

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА
факультет вычислительной математики и кибернетики

на правах рукописи
УДК 517.956

КОНЁНКОВ АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА-ЗИГМУНДА**

(01.01.02 — дифференциальные уравнения)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена на кафедре общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научный консультант: академик Е.И. Моисеев

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор М. Л. Гольдман
доктор физико-математических наук,
профессор Е. В. Радкевич
доктор физико-математических наук,
профессор А. П. Солдатов

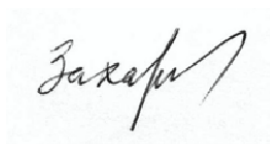
Ведущая организация: Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится "____" _____ 2008 г. в "____" часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2 учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ.

Автореферат разослан "____" _____ 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.43 при МГУ,
профессор



Е. В. Захаров

Актуальность темы. В слое $D = \mathbb{R}^n \times (0, T)$ ($T > 0$ фиксировано) рассматривается параболическое уравнение второго порядка:

$$Lu \equiv u_t - a_{ij}(x, t)\partial_{ij}u - b_i(x, t)\partial_i u - c(x, t)u = f(x, t), \quad (1)$$

вещественнозначные коэффициенты которого удовлетворяют условию равномерной параболичности:

$$(\exists \lambda > 0, \forall (x, t) \in \bar{D}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n) \quad \lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \leq \lambda^{-1}|\xi|^2. \quad (2)$$

В диссертации исследуются начально-краевые задачи для параболических уравнений второго порядка в пространствах Зигмунда $H_m(\bar{\Omega})$, $m = 2, 3, \dots$. Эти пространства являются аналогом и «замыканием» шкалы Гельдера для целых значений показателя гладкости: анизотропные пространства Гельдера-Зигмунда $H_a(\bar{\Omega})$, $a > 0$, являются частным случаем пространств Никольского¹. Нецелым значениям параметра гладкости соответствуют пространства Гельдера, целым – Зигмунда.

Внутренняя априорная оценка типа Шаудера в весовых пространствах Гельдера для решений уравнения (1) при $n = 1$ была установлена С. Чилиберто² и в многомерном случае Р. Барраром³.

Оценки решений первой краевой задачи вплоть до границы в анизотропных пространствах Гельдера $H_{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, для прямоугольника получены С. Чилиберто² и распространены на многомерный случай А. Фридманом⁴, который рассматривал нецилиндрические области Ω с границей класса $H_{2+\alpha}$. Оценки для третьей краевой задачи были впервые даны Л.И. Камыниным и В.Н. Масленниковой⁵. Затем В.А. Солонников⁶

¹ Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.

²Ciliberto C., Formule di maggiorazione e teoremi di esistenza per le soluzioni delle equazioni paraboliche in due variabili //Ricerche Mat. 1954. V.3. P. 40-75.

³Barrar R. Some estimates for solutions of parabolic equations, J. Math. Anal. Appl. 1961. V.3. P. 373-397.

⁴ Friedman A. Boundary estimates for second order parabolic equations and their applications //J. Math. Mech. 1958. V.7. P. 771-792.

⁵ Камынин Л. И., Масленникова В. Н. Граничные оценки решения III краевой задачи для параболического уравнения //ДАН 1963. Т. 153. №3. С. 526–529.

⁶ Солонников С.Д. Об априорных оценках для некоторых краевых задач //ДАН. 1962. Т. 138. №4. С. 781–784.

для широкого класса параболических систем установил разрешимость краевых задач общего вида, удовлетворяющих условию Лопатинского, в пространствах $H_{m+\alpha}(\bar{\Omega})$, где число m было не меньше, чем порядок системы. С.Д. Эйдельман ⁷ построил и изучил свойства матриц Грина для параболических систем и с их помощью получил разрешимость краевых задач и интегральные представления решений.

Исследование краевых задач для уравнения теплопроводности в пространствах Гельдера при меньшей гладкости данных, чем порядок уравнения, при $n = 1$ были начаты Жевре ⁸. Им были изучены свойства потенциалов с негладкими кривыми-носителями (удовлетворяющими условию Гельдера порядка $>1/2$), их гладкость; полученные результаты были применены к решению первой и второй краевых задач. В 1971-1972 г. Л.И. Камынин в серии работ, см., напр., ⁹ для одномерного параболического уравнения подробно изучил свойства параболических потенциалов в различных классах функций, в том числе в пространствах Гельдера $H_{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ и различных весовых классах. Как следствие, им были получены разрешимость краевых задач для параболических уравнений второго порядка в областях на плоскости, боковая граница которых удовлетворяла лишь условию Жевре.

В многомерном случае в нецилиндрических областях с негладкой боковой границей в пространствах $H_{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ разрешимость первой краевой задачи и задачи с косой производной были получены Е.А. Бадерко ^{10, 11} с помощью метода интегральных уравнений. Также ею был рассмотрен случай уравнений высокого порядка, а именно, для параболических уравнений порядка $2m$ была установлена разрешимость нормальных (удовлетворяю-

⁷ Эйдельман С.Д. Параболические системы. М.: Наука, 1974.

⁸ Gevrey M. Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique // J. Math. Pur. Appl. 1913. Ser 6. V. 9. №4. P. 305-471.

⁹ Камынин Л.И. К теории Жевре для параболических потенциалов. V // Дифференц. ур-ния. 1972. Т. 7. №3. С. 494-509.

¹⁰ Бадерко Е.А. О решении первой краевой задачи для параболических уравнений с помощью потенциала простого слоя // ДАН СССР. 1985. Т. 283. №1. С. 11-13.

¹¹ Бадерко Е.А. Решение методом граничных интегральных уравнений задач для линейных параболических уравнений произвольного порядка в негладких областях. Дисс. докт. физ.-матем. наук, М.: МГУ, 1992.

щих условию Лопатинского с граничными операторами порядка не выше $2m - 1$) краевых задач в пространствах Гельдера $H_{2m-1+\alpha}(\bar{\Omega})$, см., напр, ¹². Старшие производные решения могут в этом случае стремиться определенным образом к бесконечности при приближении к параболической границе области. Оценки для них были получены М.Ф. Череповой ¹³.

Во всех указанных работах предполагалось, что $0 < \alpha < 1$. Естественно возникает вопрос, что можно сказать о решениях в случае целых показателей гладкости? Как известно, в анизотропных пространствах $C^l(\bar{D})$ ($\alpha = 0$) и анизотропных пространствах Липшица $C^{l,1}(\bar{D})$ ($\alpha = 1$) теоремы, подобные упомянутым выше, не имеют места ¹⁴.

Однако, если вместо пространств Липшица рассмотреть более широкие пространства Зигмунда, то оказывается возможным построение теории гладкости краевых задач аналогичной теории в пространствах Гельдера. Пространства Гельдера и пространства Зигмунда вместе образуют шкалу, в которой показатель гладкости принимает все положительные значения, целые и нецелые. При этом функции из пространств Зигмунда обладают многими свойствами, аналоги которых неверны в пространствах Гельдера. Это приводит к отличиям в условиях на данные задачи, при которых имеет место принадлежность решения краевых задач к соответствующему классу.

Эллиптические краевые задачи для уравнений произвольного порядка в пространствах Зигмунда $H_m(\bar{Q})$ изучались Трибелем ¹⁵. Им были получены оценки для решения в ограниченной области в предположении, что справедлива теорема единственности. Граница области и коэффициенты уравнения предполагались принадлежащими классу C^∞ .

Цель работы: 1) Построение шкалы гладкости решений начально-

¹² Бадерко Е.А. Краевые задачи для параболического уравнения и граничные интегральные уравнения // Дифференц. ур-ния. 1992. Т. 28. №1. С. 17-23.

¹³ Черепова М.Ф. Об оценках пространственных производных второго порядка для параболического потенциала простого слоя // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. №4. С. 445-449.

¹⁴ Гилбарг Д., Трудингер Р. Эллиптические уравнения второго порядка. М.: Наука, 1987.

¹⁵ Трибель Х. Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.

краевых задач для параболических уравнений второго порядка в анизотропных пространствах Зигмунда; 2) Исследование свойств решений (как локальных, так и вблизи параболической границы области), таких как локальная гладкость, логарифмические особенности решений, оценки для разностных операторов, аппроксимирующих параболический оператор и его дифференциальные следствия, и др.; 3) Получение *в качестве следствия* из установленных результатов для параболических уравнений соответствующих свойств решений эллиптических краевых задач в пространствах Зигмунда.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Исследована гладкость основных потенциалов в модельном случае для уравнения теплопроводности в анизотропных пространствах Зигмунда, а также в пространствах Зигмунда с весом. А именно, рассмотрены потенциал Пуассона, объемный потенциал, потенциалы простого и двойного слоя. С их помощью получены необходимые и достаточные условия для принадлежности решений модельных начально-краевых задач пространствам Зигмунда. Для этого введены дополнительные (по сравнению со случаем пространств Гельдера) разностные условия согласования. Показано, что в случае целого порядка условий согласования в оценке корректности появляется дополнительное слагаемое, и что оценка корректности без него неверна.

