

ЯКУШКИН НИКОЛАЙ АНДРЕЕВИЧ

**ПРИЛОЖЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ
ШВАРЦА К ИССЛЕДОВАНИЮ БИФУРКАЦИЙ
ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ**

Специальность 01.01.02. Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

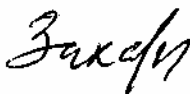
**Москва
2008**

Работа выполнена	На кафедре высшей математики факультета естественных наук Обнинского государственного технического университета атомной энергетики (ИАТЭ)
Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Сатаев Евгений Анатольевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Магницкий Николай Александрович доктор физико-математических наук, профессор Жиров Алексей Юрьевич
Ведущая организация	Нижегородский государственный университет

Защита диссертации состоится « 19 » ноября 2008 г. в 15 часов 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Россия, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-ой учебный корпус, факультет ВМК, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова

Автореферат разослан « 19 » октября 2008 г.
Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук,
профессор



Захаров Е.В.

Актуальность темы

Задача о мягкости или жесткости бифуркаций Андронова-Хопфа, удвоения периода предельного цикла и рождения инвариантного тора из неустойчивого предельного цикла для семейств векторных полей и удвоения периода неподвижной точки и рождения инвариантной окружности для семейств диффеоморфизмов имеет важное теоретическое и практическое значение.

Решение рассматриваемой задачи способствовало развитию теории колебаний, теории автоматического регулирования, радиофизики и других научно-технических дисциплин.

Математический аппарат, созданный для решения рассматриваемой задачи, применяется для изучения динамики сложных управляемых систем таких как ядерные энергетические установки, системы гироскопической стабилизации и слежения и т.п.

В настоящее время ряд Российских и зарубежных исследовательских групп (например, группы в Саратове, Нижнем Новгороде, Ярославле и др.) занимаются исследованиями типа бифуркаций в различных приложениях. Решение данной задачи, как правило, сводится к вычислению ляпуновских величин.

Вычислении ляпуновских величин – сложная задача, решение которой связано с использованием методов теории нормальных форм или известных (весьма громоздких) формул. Особенные трудности вызывает изучение бифуркаций предельных циклов, так как для решения этой задачи приходится вычислять производные третьего порядка для отображения последования вдоль цикла. Поэтому новые подходы к построению соответствующих алгоритмов имеют важное значение.

Цель работы

Диссертация посвящена развитию методов решения рассматриваемых задач теории бифуркаций, основанных на применении, предложенной Е.А. Сатаевым обобщенной производной Шварца. Целью данной работы является построение и доведение до численных алгоритмов методики определения типа бифуркаций в конкретных системах, основанной на применении обобщенной производной Шварца.

Научная новизна диссертации состоит в том, что:

- Доказана теорема о равенстве значения обобщенной производной Шварца, вычисленной вдоль бифурцирующего предельного цикла семейства векторных полей, первой ляпуновской величине соответствующего отображения за период.
- Разработана методика, основанная на приложениях обобщенной производной Шварца к решению задач о мягкости или жесткости бифуркаций потери устойчивости, доведена до численных алгоритмов и проиллюстрирована на примерах.
- Доказана мягкость бифуркации рождения инвариантного тора из неустойчивого предельного цикла в системе двух связанных осцилляторов Ван-дер-Поля.
- Получены значимые для ядерной энергетики результаты, состоящие в исследовании бифуркационной границы в точечной модели йодно-ксеноновых колебаний.
- Доказана мягкость бифуркаций удвоения периода предельного цикла в системах Лоренца и Шимицу-Мариоко.

Личный вклад соискателя состоит в:

- Доказательстве теоремы о равенстве значения обобщенной производной Шварца, вычисленной вдоль бифурцирующего предельного цикла семейства векторных полей, первой ляпуновской величине соответствующего отображения за период.
- Доведении до численных алгоритмов методики, основанной на приложениях обобщенной производной Шварца к решению задач о мягкости или жесткости бифуркаций потери устойчивости
- Доказательстве мягкости бифуркации рождения инвариантного тора из неустойчивого предельного цикла в системе двух связанных осцилляторов Ван-дер-Поля.
- Получении значимых для ядерной энергетики результатов, состоящих в исследовании бифуркационной границы в точечной модели йодно-ксеноновых колебаний.
- Доказательстве мягкости бифуркаций удвоения периода предельного цикла в системах Лоренца и Шимицу-Мариоко.

