оператор A не имеет собственных значений на множестве $\operatorname{Re} \lambda < 0$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$.

Тогда обратная задача (25) имеет на $[0, T]$ только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$.

В конце § 16 обсуждается связь подобных утверждений с рядом работ по обратным задачам, где также применялись «соображения монотонности» (А. И. Прилепко, В. М. Исаков, В. В. Соловьев, А. Б. Костин, И. В. Тихонов и др.).

Таковы результаты по абстрактным дифференциальным уравнениям.

Всякую общую теорию полезно «спроецировать» на конкретный пример. В виде иллюстрации выбрана модельная нелокальная задача для многомерного уравнения теплопроводности; ей посвящена заключительная ГЛАВА 4 (§§ 17–20). Работа над задачей проходила совместно с А. Ю. Поповым. Соавтор выяснил поведение на бесконечности некоторых специальных функций, возникших по ходу исследования. Вклад А. Ю. Попова четко отмечен в тексте главы 4.

Постановка задачи дана в § 17.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с размерностью $n \geq 1$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Обозначим через Δ обычный оператор Лапласа:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

При фиксированном $T > 0$ ставится задача о нахождении функции

$$u = u(x, t), \quad u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T]),$$

из соотношений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < t \leq T, \quad (31)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(x, t) dt = f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (32)$$

с заданной функцией $f_0 \in C(\mathbb{R}^n)$. Нелокальное условие (32) называется *условием среднего по времени*. При изучении вопроса единственности естественно считать, что $f_0(x) \equiv 0$, и рассматривать однородное условие:

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(x, t) dt = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (33)$$

Множитель $1/T$ перед интегралом здесь, конечно, можно сократить. Ясно, что однородная нелокальная задача (31), (33) всегда имеет тривиальное решение $u(x, t) \equiv 0$. Если не вводить никаких ограничений, то существование других, *нетривиальных решений* будет неизбежным.

Например, пусть $w_k(x)$ есть собственная функция оператора Лапласа в $\mathbb{R}^n$ с комплексным собственным значением $\lambda_k \equiv 2k\pi i/T$ при некотором целом $k \neq 0$ ($\Delta w_k = \lambda_k w_k$, $w_k \neq 0$). Тогда формула

$$u(x, t) = w_k(x) e^{\lambda_k t} = w_k(x) e^{(2k\pi i/T)t}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (34)$$

дает нетривиальное решение однородной нелокальной задачи (31), (33). Эти решения считаются *элементарными*.

Так, для любого $\lambda_k \equiv 2k\pi i/T$ с целым $k \geq 1$ в качестве $w_k(x)$ можно взять функцию

$$w_k(x) = \exp \left(\sqrt{\frac{k\pi}{T}} (1+i)x_1 \right),$$

зависящую от одной координаты x_1 . По формуле (34) получим

$$u(x, t) = \exp \left(\sqrt{\frac{k\pi}{T}} (1+i)x_1 + \frac{2k\pi i}{T} t \right).$$

Разделяя вещественную и мнимую части, находим вещественные решения:

$$u_1(x, t) = \exp \left(\sqrt{\frac{k\pi}{T}} x_1 \right) \cos \left(\sqrt{\frac{k\pi}{T}} x_1 + \frac{2k\pi}{T} t \right), \quad (35)$$

$$u_2(x, t) = \exp \left(\sqrt{\frac{k\pi}{T}} x_1 \right) \sin \left(\sqrt{\frac{k\pi}{T}} x_1 + \frac{2k\pi}{T} t \right). \quad (36)$$

Непосредственно проверяется, что функции (35) и (36) при любом целом $k \geq 1$ удовлетворяют соотношениям (31), (33). Каждое из таких решений мажорируется в $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ показательной функцией $e^{\sigma|x|}$ со своим показателем $\sigma \in \mathbb{R}$ и представимо формулой Пуассона:

$$u(x, t)|_{0 < t \leq T} = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/(4t)} u_0(y) dy, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (37)$$

Наименьший показатель $\sigma = \sqrt{\pi/T}$ требуется при $k = 1$. Оказывается, это значение будет предельным: в однородной нелокальной задаче (31), (33) нельзя найти решения $u(x, t) \not\equiv 0$, мажорируемые экспонентами с меньшими показателями.