2. Исследованы некоторые свойства функций из изотропных и параболических пространств Зигмунда. В частности, получена теорема о равенстве логарифмических особенностей для определенных разностных выражений от функций из пространств Зигмунда. С ее помощью установлено, что вводимые в диссертации разностные условия согласования для различных краевых задач можно интерпретировать как «следы» некоторых разностных соотношений, которым решения из пространств Зигмунда должны удовлетворять внутри области.

3. Для параболических уравнений с переменными коэффициентами исследована гладкость решений задачи Коши, первой краевой задачи и зада-

чи с косой производной в пространствах Зигмунда. Для краевых задач область может быть нецилиндрической и неограниченной, а ее боковая граница – некомпактной. Коэффициенты параболического оператора и боковая граница области также предполагаются принадлежащим соответствующим пространствам Зигмунда. Получены необходимые и достаточные условия для принадлежности решения этих задач пространствам Зигмунда. Установлены оценки корректности для решений, причем в случае целого порядка условий согласования в них появляется дополнительное слагаемое, конечность которого требуют разностные условия согласования.

4. Для решений параболических уравнений с переменными коэффициентами получены внутренние априорные оценки типа Шаудера в пространствах Зигмунда. Коэффициенты параболического оператора предполагаются принадлежащими некоторым весовым классам Зигмунда, естественно согласованным с гладкостью решений.

5. Для уравнения теплопроводности в областях с прямыми углами рассмотрены первая и вторая краевая задачи с нулевыми начально-краевыми условиями и ограниченной правой частью. Установлено, что (обобщенные) решения будут принадлежать анизотропному пространству Зигмунда H_2 , являющемуся аналогом анизотропного пространства Гельдера $C^{1+\alpha}$ при $\alpha = 1$. В цилиндре, основанием которого является квадрат, рассмотрена первая краевая задача в шкале пространств Зигмунда с ненулевыми начальными и граничными данными. Введены два дополнительных разностных условия согласования – на основании боковой поверхности и на боковых ребрах цилиндра. Показано, что в случае целого порядка условий согласования в оценке корректности появляются два дополнительных слагаемых и оценка корректности без них неверна.

6. Из установленных в работе результатов о гладкости решений параболических краевых задач в качестве следствия получены априорные оценки решений соответствующих эллиптических краевых задач. В частности, для задачи Дирихле и задачи с косой производной получены априорные оценки решений в пространствах Зигмунда в областях общего вида. Область может быть неограниченной, а ее граница некомпактной. Коэффициенты

эллиптического оператора и граница области предполагаются принадлежащим соответствующим пространствам Зигмунда.

7. Для уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной рассмотрена задача Тихонова с краевым условием порядка $r \geq 2$. Получены достаточные условия для принадлежности решения этой задачи пространствам Зигмунда. Для этого введены дополнительные разностные условия согласования.

Общая методика исследования. В диссертации используются методы теории потенциала, метод априорных оценок и продолжения по параметру, метод барьеров и другие методы исследования параболических и эллиптических краевых задач.

Апробация работы и публикации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинаре под руководством акад. В.А. Ильина, акад. Е.И. Моисеева, чл.-кор. РАН И.А. Шишмарева (ф-т ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова); на семинаре под руководством акад. Е.И. Моисеева и проф. И.С. Ломова (ф-т ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова); на семинаре под руководством проф. В.А. Кондратьева и проф. Е.В. Радкевича (мехмат МГУ им. М.В. Ломоносова); на семинаре под руководством проф. Е.А. Бадерко (мехмат МГУ им. М.В. Ломоносова); на семинаре акад. С.М. Никольского (МИ РАН им. В.А. Стеклова), на семинаре под руководством проф. Ю.А. Дубинского и проф. А.А. Амосова (Московский энергетический институт), на семинаре под руководством проф. А.Л. Скубачевского (Российский университет дружбы народов); на международных конференциях «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», им. И.Г. Петровского, (Москва, 2001, 2004, 2007); на международной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвященной 50-летию кафедры функционального анализа ВГУ (Воронеж, 2003); на международной конференции «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посвященной 100-летию со дня рождения С.М. Никольского, (Москва, 2005); на международной конференции «Тихонов и современная математика», посвященной 100-летию со дня рождения А.Н. Тихонова, (Москва, 2006) и

других российских и международных конференциях.

Основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения и шести глав, разделенных на 28 параграфов. Диссертация снабжена оглавлением и списком литературы из 103 наименований. Общий объем диссертации – 159 страниц.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении сделан краткий обзор литературы, связанной с темой исследования, и излагается основное содержание работы.

Введем следующие обозначения. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $\bar{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ – орты в $\mathbb{R}^n$, $P = (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|P|_1 = |x| + |t|^{1/2}$; $k = (k_1, \dots, k_n)$ – мультииндекс, $k_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, и $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $k' = (k_1, \dots, k_{n-1})$. Полагаем $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial_x^k = \partial_1^{k_1} \partial_2^{k_2} \dots \partial_n^{k_n}$, $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$ – оператор Лапласа, $\partial_\eta = \eta_1 \partial_1 + \eta_2 \partial_2 + \dots + \eta_n \partial_n$ – производная по направлению $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$; $\Delta_x f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, $\Delta_t f(x, t) = f(x, t + \Delta t) - f(x, t)$, $\Delta_x^l f(x) = \Delta_x(\Delta_x^{l-1} f(x))$; $\Delta_i(h) f(x) = f(x + h \bar{e}_i) - f(x)$, $i = 1, \dots, n$, $\Delta_i^l(h) f(x) = \Delta_i(h)(\Delta_i^{l-1}(h) f(x))$, $l \geq 1$, $\Delta_i^0(h) f(x) = f(x)$, $\Delta_t(h) f(x, t) = f(x, t + h) - f(x, t)$, $\Delta_t^l(h) f(x, t) = \Delta_t(h)(\Delta_t^{l-1}(h) f(x, t))$, – разности по координатным направлениям.

Мы будем также использовать следующие обозначения для конечных разностей на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Delta_x^l(\Omega) f(x, t) = \begin{cases} \Delta_x^l f(x, t) & \text{при } [(x, t), (x + l \Delta x, t)] \subset \Omega, \\ 0 & \text{при } [(x, t), (x + l \Delta x, t)] \not\subset \Omega, \end{cases}$$

$$\Delta_t^l(\Omega) f(x, t) = \begin{cases} \Delta_t^l f(x, t) & \text{при } [(x, t), (x, t + l \Delta t)] \subset \Omega, \\ 0 & \text{при } [(x, t), (x, t + l \Delta t)] \not\subset \Omega. \end{cases}$$

Здесь $[P, Q]$ – отрезок, соединяющий точки $P, Q \in \mathbb{R}^{n+1}$.

В слое D рассматриваем область Ω , граница которой $\partial\Omega = B_0 \cup B_T \cup \Sigma$, где B_0 – область на плоскости $t = 0$, B_T – область на плоскости $t = T$, Σ

— n -мерная поверхность. Сечение $\Sigma_\tau = \Sigma \cap \{t = \tau\}$ для любых $\tau \in [0, T]$ является $(n-1)$ -мерной поверхностью, которая в каждой своей точке имеет $(n-1)$ -мерную касательную плоскость, лежащую в n -мерной плоскости $t = \tau$. В каждой точке $P = (x^0, t^0)$ поверхности Σ существует вектор $\bar{\nu}(P)$, который является ортом внутренней (по отношению к Ω) нормали в точке P к поверхности Σ_τ , лежащей в плоскости $t = \tau$.

Систему координат $(y_1, \dots, y_n, t)$ в ортонормированном базисе $(e_1(P), \dots, e_n(P), e_{n+1}(P))$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ с началом в точке (x^0, t^0) , в котором $e_n(P) = (\bar{\nu}(P), 0)$ и e_{n+1} — орт положительного направления оси Ot , называем P -системой координат.

. Для $P = (y, \tau) \in \bar{\Omega}$ обозначим через $d(P)$ функцию расстояния до параболической границы $\mathcal{P} = B_0 \cup \Sigma$:

$$d(P) = \inf_{Q \in \mathcal{P} \cap \{t \leq \tau\}} |P - Q|_1.$$

Положим $H_0(\Omega) = L_\infty(\Omega)$ с нормой $|f|_{0,\Omega} = \text{vrai sup}_\Omega |f|$. Для области $\Omega \subset D$, целого $m \geq 0$ и $\alpha \in (0, 1)$ через $H_{m+\alpha}(\bar{\Omega})$, обозначаем анизотропные пространства Гёльдера, используемые для изучения решений параболических уравнений второго порядка ¹⁶, в которых гладкость по пространственным переменным вдвое выше, чем по «временной».