Соискатель выносит на защиту

- Теорему о равенстве значения обобщенной производной Шварца, вычисленной вдоль бифурцирующего предельного цикла семейства векторных полей, первой ляпуновской величине соответствующего отображения за период.

- Методику вычисления величин, определяющих тип бифуркации, основанную на приложении обобщенной производной Шварца к решению задач о мягкости или жесткости бифуркаций потери устойчивости.

- Доказательство мягкости бифуркаций удвоения периода предельного цикла в системах Лоренца и Шимицу-Мариоко.

- Доказательство мягкости бифуркации рождения инвариантного тора из неустойчивого предельного цикла в системе двух связанных осцилляторов Ван-дер-Поля.

- Результаты исследования бифуркационной границы в точечной модели йодно-ксеноновых колебаний.

Апробация работы

Основные результаты проведенных исследований представлялись соискателем

- на научном семинаре отдела №2 математики и программных средств ГНЦ РФ. ФЭИ (Обнинск);

- на научном семинаре кафедры высшей математики Обнинского Государственного Технического Университета Атомной Энергетики под руководством проф. Е.А. Сатаева;

- на заседании кафедры высшей математики Обнинского Государственного Технического Университета Атомной Энергетики;

- на научном семинаре кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления факультета ВМК МГУ под руководством проф. Н.А. Магницкого.

- на следующих международных научных конференциях:

- Международная конференция студентов и аспирантов «Ломоносов 2004» (Москва 2004);

- Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы» (Москва 2004);

- Международная конференция студентов и аспирантов «Ломоносов 2005» (Москва 2005);

- Международная конференция «Математические идеи П.Л. Чебышева» (Обнинск 2006);
- Международная конференция «Математическая гидродинамика» (Москва 2006);
- Международная конференция «Математические идеи П.Л. Чебышева» (Обнинск 2008);

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах соискателя, список которых приведен в конце реферата [1–7].

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы (источников). Работа изложена на 95 листах, включая 82 страницы текста, 1 таблицу и 8 рисунков.

Глава 1. Предварительные сведения

В данной главе разъяснен используемый в диссертации математический аппарат, включающий в себя величины тензорного вида, 2-струи, метод локализации предельных циклов векторных полей, необходимые элементы теории бифуркаций для семейств векторных полей и семейств отображений и необходимые для вычисления ляпуновских величин элементы теории нормальных форм для векторных полей и отображений. Этот математический аппарат содержит один необычный конструкт – величины тензорного вида. Величина тензорного вида T типа (m, k) определяется в некоторой точке $x \in R^n$ набором, зависящих от системы координат, чисел $T = \{T_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_m}\}$. Величины тензорного вида отличаются от тензоров правилами преобразования (при нелинейной замене координат), а также тем, что для величин тензорного вида определена необычная операция свертки. Свертка величин тензорного вида типов (m, n) , (n, k) соответственно является величиной тензорного вида:

$$(P * Q)_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_m} = \sum_{l_1, \dots, l_n} (P_{l_1, \dots, l_n}^{i_1, \dots, i_m}) (Q_{j_1, \dots, j_k}^{l_1, \dots, l_n}) \text{ типа } (m, k).$$

Примерами величин тензорного вида являются используемые ниже производные векторных полей и диффеоморфизмов.

Пусть $x \in R^n$, f -определенное в R^n векторное поле, $\Psi: R^n \rightarrow R^n$ – диффеоморфизм, тогда первые, вторые и третьи производные векторного поля f представляют собой следующие величины тензорного вида:

$$f'(x) = \{f^i_j(x)\} = \left\{ \frac{\partial f^{(i)}(x)}{\partial x_j} \right\}, \quad f''(x) = \{f^{ii}_{j,k}(x)\} = \left\{ \frac{\partial^2 f^{(i)}(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right\},$$

$$f'''(x) = \{f^{iii}_{j,k,m}(x)\} = \left\{ \frac{\partial^3 f^{(i)}(x)}{\partial x_j \partial x_k \partial x_m} \right\}.$$

Аналогично определяются производные диффеоморфизма Ψ .