В теореме 17.1 намечена ключевая идея доказательства в духе общей теории из § 6, но для аккуратной реализации абстрактной схемы требуются специальные сведения об операторе Лапласа.

Сведения о Δ собраны в следующем § 18. Оператор Лапласа рассматривается в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$ на области определения $C^2(\mathbb{R}^n)$. Показано, что такой Δ замыкаем при любом $n \geq 1$, но не замкнут при $n \geq 2$. Вводится замкнутое расширение — *расширенный оператор Лапласа* Δ^* (оператор Лапласа–Привалова); его конструкция и ключевые свойства даны в книге И. И. Привалова «Субгармонические функции». С оператором Δ^* связываем область определения

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \equiv \{w \in C(\mathbb{R}^n) : \exists \Delta^* w \in C(\mathbb{R}^n)\}. \quad (38)$$

Справедливы включения $C^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \subset C^1(\mathbb{R}^n)$. При $n = 1$ имеем $\Delta^* \equiv d^2/dx^2$ и $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) = C^2(\mathbb{R}^n)$. При $n \geq 2$ картина сложнее; все подробности приведены в пункте 18.4.

В заключительной части § 18 обсуждается асимптотическое поведение комплексных собственных функций оператора Лапласа. Установлено (А. Ю. Попов), что таким собственным функциям присущ определенный экспоненциальный рост при $|x| \rightarrow \infty$.

После проделанной подготовительной работы можно вернуться к нелокальной задаче (31), (32).

В § 19 изучается вопрос единственности решения. Рассматривается однородная задача (31), (33). Основным результатом состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 19.1. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (31), (33), причем

$$|u(x, t)| \leq M e^{\sigma|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (39)$$

с константами $M > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Если $\sigma < \sqrt{\pi/T}$, то $u(x, t) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^n \times [0, T]$. Значение $\sqrt{\pi/T}$ является точным в том смысле, что однородная нелокальная задача (31), (33) имеет нетривиальные решения среди функций $u(x, t)$, удовлетворяющих оценке (39) с $\sigma = \sqrt{\pi/T}$.

Иными словами, при $\sigma < \sqrt{\pi/T}$ экспоненциальный класс (39) будет классом единственности для нелокальной задачи (31), (32), а при $\sigma \geq \sqrt{\pi/T}$ — классом неединственности. Можно ввести более тонкую классификацию, учитывающую связь с размерностью n . В теореме 19.2 утверждается, что равномерная по $t \in [0, T]$ оценка

$$\max_{|x|=r} |u(x, t)| = o \left(r^{-(n-1)/2} \exp \left(\sqrt{\frac{\pi}{T}} r \right) \right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (40)$$

гарантирует тривиальность решения однородной задачи (31), (33). Это условие единственности абсолютно неулучшаемо: в п. 19.4 показано, что равномерная по $t \in [0, T]$ оценка

$$\max_{|x|=r} |u(x, t)| = O \left(r^{-(n-1)/2} \exp \left(\sqrt{\frac{\pi}{T}} r \right) \right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (41)$$

допускает существование нетривиальных решений в однородной нелокальной задаче (31), (33).

Итак, если использовать более тонкую экспоненциально-степенную шкалу, то для изучаемой нелокальной задачи класс (40) окажется *классом единственности*, а класс (41) — *классом неединственности*. Значение n в формулах (40), (41) совпадает с размерностью пространства $\mathbb{R}^n$.

Доказательства перечисленных результатов основаны на соображениях абстрактной теории, изложенных в § 17, и на информации об асимптотическом поведении при $|x| \rightarrow \infty$ комплексных собственных функций оператора Лапласа.