Определим параболические пространства Зигмунда $H_a(\bar{\Omega})$, $a \in \mathbb{N}$ ¹. Обозначим

$$[f]_{1,\Omega} = \sup_\Omega \frac{|\Delta_x^2(\Omega)f(x, t)|}{|\Delta x|} + \sup_\Omega \frac{|\Delta_t(\Omega)f(x, t)|}{|\Delta t|^{1/2}},$$

и для $\beta = 1, 2$,

$$\langle f \rangle_{\beta,\Omega} = \sup_\Omega \frac{|\Delta_t^\beta(\Omega)f(x, t)|}{|\Delta t|^{\beta/2}}.$$

Для целых $a \geq 2$ положим

$$[f]_{a,\Omega} = \sum_{|k|+2s=a-1} [\partial_x^k \partial_t^s f]_{1,\Omega},$$

¹⁶ Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1968.

$$\langle f \rangle_{a,\Omega} = \sum_{|k|+2s=a-2} \langle \partial_x^k \partial_t^s f \rangle_{2,\Omega},$$

и для натуральных a

$$|f|_{a,\Omega} = \sum_{|k|+2s \leq a-1} \sup_{\Omega} |\partial_x^k \partial_t^s f(x, t)| + [f]_{a,\Omega} + \langle f \rangle_{a,\Omega}.$$

Обозначим через $H_a(\bar{\Omega})$ пространство функций f , определенных в области Ω и имеющих там все производные $\partial_x^k \partial_t^s f$, $|k|+2s < a$, для которых конечна величина $|f|_{a,\Omega}$.

В $H_a(\bar{\Omega})$ рассмотрим подпространство функций

$$H_a(\bar{\Omega}) = \left\{ f \in H_a(\bar{\Omega}) : \sup_{(x,t) \in \Omega} t^{-a/2} |f(x, t)| < \infty \right\},$$

обращающихся в нуль на нижнем основании B_0 с нормой

$$\|f\|_{a,\Omega} = |f|_{a,\Omega} + \sup_{(x,t) \in \Omega} t^{-a/2} |f(x, t)|.$$

Функции f , заданные в области $Q \subset \mathbb{R}^n$, можно рассматривать как функции $\tilde{f}$ в области $\Omega = Q \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, не зависящие от t . Это дает возможность определить изотропные пространства Гельдера-Зигмунда $H_a(\bar{Q})$, $a > 0$, с помощью ранее введенных обозначений следующим образом:

$$H_a(\bar{Q}) = \left\{ f : Q \rightarrow \mathbb{R} \mid |f|_{a,Q} = |\tilde{f}|_{a,\Omega} < \infty \right\}.$$

Определим в области Ω анизотропные пространства Зигмунда с весом $H_a^{(b)}(\Omega)$. Обозначим $b_+ = \max(b, 0)$ и $|f|_{0,\Omega}^{(b)} = \text{vrai sup}_{\Omega} (d^{-b_+} + 1)^{-1} |f|$. Для натуральных a и целых $b \geq -a$ положим

$$\begin{aligned} [f]_{a,\Omega}^{(b)} = & \sum_{|k|+2s=a-1} \sup (d_{\min}^{-(a+b)} + 1)^{-1} \frac{|\Delta_x^2(\Omega) \partial_x^k \partial_t^s f(x, t)|}{|\Delta x|} + \\ & + \sum_{|k|+2s=a-1} \sup (d_{\min}^{-(a+b)} + 1)^{-1} \frac{|\Delta_t(\Omega) \partial_x^k \partial_t^s f(x, t)|}{|\Delta t|^{1/2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle f \rangle_{1,\Omega}^{(b)} &= (d_{\min}^{-(1+b)} + 1)^{-1} \frac{|\Delta_t(\Omega)f(x, t)|}{|\Delta t|^{1/2}}, \\
\langle f \rangle_{a,\Omega}^{(b)} &= \sum_{|k|+2s=a-2} \sup (d_{\min}^{-(a+b)} + 1)^{-1} \frac{|\Delta_t^2(\Omega)\partial_x^k \partial_t^s f(x, t)|}{|\Delta t|}, \text{ если } a \geq 2, \\
|f|_{a,\Omega}^{(b)} &= \sum_{|k|+2s \leq a-1} |\partial_x^k \partial_t^s f|_{0,\Omega}^{(|k|+2s+b)} + [f]_{a,\Omega}^{(b)} + \langle f \rangle_{a,\Omega}^{(b)}, \text{ если } b \geq 0, \\
|f|_{a,\Omega}^{(b)} &= |f|_{-b,\Omega} + \sum_{-b < |k|+2s \leq a-1} |\partial_x^k \partial_t^s f|_{0,\Omega}^{(|k|+2s+b)} + [f]_{a,\Omega}^{(b)} + \langle f \rangle_{a,\Omega}^{(b)}, \text{ если } b < 0.
\end{aligned}$$

Через $d_{\min}$ обозначено минимальное значение $d(P)$ от точек, присутствующих в разностях. Для неотрицательных целых a и целых $b \geq -a$ обозначим через $H_a^{(b)}(\Omega)$ пространство функций f , определенных в Ω и имеющих все производные $\partial_x^k \partial_t^s f$, где $|k| + 2s < a$, для которых конечна величина $|f|_{a,\Omega}^{(b)}$.

Пусть точка $P = (x^0, t^0)$ принадлежит поверхности Σ . Через G_r в P -системе координат обозначим цилиндр вида

$$G_r = \{(y, t) \in \mathbb{R}^n \mid |y'| < r, |y_n| < r, 0 < \tilde{t} < r^2\};$$

положим $G'_r = G_r \cap \{y_n = 0\}$ и $G'_r(P) = G'_r \cap \{\tilde{t} < T - t^0\}$. Поверхность Σ называем поверхностью класса H_a , $a > 1$, и пишем $\Sigma \in H_a$, если существует $r : 0 < r \leq \infty$ такое, что для любой точки $P \in \Sigma$ в P -системе координат

$$\Sigma \cap \bar{G}_r = \{(y, \tilde{t}) : (y', \tilde{t}) \in \bar{G}'_r(P), y_n = g(y', \tilde{t}; P)\},$$

где функция $g(\cdot; P) : \bar{G}'_r(P) \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит пространству $H_a(\bar{G}'_r(P))$ и конечна величина

$$\|\Sigma\|_a = \sup_{P \in \Sigma} |g(\cdot; P)|_{a, G'_r(P)}.$$

Анизотропные пространства Гельдера-Зигмунда $H_b(\Sigma)$ и $\underset{\circ}{H}_b(\Sigma)$ функций, заданных на поверхности $\Sigma \in H_a$, $0 \leq b \leq a$, определяются обычным образом.

В первой главе мы рассматриваем задачу Коши для уравнения теплопроводности $L^0 u \equiv \partial_t u - \Delta u = f$ в параболических пространствах Зигмунда $H_m(\bar{D})$, где целое $m \geq 2$. Везде далее рассматриваются только ограниченные и непрерывные в замыкании области решения начально-краевых

задач. Если правая часть уравнения теплопроводности принадлежит $L_{\infty,loc}$, то его (обобщенные) решения понимаются в смысле распределений ¹⁷.

Пусть $Z(x, t)$ – фундаментальное решение уравнения теплопроводности:

$$Z(x, t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-n/2} \exp \{-|x|^2/(4t)\}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Для функции $\psi \in H_0(\mathbb{R}^n) = L_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ рассматриваем потенциал Пуассона

$$\Pi\psi(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(x - y, t)\psi(y)dy.$$

Теорема 1.1. Пусть $m, l \geq 0$ – целые числа, $m \geq l$. Тогда отображение $\Pi : \psi \rightarrow \Pi\psi$ является ограниченным оператором из пространства $H_l(\mathbb{R}^n)$ в $H_m^{(-l)}(D)$.

Для функции $f \in H_0^{(1)}(D)$ рассматриваем объемный потенциал

$$Vf(P) = \int_D Z(P - Q)f(Q)dQ, \quad P = (x, t) \in \bar{D}.$$

Теорема 1.3. Пусть m, l – натуральные числа, $l \leq m$, $m \geq 2$. Тогда отображение $V : f \rightarrow Vf$ является ограниченным оператором из пространства $H_{m-2}^{(2-l)}(D)$ в пространство $H_m^{(-l)}(D)$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} L^0 u = f & \text{в } D, \\ u|_{t=0} = \psi. \end{cases} \quad (3)$$

Из теорем 1.1 и 1.3 вытекает

Теорема 1.6. Пусть $m \geq 2$, $0 < l \leq m$, $f \in H_{m-2}^{(2-l)}(D)$ и $\psi \in H_l(\mathbb{R}^n)$. Тогда решение и задачи (3) принадлежит $H_m^{(-l)}(D)$, причем

$$|u|_{m;D}^{(-l)} \leq C(|f|_{m-2;D}^{(2-l)} + |\psi|_{l;\mathbb{R}^n}).$$

Во второй главе изучаются краевые задачи в модельном случае: первая краевая задача и задача с косой производной в полуслое $D_+ = D \cap$

¹⁷Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

$\{x_n > 0\}$. Для задачи с косо́й производной коэффициенты граничного оператора постоянны, а дифференцирование осуществляется по некасательному направлению. Построена шкала гладкости для решений указанных задач в пространствах Зигмунда $H_m(\bar{D}_+)$ для целых $m \geq 2$.