2-струя (далее струя) функции φ в точке u_0 такой, что $\varphi(u_0) = 0$ определяется парой $J = (L, B)$, состоящей из линейного (L) и квадратичного (B)

Функционалы L, B рассматриваются как величины тензорного вида типов $(0,1)$ и $(0,2)$ соответственно. Действие отображения

$\Psi: R^n \rightarrow R^n$ на струю J определяется так, что если $\tilde{J} = \left(\tilde{L}, \tilde{B} \right)$ –

струя функции φ в точке $u_1 = \Psi(u_0)$, то $J = \left\{ \Psi, \tilde{J} \right\}$ – струя функ-

ции $\varphi \circ \Psi$ в точке u_0 . Соответствующие линейные и квадратичные функционалы связаны соотношениями:

$$\begin{cases} L = \tilde{L}^* \Psi'(u_0), \\ B = \tilde{L}^* \Psi''(u_0) + \tilde{B}^* (\Psi'(u_0) \otimes \Psi'(u_0)). \end{cases}$$

Определенная в неподвижной точке $u_0 \in R^n$ диффеоморфизма $\Psi: R^n \rightarrow R^n$ струя $J = (L, B)$ называется собственной струей дан-

ного диффеоморфизма, соответствующей собственному значению λ , если

$$\{\Psi, J\} = \lambda J.$$

Глава 2. Обобщенная производная Шварца и ее приложения

Известно, что производная Шварца функции $\varphi(z)$ имеет вид:

$$\wp_{\varphi}(z) = \frac{\varphi'''(z)}{\varphi'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} \right)^2.$$

В начале главы 2 приводится определение обобщенной производной Шварца. Пусть Ψ – отображение области $U_1 \subset R^n$ в область $U_2 \subset R^n$. Для заданной точки $x \in U_1$ и заданной струи $J = (L, B)$ определим струю $\tilde{J} = \left(\tilde{L}, \tilde{B} \right)$ такую, что $J = \left\{ \Psi, \tilde{J} \right\}$, а также величины тензорного вида

$$U_{\Psi}(\tilde{J}) = 3 \left(\tilde{B} \otimes \tilde{L} - \tilde{L} \otimes \tilde{B} \right) * \left(\Psi''(x) \otimes \Psi'(x) \otimes \Psi'(x) \right),$$

$$V_{\Psi}(\tilde{J}) = \left(\tilde{L} \otimes \tilde{L} \right) * \left(\Psi'''(x) \otimes \Psi'(x) \right) - \frac{3}{2} \left(\Psi''(x) \otimes \Psi''(x) \right),$$

Для произвольного вектора v определим величину тензорного вида:

$$\begin{aligned} T(v) = & \bar{v} \otimes v \otimes v \otimes v + v \otimes \bar{v} \otimes v \otimes v + \\ & + v \otimes v \otimes \bar{v} \otimes v + v \otimes v \otimes v \otimes \bar{v}. \end{aligned}$$

Тогда обобщенная производная Шварца $\wp$ отображения Ψ , вычисленная в точке x относительно струи J и вектора v , определяется следующим образом:

$$\wp_{\Psi}(\tilde{J}; v)(x) = \left(U_{\Psi}(\tilde{J}) + V_{\Psi}(\tilde{J}) \right) * T(v).$$

Основное свойство обобщенной производной Шварца состоит в следующем. Пусть $\Psi_1, \Psi_2 : R^n \rightarrow R^n$ отображения такие, что для

точек x_0, x_1 справедливо равенство $\Psi_1(x_0) = x_1$. Предположим, что в точке x_1 определены струя $\tilde{J} = \begin{pmatrix} \tilde{L} \\ \tilde{B} \end{pmatrix}$ и вектор $\tilde{v}$, струя $J = (L, B)$ и вектор v , определенные в точке x_0 , таковы что $\{\Psi_1, \tilde{J}\} = J$, $\Psi_1(v) = \tilde{v}$. Тогда

$$\wp_{\Psi_2 \circ \Psi_1}(J; v)(x_0) = \wp_{\Psi_1}(J; v)(x_0) + \wp_{\Psi_2}(\tilde{J}; \tilde{v})(x_1)$$

Ниже представлены алгоритмы использования обобщенной производной Шварца для решения задач о мягкости или жесткости некоторых бифуркаций.