Заключительный § 20 посвящен разрешимости. Рассматривается неоднородная нелокальная задача (31), (32) с заданной в $\mathbb{R}^n$ функцией $f_0(x)$. Поскольку исследование проходит в экспоненциальных классах типа (39), то применима формула Пуассона (37), и достаточно найти начальное состояние $u_0(x) \equiv u(x, 0)$ решения $u(x, t)$. Посредством формального преобразования Фурье выведена *разрешающая формула*:

$$u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_T(x - y) f_0(y) dy - T \Delta f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (42)$$

Формула содержит специальную *функцию Грина*

$$g_T(x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{T|\xi|^2}{e^{T|\xi|^2} - 1} e^{i\xi x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (43)$$

Оценку $g_T(x)$ на бесконечности получил А. Ю. Попов. Он показал, что

$$|g_T(x)| \leq D_0 \exp \left(-\sqrt{\frac{\pi}{T}} |x| \right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (44)$$

с константой $D_0 = D_0(T, n)$, зависящей лишь от T и n .

На основе оценки (44) дано обоснование разрешающей формулы (42) и доказана разрешимость нелокальной задачи (31), (32) в экспоненциальных классах (39) с соответствующими показателями σ .

Пусть $\sigma \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ класс функций $u(x, t)$, заданных на $\mathbb{R}^n \times [0, T]$, для которых справедлива оценка (39) с какой-то константой $M > 0$, зависящей от функции u . Аналогичный класс функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, обозначим через $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Удобный и простой вариант теоремы разрешимости выглядит так.

ТЕОРЕМА 20.1. Пусть $f_0 \in C^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta f_0 \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ при фиксированном $\sigma \in \mathbb{R}$, таком, что $|\sigma| < \sqrt{\pi/T}$. Тогда нелокальная задача (31), (32) имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ с тем же значением σ . Это решение выражается формулами (37), (42). Других решений в классе $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ нет.

Теорема 20.1 не учитывает некоторых особенностей, возникающих при $\sigma \leq -\sqrt{\pi/T}$. Кроме того, для применения формулы (42) в полном объеме надо заменить в ней обычный оператор Лапласа Δ расширенным оператором Лапласа Δ^* с областью определения $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ из формулы (38). Подлинная разрешающая формула выглядит так:

$$u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_T(x - y) f_0(y) dy - T \Delta^* f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (45)$$

Наиболее общий результат по разрешимости представлен в теореме 20.3. Там учтены практически все возможности. Для краткости обозначаем $\sigma_0 \equiv \sqrt{\pi/T}$.

ТЕОРЕМА 20.3. Пусть σ — фиксированное число, причем

$$-\infty < \sigma < \sigma_0 \equiv \sqrt{\pi/T}.$$

Справедливы следующие утверждения.

- 1) При любой функции $f_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ нелокальная задача (31), (32) может иметь не более одного решения в классе $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$.
- 2) Для того чтобы нелокальная задача (31), (32) была разрешимой в $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ необходимо, чтобы $f_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$, и чтобы $\Delta^* f_0 \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$.
- 3) Обратно, пусть $f_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^* f_0 \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$, т. е.

$$|f_0(x)| \leq M e^{\sigma|x|}, \quad |\Delta^* f_0(x)| \leq M e^{\sigma|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (46)$$

с некоторой константой $M > 0$. Тогда задача (31), (32) имеет решение $u(x, t)$, которое находится по формулам (37), (45), причем функция $g_T(x)$ в (45) определяется формулой (43). Дальнейшее описание

данного решения $u(x, t)$ зависит от того, в какой промежуток попадает исходное значение σ .

- 4) При $-\sigma_0 < \sigma < \sigma_0$ решение $u(x, t)$ принадлежит $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ и удовлетворяет оценке устойчивости

$$|u(x, t)| \leq MNe^{\sigma|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (47)$$

где M такая же, как в (46), а константа $N > 0$ зависит только от n, T, σ , но не зависит от M и $f_0(x)$.