В области $D_+ = D \cap \{x_n > 0\}$ с «боковой» границей $\Sigma = D \cap \{x_n = 0\}$ для плотности φ рассмотрим потенциал двойного слоя

$$W\varphi(x, t) = - \int_{\Sigma} \partial_n Z(x' - y', x_n, t - \tau) \varphi(y', \tau) dy' d\tau.$$

Теорема 2.7. Пусть $m \geq l \geq 0$ – целые числа. Тогда отображение $W : \varphi \rightarrow W\varphi$ является ограниченным оператором из пространства $H_l(\Sigma)$ в $H_m^{(-l)}(D_+)$, а также из $H_l(\Sigma)$ в $H_l(\bar{D}_+)$.

В D_+ рассмотрим первую краевую задачу

$$\begin{cases} L^0 u = f \text{ в } D_+, \\ u|_{\Sigma} = \varphi, \\ u|_{t=0} = \psi. \end{cases} \quad (4)$$

Обозначим $u^{(0)}(x) = \psi(x)$, $u^{(l+1)}(x) = \Delta u^{(l)}(x) + \partial_t^l f(x, 0)$ при $l \geq 0$.

Далее при обсуждении условий согласования для упрощения записи будем использовать следующие обозначения. Для функции φ , заданной на Σ , положим $\bar{\Delta}_t \varphi = \Delta_t(t) \varphi(x', 0) \equiv \varphi(x', t) - \varphi(x', 0)$. Для функции g , заданной на нижнем основании $B_0 = \bar{D}_+ \cap \{t = 0\}$, и $h > 0$ положим $\Lambda_h g(x) = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2(h) g(x)$.

Для $\sigma > 0$ будем говорить, что для первой краевой задачи выполнены условия согласования порядка σ , если:

- 1) в случае $\sigma \notin \mathbb{N}$ выполнены равенства $\partial_t^l \varphi|_{\Sigma_0} = u^{(l)}|_{\Sigma_0}$, $l = 0, 1, \dots, [\sigma]$;
- 2) в случае $\sigma \in \mathbb{N}$ выполнены равенства $\partial_t^l \varphi|_{\Sigma_0} = u^{(l)}|_{\Sigma_0}$, $l = 0, 1, \dots, \sigma - 1$, и, кроме того,

$$K_1 = \sup_{0 < t \leq T} t^{-1} |\bar{\Delta}_t \varphi - \Lambda_{t^{1/2}} \psi|_{0, \Sigma_0} < \infty, \quad \text{если } \sigma = 1,$$

или

$$K_{\sigma} = \sup_{0 < t \leq T} t^{-1} |\bar{\Delta}_t \partial_t^{\sigma-1} \varphi - \Lambda_{t^{1/2}} u^{(\sigma-1)} - \bar{\Delta}_t \partial_t^{\sigma-2} f|_{0, \Sigma_0} < \infty, \quad \text{если } \sigma \geq 2.$$

Для нецелых σ положим $K_\sigma = 0$.

Теорема 2.12. Пусть $m \geq 0$ – целое число, $f \in H_m(\bar{D}_+)$, $\varphi \in H_{m+2}(\Sigma)$, $\psi \in H_{m+2}(\mathbb{R}_+^n)$ и выполнены условия согласования порядка $(m+2)/2$. Тогда решение u первой краевой задачи (4) принадлежит $H_{m+2}(\bar{D}_+)$ и

$$|u|_{m+2,D_+} \leq C(|f|_{m,D_+} + |\varphi|_{m+2,\Sigma} + |\psi|_{m+2,\mathbb{R}_+^n} + K_{(m+2)/2}).$$

Для граничного оператора первого порядка $M = \partial_\beta + \beta_0$, где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, 1)$, рассмотрим в D_+ задачу с косой производной

$$\begin{cases} L^0 u &= f \text{ в } D_+, \\ Mu|_\Sigma &= \varphi, \\ u|_{t=0} &= \psi. \end{cases} \quad (5)$$

Определим разностный оператор

$$M_h u(x, t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_i(h) u(x, t).$$

Для $\sigma > 0$ будем говорить, что для задачи с косой производной (5) выполнены условия согласования порядка σ , если:

- 1) в случае $\sigma \notin \mathbb{N}$ выполнены равенства $\partial_t^l \varphi|_{\Sigma_0} = Mu^{(l)}|_{\Sigma_0}$ для $l = 0, 1, \dots, [\sigma]$;
- 2) в случае $\sigma \in \mathbb{N}$ выполнены равенства $\partial_t^l \varphi|_{\Sigma_0} = Mu^{(l)}|_{\Sigma_0}$ для $l = 0, 1, \dots, \sigma - 1$ и, кроме того,

$$K_\sigma = \sup_{0 < t \leq T} t^{-1} |\bar{\Delta}_t \partial_t^{\sigma-1} \varphi - t^{1/2} M_{t^{1/2}} u^{(\sigma)}|_{0,\Sigma_0} < \infty.$$

Для нецелых σ считаем, что константа согласования $K_\sigma = 0$.

Теорема 2.13. Пусть $m \geq 0$ – целое число, $f \in H_m(\bar{D}_+)$, $\varphi \in H_{m+1}(\Sigma)$, $\psi \in H_{m+2}(\mathbb{R}_+^n)$, и выполнены условия согласования порядка $(m+1)/2$. Тогда решение $u \in C_{x,t}^{1,0}(\bar{D}_+)$ задачи с косой производной (5) принадлежит $H_{m+2}(\bar{D}_+)$ и

$$|u|_{m+2,D_+} \leq C(|f|_{m,D_+} + |\varphi|_{m+1,\Sigma} + |\psi|_{m+2,\mathbb{R}_+^n} + K_{(m+1)/2}).$$

Для плотности $\varphi \in L_\infty(\Sigma)$ в области D_+ рассмотрим потенциал простого слоя

$$U\varphi(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} Z(x' - y', x_n, t - \tau) \varphi(y', \tau) dy' d\tau.$$

Теорема 2.14. *Отображение $U : \varphi \rightarrow U\varphi$ является ограниченным оператором из пространства $L_\infty(\Sigma)$ в $H_1(\bar{D})$.*

Теорема 2.15. *Для $m \in \mathbb{N}$ отображение $U : \varphi \rightarrow U\varphi$ является ограниченным оператором из пространства $H_m(\Sigma)$ в $H_{m+1}(D_+)$, а также из $H_m(\Sigma)$ в $H_l^{(-m-1)}(\bar{D}_+)$ при $l > m$. Отображение U как оператор из $H_m(\Sigma)$ в $H_{m+1}(\Sigma)$ имеет ограниченный обратный.*

А.Н. Тихонов¹⁸ для одномерного уравнения теплопроводности привел пример физической задачи, у которой граничные условия содержат вторую производную по пространственной переменной, и указал на возможность построения физически содержательных моделей, приводящих к граничным условиям с производными любого порядка. После этого краевые задачи для параболических уравнений с краевыми условиями, порядок которых не меньше, чем порядок уравнения, исследовались многими авторами, см.¹⁹ и цитированную там литературу.

Для граничного оператора с постоянными коэффициентами $M = \sum_{k=0}^r \beta_k \partial_x^k$, $\beta_r \neq 0$, порядка $r \geq 2$ рассмотрим в области $D_+ = \mathbb{R}_+ \times (0, T)$ задачу Тихонова

$$\begin{cases} L^0 u = f \text{ в } D_+, \\ Mu|_\Sigma = \varphi, \\ u|_{t=0} = \psi. \end{cases} \quad (6)$$

Для функции g , заданной на $\bar{\mathbb{R}}_+$ и $h > 0$ определим разностный оператор $M_h g = \beta_r \Delta_x^2(h) \partial_x^{r-2} g(0)$. Для функции φ , заданной на Σ и $t \in (0, T]$, положим $\bar{\Delta}_t \varphi = \varphi(t) - \varphi(0)$.

¹⁸ Тихонов А.Н. О краевых условиях, содержащих производные порядка, превышающего порядок уравнения // Матем. сб. 1950. Т. 26. №1. С. 35-56.