Исследование бифуркаций неподвижной точки семейства диффеоморфизмов

Пусть $\Psi_a : R^n \rightarrow R^n$ – однопараметрическое семейство диффеоморфизмов, обладающих неподвижной точкой $u_0(a)$. Если существует значение $a_0 \in I$ такое, что спектр $\lambda_1(a_0), \dots, \lambda_n(a_0)$ матрицы $\Psi'_{a_0}(u_0(a_0))$ удовлетворяет одному из двух следующих условий:

$$\begin{cases} \lambda_1(a_0) = -1, \frac{\partial}{\partial a} \lambda_1(a_0) < 0, |\lambda_2(a)|, \dots, |\lambda_n(a)| < 1, \\ |\lambda_1(a_0)| = 1, \frac{\partial}{\partial a} |\lambda_1(a_0)| > 0, \lambda_1(a) = \overline{\lambda_2(a)}, |\lambda_3(a)|, \dots, |\lambda_n(a)| < 1, \end{cases}$$

то при $a = a_0$ происходит бифуркация удвоения периода неподвижной точки $u_0(a)$ или рождения инвариантной окружности из неустойчивой неподвижной точки соответственно. Мягкость или жесткость любой из двух рассматриваемых бифуркаций определяется первой ляпуновской величиной (или коэффициентом соответствующей нормальной формы).

Е.А. Сатаев показал, что если v и $J = (L, B)$ – собственный вектор и собственная струя диффеоморфизма $\Psi_{a_0}(u_0(a_0))$, то значение

обобщенной производной Шварца $\wp_{\Psi_{a_0}}(J; \mathbf{v})(u_0(a_0))$ совпадает (с точностью до натурального множителя) с соответствующим коэффициентом нормальной формы.

Струя $J = (L, B)$ и вектор $\mathbf{v}$ диффеоморфизма Ψ в точке u_0 определяются из уравнений:

$$\begin{cases} L\Psi_{a_0}'(u_0(a_0)) = \lambda_1(a_0)L, & \Psi_{a_0}'(u_0(a_0))\mathbf{v} = \lambda_1(a_0)\mathbf{v}, & L * \mathbf{v} = 1, \\ \lambda_1(a_0)B = L * \Psi_{a_0}''(u_0(a_0)) + B * (\Psi_{a_0}'(u_0(a_0)) \otimes \Psi_{a_0}'(u_0(a_0))). \end{cases}$$

В диссертации приведены примеры приложения обобщенной производной Шварца для исследования типа бифуркации удвоения периода неподвижной точки семейства диффеоморфизмов.

Вычисление обобщенной производной Шварца для векторного поля

Пусть f – определенное в R^n векторное поле, порождающее фазовый поток Ψ^t . Обобщенная производная Шварца векторного поля f в произвольной точке x_0 , вычисленная относительно струи J и вектора $\mathbf{v}$, определяется так

$$\wp_f(J; \mathbf{v})(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \wp_{\Psi^t}(J; \mathbf{v})(x_0).$$

Значение $\wp_f(J; \mathbf{v})(x_0)$ можно вычислить следующим образом. Для струи J в точке x_0 определим следующие величины тензорного вида:

$$U_f(J) = (L \otimes L) * (f''(x_0) \otimes \delta),$$

$$V_f(J) = 3(B \otimes L - L \otimes B) * (f''(x_0) \otimes \delta \otimes \delta),$$

где δ – величина тензорного вида, соответствующая символу Кронекера. Тогда обобщенная производная Шварца векторного поля f , вычисленная в точке x_0 относительно струи $J = (L, B)$ и вектора $\mathbf{v}$, имеет вид:

$$\wp_f(J; \mathbf{v})(x_0) = (U_f(J) + V_f(J)) * T(\mathbf{v})$$

Исследование бифуркации Андронова-Хопфа

Пусть $I \subset R$ – ограниченный интервал, f_a – семейство определенных в R^n векторных полей, обладающих при $a \in I$ неподвижной точкой x_0 . Пусть существует значение $a_0 \in I$ такое, что при $a = a_0$ в неподвижной точке x_0 происходит бифуркация Андронова-Хопфа. Мягкость или жесткость данной бифуркации определяется коэффициентом соответствующей нормальной формы.