- 5) При $\sigma < -\sigma_0$ решение $u(x, t)$ принадлежит $\mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ и удовлетворяет оценке устойчивости

$$|u(x, t)| \leq MNe^{-\sigma_0|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (48)$$

где M такая же, как в (46), а константа $N > 0$ зависит только от n, T, σ .

- 6) Наконец, при $\sigma = -\sigma_0$ можно утверждать, что

$$u \in \bigcap_{\sigma_1 > -\sigma_0} \mathcal{E}_{\sigma_1}(\mathbb{R}^n \times [0, T]), \quad (49)$$

причем для любого $\sigma_1 > -\sigma_0$ справедлива оценка

$$|u(x, t)| \leq MNe^{\sigma_1|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (50)$$

где M такая же, как в (46), а константа $N > 0$ зависит только от n, T, σ_1 .

Оценки (47), (48), (50) гарантируют «малость» решения $u(x, t)$ при соответствующей «малости» величин $|f_0(x)|$ и $|\Delta^* f_0(x)|$, что и означает устойчивость решения. Утверждения 5) и 6) теоремы 20.3 точны в экспоненциальных классах $\mathcal{E}_\sigma$; точность подтверждается явными примерами. Формулу (49) можно детализировать, если использовать экспоненциально-степенные мажоранты вида $|x|^\alpha e^{-\sigma_0|x|}$, где α зависит от размерности n . Но такая проработка нюансов выходит за рамки нашего исследования.

Подводя итог, можно сказать, что для нелокальной задачи (31), (32) получено полное описание классов единственности и разрешимости в терминах экспоненциального поведения решений при $|x| \rightarrow \infty$. Как часто бывает, при работе с конкретной моделью обнаружилось много обстоятельств, неразличимых в контексте абстрактной теории.

Автор благодарен В. А. Ильину, А. И. Прилепко, А. М. Седлецкому за обсуждение и поддержку результатов работы; А. Ю. Попову и Ю. С. Эйдельману за плодотворные научные контакты; Д. С. Ткаченко за помощь при оформлении.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Тихонов И. В. О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 6. – С. 841-843.

2. Тихонов И. В. Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Известия РАН, сер. матем. – 2003. – Т. 67, № 2. – С. 133-166.

3. Тихонов И. В. Абстрактные дифференциальные нуль-уравнения // Функц. анализ и его прилож. – 2004. – Т. 38, вып. 2. – С. 65-70.

4. Тихонов И. В. Обобщенная задача Уорда для абстрактных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 3. – С. 325-336.

5. Тихонов И. В. Соображения монотонности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюллетень. – 2001. – Т. 2, № 1. – С. 119-128.

6. Тихонов И. В. Структурные свойства нуль-решений абстрактной задачи Коши // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюллетень. – 2002. – Т. 3, № 1. – С. 22-38.

7. Тихонов И. В. Нелокальная задача с «периодическим» интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюллетень. – 2004. – Т. 4, № 1. – С. 49-69.
8. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 5. – С. 637-644.
9. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Теоремы об отображении точечного спектра для C_0 -полугрупп и их применение в вопросах единственности для абстрактных дифференциальных уравнений // Доклады РАН. – 2004. – Т. 394, № 1. – С. 32-35.
10. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым // Матем. заметки. – 2005. – Т. 77, вып. 2. – С. 273-290.
11. Попов А. Ю., Тихонов И. В. Экспоненциальные классы единственности в задачах теплопроводности // Доклады РАН. – 2003. – Т. 389, № 4. – С. 465-467.
12. Попов А. Ю., Тихонов И. В. Классы единственности в нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 3. – С. 396-405.
13. Попов А. Ю., Тихонов И. В. Разрешимость задачи теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени // Доклады РАН. – 2004. – Т. 398, № 6. – С. 738-742.
14. Попов А. Ю., Тихонов И. В. Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени // Матем. сборник. – 2005. – Т. 196, № 9. – С. 71-102.
15. Eidelman Y. S., Tikhonov I. V. On periodic solutions of abstract differential equations // Abstract and Applied Analysis. – 2001. – V. 6, No 8. – P. 489-499.