¹⁹ Eidelman S.D., Zhitarashu N.V. Parabolic boundary value problems. Basel: Birkhäuser, 1998.

Для $\sigma > 0$ будем говорить, что для задачи Тихонова (6) выполнены условия согласования порядка σ , если:

- 1) в случае $\sigma \notin \mathbb{N}$ выполнены равенства $\partial_t^l \varphi|_{\Sigma_0} = Mu^{(l)}|_{\Sigma_0}$ для $l = 0, 1, \dots, [\sigma]$;
- 2) в случае $\sigma \in \mathbb{N}$ выполнены равенства $\partial_t^l \varphi|_{\Sigma_0} = Mu^{(l)}|_{\Sigma_0}$, $l = 0, 1, \dots, \sigma - 1$, и

$$K_\sigma = \sup_{0 < t \leq T} t^{-1} |\bar{\Delta}_t \partial_t^{\sigma-1} \varphi - M_{t^{1/2}} u^{(\sigma)}| < \infty.$$

Для нецелых σ считаем, что $K_\sigma = 0$.

Теорема 2.16. Пусть $m \geq r - 1$ – целое число, $f \in H_m(\bar{D}_+)$, $\varphi \in H_{m-r+2}(\Sigma)$, $\psi \in H_{m+2}(\mathbb{R}_+)$, и выполнены условия согласования порядка $(m-r+2)/2$. Тогда решение и задачи Тихонова (6) принадлежит $H_{m+2}(\bar{D}_+)$ и

$$|u|_{m+2, D_+} \leq C(|f|_{m, D_+} + |\varphi|_{m-r+2, \Sigma} + |\psi|_{m+2, \mathbb{R}_+} + K_{(m-r+2)/2}).$$

В третьей главе исследуются первая и вторая краевые задачи для уравнения Лапласа и теплопроводности в областях, содержащих прямые углы.

Будем рассматривать мультииндексы вида $k = (k_0, k_1, \dots, k_n)$. Положим $|k|_1 = 2k_0 + k_1 + \dots + k_n$, $\partial^k = \partial_t^{k_0} \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n}$, $\Delta^k(h) = \Delta_t^{k_0}(h^2) \Delta_1^{k_1}(h) \dots \Delta_n^{k_n}(h)$.

Необходимость разностных условий согласования для краевых задач выводится с помощью следующего свойства функций из параболических пространств Зигмунда:

Теорема 3.2. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $g \in H_m(\mathbb{R}^{n+1})$, k, k', l, l' – мультииндексы, причем $|k|_1, |k'|_1 < m$, $|k|_1 + |l|_1 = |k'|_1 + |l'|_1 = m$, $k_i + l_i = k'_i + l'_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда

$$\sup_{P \in \mathbb{R}^{n+1}, h \neq 0} |h|^{-m} |h|^{|k|_1} \Delta^l(h) \partial^k g(P) - |h|^{|k'|_1} \Delta^{l'}(h) \partial^{k'} g(P)| \leq C |g|_{m, \mathbb{R}^{n+1}}.$$

Обозначим через $K = (0, \infty)^n$ n -мерный угол. Рассмотрим первую кра-

евую задачу в цилиндре $\Omega = K \times (0, T)$:

$$\begin{cases} L^0 u = f & \text{в } \Omega, \\ u|_{\Sigma} = 0, \\ u|_{B_0} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Теорема 3.4. Пусть $f \in L_{\infty}(\Omega)$. Тогда (единственное) обобщенное решение и задачи (7) принадлежит $H_2(\bar{\Omega})$ и

$$|u|_{2,\Omega} \leq C|f|_{0,\Omega}.$$

Рассмотрим вторую краевую задачу в цилиндре Ω :

$$\begin{cases} L^0 u = f & \text{в } \Omega, \\ \partial_n u|_{\Sigma} = 0, \\ u|_{B_0} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь $\partial_n u$ – производная по внутренней нормали к сечению $\partial\Omega \cap \{t = \tau\}$.

Под обобщенным решением задачи (8) будем понимать функцию $u \in C_{x,t}^{1,0}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению $L^0 u = f$ в смысле распределений, а также начальному и граничному условиям.

Теорема 3.6. Пусть $\Omega = (0, \infty)^n \times (0, T)$ и $f \in L_{\infty}(\Omega)$. Тогда обобщенное решение и задачи (8) принадлежит $H_2(\bar{\Omega})$, причем

$$|u|_{2,\Omega} \leq C|f|_{0,\Omega}.$$

Пусть

$$\Xi_h g(x) = \sum_{i=1}^r \mu_i g(x + h\bar{\eta}_i), \quad \bar{\eta}_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, r, \quad (9)$$

разностный оператор с постоянными коэффициентами, такой, что $h^{-2}\Xi_h$ аппроксимирует оператор Лапласа, т.е. $|h^{-2}\Xi_h g(x) - \Delta g(x)| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ для любой гладкой функции g .

Необходимость разностных условий согласования для обобщенных решений ($m = 0$) первой краевой задачи (4), рассмотренной во второй главе, вытекает из следующей теоремы:

Теорема 3.7. Пусть функция $u \in H_2(\bar{D}_+)$, $L^0 u \in H_0(D_+)$. Тогда

$$\sup_{P \in D_+, \tau > 0} \tau^{-1} |\Delta_t(\tau)u(P) - \Xi_{\tau^{1/2}}u(P)| \leq C(|L^0 u|_{0,D_+} + |u|_{2,D_+}).$$

Здесь и далее супремум вычисляется по тем значениям параметров, для которых все точки, участвующие в определении выражения, стоящего под знаком супремума, принадлежат рассматриваемой области.

Для классических решений необходимость разностных условий согласования первой краевой задачи в теореме 2.12 вытекает из следующего утверждения:

Теорема 3.10. Пусть m – положительное четное число, область $\Omega \subset D$ такова, что любая функция из пространства $H_{m+2}(\bar{\Omega})$ может быть продолжена ограниченным образом до функции $H_{m+2}(\bar{D})$, и разностный оператор $h^{-2}\Xi_h$ (см. (9)) аппроксимирует оператор Лапласа. Тогда для $u \in H_{m+2}(\bar{\Omega})$ справедливо неравенство

$$\sup_{\Omega, \tau > 0} \tau^{-1} |\Delta_t(\tau)\partial_t^{m/2}u - \Xi_{\tau^{1/2}}\partial_t^{m/2}u - \Delta_t(\tau)\partial_t^{(m-2)/2}L^0 u| \leq C|u|_{m+2,\Omega}.$$

Через $Q = (0, 1)^2$ обозначим квадрат в $\mathbb{R}^2$, через G_i , $i = 1, \dots, 4$, и $s = (s_1, s_2) \subset \{0, 1\}^2$, его стороны и вершины соответственно, $\Lambda_h^s g(x) = \sum_{i=1}^2 \Delta_i^2((-1)^{s_i}h)g(x)$ – разностные операторы для вершин s . Пусть $\Omega = Q \times (0, T)$; $\Sigma = \Sigma^1 \cup \dots \Sigma^4$, $\Sigma^i = \bar{G}^i \times [0, T]$ и $R^s = s \times [0, T]$ – боковая граница, боковые грани и ребра области Ω , $\Sigma_0 = \Sigma \cap \{t = 0\}$ – основание боковой границы.

В Ω рассматривается первая краевая задача

$$\begin{cases} L^0 u = f & \text{в } \Omega, \\ u|_{\Sigma} = \varphi, \\ u|_{t=0} = \psi. \end{cases} \quad (10)$$

Будем говорить, что для задачи (10) на боковых ребрах R^s выполнены условия согласования порядка $\sigma \geq 1$, если $\varphi \in C(\Sigma)$ и

1) при $\sigma \notin \mathbb{N}$

$$\partial_1^{2k}\varphi(P) + (-1)^{k+1}\partial_2^{2k}\varphi(P) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \partial_1^{2k-2j-2}\partial_2^{2j}(\partial_t\varphi(P) - f(P)), \quad (11)$$

$P \in R^s$, $s \in \{0, 1\}^2$, $k = 1, \dots, [\sigma]$;

2) при $\sigma = 1$

$$K_1 = \sup_{s \in \{0,1\}^2, P \in R^s, \tau > 0} \tau^{-1} |\Delta_t(\tau) \varphi(P) - \Lambda_{\tau^{1/2}}^s \varphi(P)| < \infty,$$

а при натуральных $\sigma \geq 2$, выполнено (11) для $k = 1, \dots, \sigma - 1$ и

$$K_\sigma = \sup_{s \in \{0,1\}^2, P \in R^s, h \in (0,1)} h^{-2\sigma} |\Delta_1^{2\sigma}((-1)^{s_1} h) \varphi(P) + (-1)^{\sigma+1} \Delta_2^{2\sigma}((-1)^{s_2} h) \varphi(P) - \\ - h^2 \sum_{j=0}^{\sigma-1} (-1)^j \Delta_1^{2\sigma-2j-2}((-1)^{s_1} h) \Delta_2^{2j}((-1)^{s_2} h) (\partial_t \varphi(P) - f(P))| < \infty.$$

Для нецелых σ положим $K_\sigma = 0$.