Е.А. Сатаев показал, что если струя $J = (L, B)$ и вектор v являются собственными для векторного поля f_{a_0} в точке x_0 , то значение $\rho_{f_{a_0}}(J; v)(x_0)$ с точностью до натурального множителя совпадет с соответствующим коэффициентом нормальной формы. Струя $J = (L, B)$ и вектор v могут быть определены из соотношений:

$$\begin{cases} Lf_{a_0}'(x_0) = \kappa L, & f_{a_0}'(x_0)v = \kappa v, L^*v = 1, \\ \kappa B = L^* f_{a_0}''(x_0) + (B^* f_{a_0}'(x_0) + f_{a_0}'(x_0)^* B), \end{cases}$$

где κ – чисто мнимое собственное значение матрицы $f_{a_0}'(x_0)$.

В диссертации построены примеры приложения обобщенной производной Шварца для исследования типов бифуркаций Андронова-Хопфа.

Исследование бифуркаций предельных циклов

Пусть $I \subset R$ ограниченный интервал, f_a – семейство определенных в R^n векторных полей, обладающих при каждом $a \in I$ предельным циклом C_a периода $\tau(a)$. Пусть существует значение $a_0 \in I$ такое, что для мультипликаторов $\mu_1, \dots, \mu_n$ предельного цикла C_{a_0} верно одно из следующих соотношений:

$$\begin{cases} \mu_1 = -1, \frac{\partial \mu_1(a_0)}{\partial a} < 0, |\mu_2|, \dots, |\mu_{n-1}| < 1, \mu_n = 1, \\ \left| \mu_1 \right| = 1, \frac{\partial |\mu_1(a_0)|}{\partial a} > 0, \mu_1 = \overline{\mu_2}, \quad |\mu_3|, \dots, |\mu_{n-1}| < 1, \mu_n = 1. \end{cases}$$

Тогда при $a = a_0$ происходит бифуркация удвоения периода предельного цикла C_{a_0} или бифуркация рождения инвариантного тора из неустойчивого предельного цикла C_{a_0} . Мультипликатору μ_1 соответствует характеристический показатель χ_1 , т.е. такое комплексное число, что $\mu_1 = e^{\chi_1 \tau(a_0)}$.

В данных случаях мягкость или жесткость бифуркации предельного цикла определяется соответствующим коэффициентом нормальной формы отображения за период. В работе Е.А. Сатаева, посвященной обобщенной производной Шварца, утверждается (без доказательства), что если в каждой точке $x \in C_{a_0}$ определить вектор $v(x)$ и струю $J(x) = (L(x), B(x))$ таким образом, что

$$e^{\chi_1 t} v(\Psi^t(x)) = \Psi^t(v(x)), \quad e^{\chi_1 t} J(x) = \{\Psi^t, J(x)\},$$

тогда мягкость или жесткость рассматриваемых бифуркаций предельных циклов определяется величиной

$$S = \int_0^{\tau(a_0)} \oint_f (J(x(t)); v(x(t)))(x(t)) dt.$$

Если $\operatorname{Re} S < 0$, бифуркация мягкая, если $\operatorname{Re} S > 0$ – жесткая.

В диссертации построены примеры приложения обобщенной производной Шварца для исследования типов бифуркаций удвоения периода предельного цикла, а также рождения инвариантного тора.

В диссертации доказано (см. теорему 1), что условия

$$e^{\chi_1 t} v(\Psi^t(x)) = \Psi^t(v(x)), \quad e^{\chi_1 t} J(x) = \{\Psi^t, J(x)\}$$

следует дополнить равенством $L(x) * v(x) = 1$.