Обозначим $u^{(0)}(x) = \psi(x)$, $u^{(l+1)}(x) = \Delta u^{(l)}(x) + \partial_t^l f(x, 0)$, $x \in \bar{Q}$, $l \geq 0$.

Будем говорить, что для первой краевой задачи (10) на основании боковой границы Σ_0 выполнены условия согласования порядка $\sigma \geq 1$, если

1) при $\sigma \notin \mathbb{N}$

$$\partial_t^k \varphi|_{\Sigma_0} = u^{(k)}|_{\Sigma_0} \quad (12)$$

при $k = 0, 1, \dots, [\sigma]$;

2) при $\sigma = 1$ выполнено (12) для $k = 0$ и

$$K'_1 = \sup_{s \in \{0,1\}^2, P \in \Sigma_0, \tau > 0} \tau^{-1} |\Delta_t(\tau) \varphi(P) - \Lambda_{\tau^{1/2}}^s \psi(P)| < \infty,$$

а при натуральных $\sigma \geq 2$, выполнено (12) для $k = 0, 1, \dots, \sigma - 1$ и

$$K'_\sigma = \sup_{s \in \{0,1\}^2, P \in \Sigma_0, \tau > 0} \tau^{-1} |\Delta_t(\tau) \partial_t^{\sigma-1} \varphi(P) - \\ - \Lambda_{\tau^{1/2}}^s u^{(\sigma-1)}(P) - \Delta_t(\tau) \partial_t^{\sigma-2} f(P)| < \infty.$$

Для нецелых σ положим $K'_\sigma = 0$.

Теорема 3.11. Пусть $m \geq 0$ – целое число, $f \in H_m(\bar{\Omega})$, $\varphi \in H_{m+2}(\Sigma^i)$, $i = 1, \dots, 4$, $\psi \in H_{m+2}(\bar{Q})$. Тогда решение и первой краевой задачи (10) будет принадлежать $H_{m+2}(\bar{\Omega})$, если и только если на боковых ребрах и

основании боковой границы области Ω выполнены условия согласования порядка $(m+2)/2$. При этом

$$|u|_{m+2,\Omega} \leq C \left(|f|_{m,\Omega} + \sum_{i=1}^4 |\varphi|_{m+2,\Sigma^i} + |\psi|_{m+2,Q} + K_{(m+2)/2} + K'_{(m+2)/2} \right).$$

Оценка корректности неверна без констант согласования $K_{(m+2)/2}$, $K'_{(m+2)/2}$ в правой части.

Рассмотрим теперь задачу Дирихле с ненулевыми граничными данными в квадрате $Q = (0, 1)^2$:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{в } Q, \\ u|_{\partial Q} = \varphi. \end{cases} \quad (13)$$

С.М. Никольский²⁰ охарактеризовал следы на границе ∂Q гармонической в Q функции, принадлежащей пространству Никольского $H_p^r(\bar{Q})$, где $1 \leq p \leq \infty$, $r > 1/p$, причем $r - 1/p$, $r - 2/p$ – нецелые числа. Для угла произвольной величины аналогичный результат был установлен затем В.В. Фуфаевым²¹. Е.А. Волков²² получил оценки решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона в параллелепипеде и исследовал свойства решений в пространствах Гельдера $H_{m+\alpha}(\bar{Q})$, $0 < \alpha < 1$. Общая теория краевых задач для эллиптических уравнений в областях с угловыми и коническими точками построена В.А. Кондратьевым²³, см. также²⁴ и цитированную там литературу.

Рассмотрим задачу Дирихле в пространствах Зигмунда $H_m(\bar{Q})$. Показатель $r - 1/p = r - 2/p = m$ в этом случае будет целым. Будем говорить,

²⁰ Никольский С.М. Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками. // Матем. сб. 1957. Т.43. №1. С.127-144.

²¹ Фуфаев В.В. К задаче Дирихле для областей с углами // ДАН. 1960. Т. 131. №1. С. 37-39.

²² Волков Е.А. О дифференциальных свойствах решений уравнений Лапласа и Пуассона на параллелепипеде и эффективных оценках погрешности метода сеток // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 1969. Т. 105. С. 46-65.

²³ Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. ММО. 1967. Т. 16. С. 209-292.

²⁴ Кондратьев В.А., Олейник О.А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // УМН. 1983. Т. 38. Вып. 2. С. 4-76.

что для задачи (13) выполнены условия согласования порядка $\sigma \geq 1$, если $\varphi \in C(\partial Q)$ и

1) при $\sigma \notin \mathbb{N}$

$$\partial_1^{2k} \varphi(s) + (-1)^{k+1} \partial_2^{2k} \varphi(s) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \partial_1^{2k-2j-2} \partial_2^{2j} f(s), \quad (14)$$

$s \in \{0, 1\}^2, k = 1, 2, \dots, [\sigma];$

2) при $\sigma = 1$

$$K_1 = \sup_{s \in \{0,1\}^2, h \in (0,1)} h^{-2} |\Lambda_h^s \varphi(s)| < \infty,$$

а при $\sigma \in \mathbb{N}, \sigma \geq 2$, выполнено (14) для $k = 1, 2, \dots, \sigma - 1$ и

$$K_\sigma = \sup_{s \in \{0,1\}^2, h \in (0,1)} h^{-2\sigma} \left| \Delta_1^{2\sigma} ((-1)^{s_1} h) \varphi(s) + (-1)^{\sigma+1} \Delta_2^{2\sigma} ((-1)^{s_2} h) \varphi(s) - \right. \\ \left. - h^2 \sum_{j=0}^{\sigma-1} (-1)^j \Delta_1^{2\sigma-2j-2} ((-1)^{s_1} h) \Delta_2^{2j} ((-1)^{s_2} h) f(s) \right| < \infty.$$

Для нецелых σ положим $K_\sigma = 0$.

Теорема 3.16. Пусть $m \geq 0$ – целое число, $f \in H_m(\bar{Q})$, $\varphi \in H_{m+2}(\bar{G}^i)$, $i = 1, \dots, 4$. Тогда решение и задачи Дирихле (13) будет принадлежать $H_{m+2}(\bar{Q})$, если и только если выполнены условия согласования порядка $(m+2)/2$. При этом

$$|u|_{m+2,Q} \leq C \left(|f|_{m,Q} + \sum_{i=1}^4 |\varphi|_{m+2,G^i} + K_{(m+2)/2} \right).$$

Оценка корректности неверна без константы согласования $K_{(m+2)/2}$ в правой части.

В третьей главе исследуются, кроме того, логарифмические особенности производных решений задачи Коши и первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Хотя обычно логарифмические особенности в оцен-

ках производных рассматриваются как некая «патология», простые примеры показывают, что для решений из пространств Зигмунда они появляются естественно. Кроме того, оказывается, что эти особенности выражаются явно через данные задачи.

Рассмотрим сначала задачу Коши

$$L^0 u = 0 \text{ в } D, \quad u|_{t=0} = \psi. \quad (15)$$

Теорема 3.17. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\psi \in H_m(\mathbb{R}^n)$. Тогда для решения задачи (15) при $|k| = m$, $(x, t) \in D$, справедливо неравенство

$$|\partial_x^k u(x, t) - t^{-m/2} \Delta_x^k(t^{1/2})\psi(x)| \leq C|\psi|_{m, \mathbb{R}^n}.$$

Отметим, что для самой производной порядка $|k| = m$ от решения справедлива лишь (неулучшаемая) оценка $|\partial_x^k u(x, t)| \leq C(|\ln t| + 1)|\psi|_{m, \mathbb{R}^n}$, $t \rightarrow +0$, а при $|k| > m$ из теоремы 1.1 следует, что $|\partial_x^k u(x, t)| \leq Ct^{-(|k|-m)/2}|\psi|_{m, \mathbb{R}^n}$. Для решений задачи Коши с начальной функцией ψ из пространств Гельдера $H_{m+\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < 1$, в оценках производных присутствуют только степенные функции переменной t . Следовательно, для ψ из шкалы Гельдера-Зигмунда $H_a(\mathbb{R}^n)$, $a > 0$, логарифмы в оценках производных решения возникают только для целого значения показателя a и производных только порядка $|k| = a$. Ситуация оказывается аналогична вычислению первообразной от степенных функций: результатом будет степенная функция, за исключением одного случая, когда появляется логарифм.