В соответствующем утверждении выбор струи и вектора в точках цикла отличается от вышеприведенного. Это объясняется тем, что численные алгоритмы для вычисления ляпуновской величины, основанные на таком выборе, являются более простыми.

Теорема 1. Пусть $I \subset R$ – ограниченный интервал, f_α – однопараметрическое семейство определенных в R^n векторных полей, обладающих при $\alpha \in I$ предельным циклом C_α . Пусть существует зна-

чения $\alpha_1 \in I$ такое, что предельный цикл $C_{\alpha_1} = \{x(t) : t \in [0, \tau(\alpha_1)]\}$ обладает мультипликатором $\mu = -1$ (или парой комплексно-сопряженных мультипликаторов $\mu, \bar{\mu}$ равных по модулю 1), остальные мультипликаторы лежат внутри единичного круга.

Пусть на предельном цикле C_{α_1} построены семейства струй $\{J(x(t))\}$ и векторов $v(x(t))$ так, что $J(x(0)), v(x(0))$ являются собственными струей и вектором отображения $\Psi^{\tau(\alpha_1)}$ в точке $x(0)$ и выполнены условия

$$J(x(0)) = \{\Psi^t, J(x(t))\}, \quad v(x(t)) = \Psi^t(v(x(0))), \quad (L(x(0)), v(x(0))) = 1.$$

Пусть

$$S = \int_0^{\tau(\alpha_1)} \wp_f(J(x(t)); v(x(t)))(x(t)) dt.$$

Тогда первая ляпуновская величина отображения за период в окрестности бифурцирующего предельного цикла C_{α_1} равна (с точностью до положительного множителя) вещественной части величины S .

Семейства $\{J(x(t))\} = \{(L(x(t)), B(x(t)))\}$, $v(x(t))$ строятся следующим образом.

1) Из уравнений

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\Psi^t)'(x(0)) = f'(x(t)) * (\Psi^t)'(x(0)), \\ \frac{d(\Psi^t)''(x(0))}{dt} = f'(x(0)) * (\Psi^t)''(x(0)) + \\ + f''(x(t)) * \left((\Psi^t)'(x(0)) \otimes (\Psi^t)'(x(0)) \right). \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями $(\Psi^0)'(x(0)) = E, (\Psi^0)''(x(0)) = 0$ строятся первая $\Phi = (\Psi^{\tau(\alpha_1)})'(x(0))$ и вторая $(\Psi^{\tau(\alpha_1)})''(x(0))$ производные отображения за период соответствующего предельному циклу C_{α_1} .

2) Из уравнений

$$\begin{cases} \mu_1 L(x(0)) = L(x(0))\Phi, \mu v(x(0)) = \Phi v(x(0)), \\ \mu_1 B(x(0)) = L(x(0)) * \left(\Psi^{\tau(\alpha_1)} \right)'(x(0)) + B(x(0)) * (\Phi \otimes \Phi). \end{cases} \quad (2)$$

строятся вектор $v(x(0))$ и струя $J(x(0)) = (L(x(0)), B(x(0)))$.

3) Из уравнений

$$\begin{cases} \frac{dv(x(t))}{dt} = f'(x(t))v(x(t)), \\ \frac{dL(x(t))}{dt} = -L(x(t))f'(x(t)), \\ \frac{dB(x(t))}{dt} = -L(x(t)) * f''(x(t)) + B(x(t)) * (f'(x(t)) \otimes \delta + \delta \otimes f'(x(t))), \end{cases} \quad (3)$$

с начальными условиями, определяемыми из (2), строятся семейства струй и векторов $\{J(x(t))\}, \{v(x(t))\}$.

Подробнее см. диссертацию.

Глава 3. Примеры

В данной главе рассмотрены следующие примеры приложения обобщенной производной к решению задач теории бифуркаций.

Исследование бифуркационной границы в модели процесса капитализации рыночной экономики, которая представляет собой систему из трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = bx((1-s)z - py); \\ \frac{dy}{dt} = x(1 - (1-p)y - sz); \\ \frac{dz}{dt} = a(y - cx), \end{cases} \quad x, y, z \in R, \quad a = 7, \quad b = 0.4, \quad c = 1.17.$$

Данная система предложена в работе Н.А. Магницкого и Н.В. Сидорова. В диссертации вычислением соответствующего значения обобщенной производной Шварца показано, что при переходе значений параметров через определенную границу в одной из неподвижных точек данной системы происходит жесткая бифуркаций Андронова-Хопфа.

Исследование бифуркационной границы в точечной модели ксеноновых колебаний

Н.А. Рябовым и А.А. Семеновыми была предложена следующая модель йодно-ксеноновых колебаний в ядерных реакторах. Пусть $x(t), y(t)$ – изменяющиеся во времени концентрации йода и ксенона в некотором объеме активной зоны ядерного реактора. Тогда для функций $x(t), y(t)$ с некоторыми допущениями справедлива система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\beta(1 + \alpha x) + k_1 y}{k_1 + 1} - x(1 + \beta(1 + \alpha x)), \\ \frac{dy}{dt} = k_2(\beta(1 + \alpha x) - y), \end{cases} \quad (4)$$

где α, β – управляющие параметры, k_1, k_2 – коэффициенты обусловленные свойствами йода и ксенона. Семеновым и Рябовым показано, что на плоскости параметров α, β имеется кривая, являющаяся границей области устойчивости неподвижной точки системы

$$\begin{cases} x_0(\alpha, \beta) = \frac{-(1 + \beta(1 - \alpha)) + \sqrt{4\alpha\beta^2 + (1 + \beta(1 - \alpha))^2}}{2\alpha\beta}, \\ y_0(\alpha, \beta) = \beta(1 + \alpha x_0(\alpha, \beta)) \end{cases} \quad (5)$$

В диссертации доказано, что данная граница является безопасной, т.е. при переходе значений параметров α, β через данную границу в неподвижной точке (5) системы (4), происходит мягкая бифуркация Андронова-Хопфа.

Для доказательства мягкости данной бифуркации выбирались пары значений (α_i, β_i) , $i \in \{1, \dots, 1000\}$ равномерно распределенных по границе области устойчивости. Затем в неподвижной точке системы вычислялись значения обобщенной производной Шварца векторного поля, порождающего фазовый поток системы. Все вычисленные значения обобщенной производной Шварца обладали отрицательными вещественными частями, следовательно, исследуемая бифуркационная граница – безопасная [5].

Исследование бифуркации Андронова-Хопфа в системе Лоренца

Система Лоренца имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x); \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz; \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases} \quad x, y, z \in R, \quad \sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r > 0. \quad (6)$$

Н.В. Рощин, используя формулы Н.Н. Баутина, показал, что при $r \approx 24.73$ в неподвижной точке $(x_0, y_0, z_0) \approx (7.95, 7.95, 23.73)$ системы (6) имеет место жесткая бифуркация Андронова-Хопфа. В диссертации приведено более краткое доказательство данного результата, состоящее в вычислении соответствующего значения обобщенной производной Шварца

Исследование бифуркации удвоения периода предельного цикла для системы Лоренца

Известна гипотеза о том, что изменение значения параметра r в определенных границах влечет каскад мягких бифуркаций удвоений периодов предельных циклов системы Лоренца.

Одна из таких бифуркаций происходит при $r \approx 148.68$. В диссертации вычислением обобщенной производной Шварца вдоль бифурцирующего предельного цикла показана мягкость данной бифуркации.

Исследование бифуркации рождения инвариантного тора из неустойчивого предельного цикла системы Хаяши-Каваками

Система Хаяши-Каваками имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = q \cos t - \frac{1}{8}u(u^2 + 3w^2) - k_1 v, \\ \frac{dw}{dt} = q_0 - \frac{1}{8}k_2 w(3u^2 + w^2), \end{cases} \quad (7)$$

При $q = 0.22$, $q_0 = 0.03$, $k_1 = 0.05$, $k_2 \approx 0.1189$ в системе (7) имеет место бифуркация рождения инвариантного тора из неустойчивого предельного цикла. В диссертации вычислением соответствующего значения обобщенной производной Шварца доказано, что данная бифуркация мягкая.