Рассмотрим теперь первую краевую задачу

$$\begin{cases} L^0 u = 0 \text{ в } D_+, \\ u|_{\Sigma} = \varphi, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Обозначим $L' = \partial_t - \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i^2$, $L'_h = \Delta_t(h^2) - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta_i^2(h)$.

Теорема 3.18. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\varphi \in H_m(\Sigma)$, $|k| = m$. Тогда, если k_n чётно, то для решения задачи (16) справедливы неравенства

$$|\partial_x^k u(x, t) - x_n^{-m} \Delta_x^{k'}(x_n)(L'_{x_n})^{k_n/2} \varphi(x', t)| \leq C\|\varphi\|_{m, \Sigma},$$

а если k_n нечетно, то

$$|\partial_x^k u(x, t) + 2x_n^{-m-1} \Delta_x^{k'}(x_n)(L'_{x_n})^{(k_n+1)/2} U\varphi(x', 0, t)| \leq C \|\varphi\|_{m, \Sigma}.$$

Здесь рассматриваются те точки $(x, t) \in D_+$, для которых все точки, присутствующие в разностном операторе, также принадлежат D_+ .

В качестве следствия получены соответствующие результаты для решений задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } \mathbb{R}_+^n, \\ u|_{x_n=0} = \varphi. \end{cases} \quad (17)$$

Обозначим $\Delta' = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i^2$, $\Lambda'_h = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta_i^2(h)$ и через

$$H(x) = -(n-2)^{-1} \sigma_n^{-1} |x|^{2-n}, \quad n \geq 3,$$

где σ_n – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, фундаментальное решение уравнения Лапласа. Для плотности $\varphi \in L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ с компактным носителем рассматриваем в $\mathbb{R}_+^n$ эллиптический потенциал простого слоя:

$$U_e \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} H(x' - y', x_n) \varphi(y') dy.$$

Теорема 3.19. Пусть $n \geq 3$, $m \in \mathbb{N}$, $\varphi \in H_m(\mathbb{R}^{n-1})$, $\text{supp } \varphi \in [-1, 1]^{n-1}$, $|k| = m$. Тогда для решения и задачи Дирихле (17), если k_n четно, справедливо неравенство

$$|\partial_x^k u(x, t) - (-1)^{k_n/2} x_n^{-m} \Delta_x^{k'}(x_n)(\Lambda'_{x_n})^{k_n/2} \varphi(x')| \leq C |\varphi|_{m, \mathbb{R}_+^n},$$

а если k_n нечетно, то

$$|\partial_x^k u(x) + (-1)^{(k_n+1)/2} 2x_n^{-m-1} \Delta_x^{k'}(x_n)(\Lambda'_{x_n})^{(k_n+1)/2} U_e \varphi(x', 0)| \leq C |\varphi|_{m, \mathbb{R}_+^n},$$

при $x \in \mathbb{R}_+^n$.

В четвертой главе исследуются решения задачи Коши

$$\begin{cases} Lu = f & \text{в } D, \\ u|_{t=0} = \psi, \end{cases} \quad (18)$$

в пространствах Зигмунда для параболического уравнения с переменными коэффициентами в слое D .

Коэффициенты оператора L предполагаются удовлетворяющими условию

$$a_{ij}, b_i, c \in H_m(\bar{D}). \quad (19)$$

Теорема 4.4. Пусть m – натуральное число, для коэффициентов оператора (1) выполнены условия (2), (19), и $f \in H_m(\bar{D})$, $\psi \in H_{m+2}(\mathbb{R}^n)$. Тогда решение и задачи Коши (18) принадлежит $H_{m+2}(\bar{D})$, причем

$$|u|_{m+2,D} \leq C(|f|_{m,D} + |\psi|_{m+2,\mathbb{R}^n}).$$

В пятой главе устанавливаются внутренние априорные оценки решений параболических уравнений с переменными коэффициентами в пространствах Зигмунда. Известная оценка типа Шаудера ²⁵ утверждает, что при $\alpha \in (0, 1)$ любое решение $u \in H_{2+\alpha}^{(0)}(\Omega)$ уравнения (1) с правой частью $f \in H_\alpha^{(2)}(\Omega)$ в области $\Omega \subset D$ удовлетворяет неравенству

$$|u|_{2+\alpha,\Omega}^{(0)} \leq C(|f|_{\alpha,\Omega}^{(2)} + |u|_{0,\Omega}) \quad (20)$$

при подходящих условиях на коэффициенты оператора L .

Поставим теперь вопрос, каким оценкам удовлетворяет любое ограниченное решение уравнения теплопроводности $L^0 u = f$, когда правая часть принадлежит лишь $H_0^{(2)}(\Omega)$, т.е. удовлетворяет только неравенству $|f(P)| \leq C d^{-2}(P)$.

Теорема 5.1. Пусть $u \in L_\infty(\Omega)$ является обобщенным решением уравнения теплопроводности $L^0 u = f \in H_0^{(2)}(\Omega)$ в области $\Omega \subset D$. Тогда $u \in H_2^{(0)}(\Omega)$, причем

$$|u|_{2,\Omega}^{(0)} \leq C(|f|_{0,\Omega}^{(2)} + |u|_{0,\Omega}).$$

Аналогичный вопрос можно поставить и для $\alpha = 1$, т.е. когда правая часть удовлетворяет локально условию Зигмунда: $f \in H_1^{(2)}(\Omega)$. Мы получаем априорную оценку типа Шаудера для решений уравнения (1) с

²⁵ Фридман А. Уравнения в частных производных параболического типа. М.: Мир, 1968.

переменными коэффициентами в пространстве $H_3^{(0)}(\Omega)$. Этот результат соответствует неравенству (20) при $\alpha = 1$:

Теорема 5.6. Пусть функция $u \in H_3^{(0)}(\Omega)$ в области $\Omega \subset D$ является классическим решением уравнения $Lu = f$, где оператор L удовлетворяет условию равномерной параболичности (2), а его коэффициенты условиям

$$a_{ij} \in H_1^{(0)}(\Omega), b_i \in H_1^{(1)}(\Omega), c \in H_1^{(2)}(\Omega).$$

Тогда

$$|u|_{3,\Omega}^{(0)} \leq C(|f|_{1,\Omega}^{(2)} + |u|_{0,\Omega}). \quad (21)$$

С помощью этой теоремы в ограниченной области $\Omega = Q \times (0, T)$ получены оценки решений первой краевой задачи

$$\begin{cases} Lu = f & \text{в } \Omega, \\ u|_{\Sigma} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (22)$$

правая часть которой может расти как d^{-1} . Коэффициенты предполагаются удовлетворяющими локально условию Зигмунда, а рост младших коэффициентов вблизи параболической границы области Ω – слабее, чем у правой части:

$$a_{ij} \in H_1(\bar{\Omega}), b_i \in H_1^{(1-\alpha)}(\Omega), c \in H_1^{(1-\alpha)}(\Omega), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (23)$$

Простые примеры для уравнения теплопроводности показывают, что в этом случае в оценке решений и его пространственных производных первого порядка будет присутствовать множитель $|\ln d|$.

Теорема 5.9. Пусть для оператора L выполнены условия равномерной параболичности (2) и (23), младший коэффициент $c \leq 0$ в Ω , правая часть $f \in H_1^{(1)}(\Omega)$, а граница $\partial Q \in H_{1+\alpha}$. Тогда, если u является классическим решением задачи (22), то имеет место неравенство

$$|\partial_x^k u(P)| \leq C d^{1-|k|}(P)(|\ln d(P)| + 1)|f|_{1,\Omega}^{(1)}, \quad P \in \Omega, \quad |k| \leq 2.$$

Теорема 5.11. Пусть для оператора L выполнены условия равномерной параболичности (2) и (23), младший коэффициент $c \leq 0$ в Ω , правая

часть $f \in H_1^{(1)}(\Omega)$, а область Q ограничена и выпукла. Тогда, если u является классическим решением задачи (22), то имеет место неравенство

$$|\partial_x^k u(P)| \leq C d^{1-|k|}(P) (|\ln d(P)| + 1) |f|_{1,\Omega}^{(1)}, \quad P \in \Omega, \quad |k| \leq 2.$$

В шестой главе результаты, полученные ранее в главе 2 для уравнения теплопроводности, переносятся на параболические уравнения с переменными коэффициентами: устанавливается гладкость решений первой краевой задачи и задачи с косой производной в пространствах Зигмунда $H_m(\bar{\Omega})$, $m \geq 3$. Показывается, что вводимые условия согласования являются необходимыми и достаточными, а оценка корректности в случае целого порядка условий согласования неверна без константы согласования в правой части. Область Ω может быть неограниченной, а ее «боковая» граница $\Sigma \in H_m$ – некомпактной. Коэффициенты параболического оператора и данные задачи также предполагаются принадлежащим соответствующим пространствам Зигмунда. Поскольку область может быть нецилиндрической, то формулировка разностных условий согласования усложняется по сравнению с модельных случаев: в окрестности точки, принадлежащей основанию «боковой» границы Σ_0 вводится «распрямленная» система координат и условия задаются локально в окрестности каждой точки Σ_0 .