Исследование бифуркации удвоения периода предельного цикла в системе Шимицу-Мориоко

Система Шимицу-Мориоко имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x - ay - xz, \\ \frac{dz}{dt} = x^2 - bz \end{cases}$$

Известна гипотеза о том, что изменение значения одного из параметров в определенных границах влечет каскад мягких бифуркаций удвоений периодов предельных циклов данной системы. Одна из таких бифуркаций происходит при $a \approx 0.5566707$, $b \approx 0.4554$. В диссертации вычислением обобщенной производной Шварца вдоль бифурцирующего предельного цикла показана мягкость данной бифуркации.

Исследование типа бифуркации рождения инвариантного тора в системе двух связанных осцилляторов Ван дер Поля

Динамика двух связанных ван дер полевских осцилляторов описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = z - 2x + au(1 - x^2), \\ \frac{dw}{dt} = z - 2y + aw(1 - y^2), \\ \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = w, \quad \frac{dz}{dt} = x + y - 2z. \end{cases} \quad (8)$$

При $k = 1$, $a \approx 0.8$ в системе (8) происходит бифуркация рождения инвариантного тора из неустойчивого предельного цикла. В диссертации вычислением обобщенной производной Шварца для бифурцирующего предельного цикла показано, что данная бифуркация мягкая [7].

Исследование бифуркации удвоения периода неподвижной точки отображение Эно

Отображение Эно имеет вид

$$H : (x, y) \rightarrow (1 + y - ax^2, bx), x, y \in R. \quad (9)$$

Отображение обладает неподвижной точкой

$$x_0 = \frac{b - 1 - \sqrt{(b - 1)^2 + 4a}}{2a}, y_0 = bx_0$$

При $a = \frac{3(b - 1)^2}{4}$ происходит бифуркация удвоения периода неподвижной точки отображения (9). Вычислением соответствующих значений обобщенной производной Шварца первой ляпуновской величины показано, что при $a = \frac{3}{16}$, $b = \frac{1}{2}$ имеет место мягкая бифуркация удвоения периода неподвижной точки $x_0 = \frac{4}{3}$, $y_0 = \frac{2}{3}$ отображения (9).

Благодарности

Соискатель выражает благодарность своему научному руководителю Е.А. Сатаеву за постановку задачи, пристальное внимание к выполняемой работе и методическую помощь.

Литература

1. Н.А. Якушкин. Шварциан в теории бифуркаций //Материалы международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным направлениям «Ломоносов 2004» секция ВМиК. – М.: МГУ, 2004. – С. 31–32.
2. Н.А. Якушкин. Исследование системы Лоренца при помощи шварциана//Международная конференция «дифференциальные уравнения и смежные вопросы» посвященная 103 –летию со дня рождения И.Г.Петровского. Сборник тезисов. – М.:МГУ, 2004. – 244 с.
3. Н.А. Якушкин. Шварциан для многомерных потоков, диффеоморфизмов и циклов//Материалы международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным направлениям «Ломоносов 2005» секция ВМиК. – М.: МГУ, 2005. – С. 77–79.
4. N.A. Yakushkin. Schwartz derivative and its applications.// International Conference «Mathematical Hydrodynamics» Abstracts Moscow. 2006. – 83 с.
5. Якушкин Н. А. Исследование бифуркационной границы в точечной модели ксеноновых колебаний// Известия Высших учебных заведений. Ядерная Энергетика. – 2007. – №3. – Вып. 2. – С. 132–139.
6. Якушкин Н.А. Обобщенная производная Шварца в исследовании бифуркаций связанных с потерей устойчивости предельных циклов//Дифференциальные уравнения Том 44, номер 9, 2008. – С. 1293–1296.
7. Якушкин Н.А. Приложения обобщенной производной Шварца.//Материалы международной конференции «математические идеи П.Л. Чебышева». – Обнинск, 2008. – 85 с.

Компьютерная верстка Н.А. Якушкин

ЛР № 020713 от 27.04.1998

Подписано к печати

Формат бумаги 60×84/16

Печать ризограф.

Бумага МВ

Печ. л. 1,25

Заказ №

Тираж 100 экз.

Цена договорная

Отдел множительной техники ИАТЭ
249035, г. Обнинск, Студгородок, 1