В области $\Omega \subset D$ рассматриваем первую краевую задачу

$$\begin{cases} Lu = f & \text{в } \Omega, \\ u|_{\Sigma} = \varphi, \\ u|_{t=0} = \psi. \end{cases} \quad (24)$$

Для формулировки условий согласования нам понадобятся системы локальных координат, в которых «боковая» поверхность имеет наиболее простой вид. Пусть точка P принадлежит основанию «боковой» границы Σ_0 и (y, t) – P -система координат. «Распрямленной» P -системой координат в окрестности точки P будем называть координаты (x, t) , где $x' = y'$, $x_n = y_n - g(y', t; P)$. Очевидно, уравнение «боковой» границы в окрестности P имеет вид $x_n = 0$.

Для каждой точки $P \in \Sigma_0$ обозначим через

$$\mathcal{L}_P(x, t) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^P(x, t) \partial_{ij} + \sum_{i=1}^n b_i^P(x, t) \partial_i + c^P(x, t)$$

и f_P , φ_P , ψ_P , эллиптическую часть оператора L и данные задачи в «распрямленной» P -системе координат соответственно, а через

$$\mathcal{L}_P^{(l)}(x, t) = \sum_{i,j=1}^n (\partial_t^l a_{ij}^P(x, t)) \partial_{ij} + \sum_{i=1}^n (\partial_t^l b_i^P(x, t)) \partial_i + \partial_t^l c^P(x, t),$$

$$\begin{aligned} \Delta_t(\tau) \mathcal{L}_P^{(l)}(x, t) = & \sum_{i,j=1}^n (\Delta_t(\tau) \partial_t^l a_{ij}^P(x, t)) \partial_{ij} + \\ & + \sum_{i=1}^n (\Delta_t(\tau) \partial_t^l b_i^P(x, t)) \partial_i + (\Delta_t(\tau) \partial_t^l c^P(x, t)) \end{aligned}$$

для $l \geq 0$, – операторы, получающиеся дифференцированием и взятием разностей от коэффициентов $\mathcal{L}_P$ по t .

Положим $u_P^{(0)}(x) = \psi_P(x)$, $u_P^{(l+1)}(x) = \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \mathcal{L}_P^{(j)}(x, 0) u_P^{(l-j)}(x) + \partial_t^l f_P(x, 0)$ при $l \geq 0$.

Будем говорить, что для задачи (24) выполнены условия согласования порядка $\sigma \geq 2$, если:

1) при нецелом σ для всех $P \in \Sigma_0$ в «распрямленной» P -системе координат

$$\partial_t^l \varphi_P|_{\Sigma_0 \cap \bar{G}_r} = u_P^{(l)}|_{\Sigma_0 \cap \bar{G}_r}, \quad (25)$$

$l = 0, 1, \dots, [\sigma]$;

2) в случае целого $\sigma \geq 2$ выполнены равенства (25) для $l = 0, 1, \dots, \sigma - 1$, и, кроме того,

$$\begin{aligned} K_\sigma = & \sup_{P \in \Sigma_0, (x', \tau) \in G'_r} \tau^{-1} |\Delta_t(\tau) \partial_t^{\sigma-1} \varphi_P(x', 0) - (\Delta_t(\tau) \mathcal{L}_P^{(\sigma-2)}) \psi_P(x', 0) - \\ & - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^P(x', 0, 0) \Delta_i(\tau^{1/2}) \Delta_j(\tau^{1/2}) u_P^{(\sigma-1)}(x', 0) - \Delta_t(\tau) \partial_t^{\sigma-2} f_P(x', 0, 0)| < \infty. \end{aligned}$$

Здесь для фиксированного $P \in \Sigma_0$ точная верхняя грань вычисляется в «распрямленной» P -системе координат по точкам $(x', \tau) \in G'_r$ таким, что все точки, участвующие в определении разностей, принадлежат $\Omega \cap G_r$. Для нецелых σ положим $K_\sigma = 0$.

Теорема 6.1. Пусть m – натуральное число, $\Sigma \in H_{m+2}$, для оператора L выполнено условие (2), а коэффициенты L принадлежат пространству $H_m(\bar{D})$ и $f \in H_m(\bar{\Omega})$, $\varphi \in H_{m+2}(\bar{\Sigma})$, $\psi \in H_{m+2}(\bar{B}_0)$. При этих условиях классическое решение и первой краевой задачи (24) будет принадлежать $H_{m+2}(\bar{\Omega})$, тогда и только тогда, когда выполнены условия согласования порядка $(m+2)/2$. При этом

$$|u|_{m+2,\Omega} \leq C (|f|_{m,\Omega} + |\varphi|_{m+2,\Sigma} + |\psi|_{m+2,B_0} + K_{(m+2)/2}).$$

Для четных m оценка корректности неверна без константы согласования $K_{(m+2)/2}$ в правой части.

Для точки $P \in \Sigma$ обозначим через

$$M = \sum_{i=1}^n \beta_i(P) \partial_i + \beta_0(P)$$

дифференциальный оператор первого порядка, для которого предполагаем выполненным условие

$$(\bar{\beta}(P), \bar{\nu}(P)) \geq \delta > 0, \quad \forall P \in \Sigma, \quad (26)$$

где $\bar{\beta}(P) = (\beta_1(P), \dots, \beta_n(P))$.

В области Ω рассматриваем задачу с косой производной

$$\begin{cases} Lu = f & \text{в } \Omega, \\ Mu|_\Sigma = \varphi, \\ u|_{t=0} = \psi. \end{cases} \quad (27)$$

Введем выражения, которые понадобятся нам для формулировки условия согласования. Для точки $P \in \Sigma$ обозначим через

$$M^P(x', t) = \sum_{i=1}^n \beta_i^P(x', t) \partial_i + \beta_0^P(x', t)$$

граничный оператор M , записанный в «распрямленной» P -системе координат,

$$\partial_t^l M^P(x', t) = \sum_{i=1}^n (\partial_t^l \beta_i^P(x', t)) \partial_i + (\partial_t^l \beta_0^P(x', t)),$$

$$\Delta_t(\tau) \partial_t^l M^P(x', t) = \sum_{i=1}^n (\Delta_t(\tau) \partial_t^l \beta_i^P(x', t)) \partial_i + (\Delta_t(\tau) \partial_t^l \beta_0^P(x', t)),$$

– операторы, получающиеся из M^P дифференцированием и взятием разностей от коэффициентов по t , и пусть

$$M_h^P(x', t) = \sum_{i=1}^n \beta_i^P(x', t) \Delta_i(h)$$

– разностный оператор, соответствующий дифференциальной части M^P .

Будем говорить, что для задачи с кривой производной (27) выполнены условия согласования порядка $\sigma \geq 1$, если:

1) при нецелом σ для всех $P \in \Sigma_0$ в «распрямленной» P -системе координат

$$\partial_t^l \varphi|_{\Sigma_0 \cap \bar{G}_r} = \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} (\partial_t^{(l-j)} M^P) u_P^{(j)} \Big|_{\Sigma_0 \cap \bar{G}_r}, \quad (28)$$

для $l = 0, 1, \dots, [\sigma]$,

2) в случае целого $\sigma \geq 2$ выполнены равенства (28) для $l = 0, 1, \dots, \sigma - 1$, и, кроме того,

$$K_\sigma = \sup_{P \in \Sigma_0, (x', \tau) \in G'_r} \tau^{-1} |\Delta_t(\tau) \partial_t^{\sigma-1} \varphi_P(x', 0) -$$

$$-(\Delta_t(\tau) \partial_t^{\sigma-1} M^P(x', 0)) \psi_P(x', 0) - \tau^{1/2} M_{\tau^{1/2}}^P(x', 0) u_P^{(\sigma)}(x', 0)| < \infty.$$

Для нецелых σ положим $K_\sigma = 0$.

Теорема 6.2. Пусть m – натуральное число, боковая поверхность $\Sigma \in H_{m+2}$, для оператора L выполнено условие (2), коэффициенты L принадлежат пространству $H_m(\bar{D})$; $f \in H_m(\bar{\Omega})$, $\varphi \in H_{m+1}(\Sigma)$, $\psi \in H_{m+2}(\bar{B}_0)$; для граничного оператора M выполнено условие (26) и $\beta_i \in H_{m+1}(\Sigma)$, $i =$

$0, 1, \dots, n$. При этих условиях ограниченное решение $u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega) \cap H_{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ (для некоторого $\alpha \in (0, 1)$) задачи с косо́й производной (27) будет принадлежать $H_{m+2}(\bar{\Omega})$ тогда и только тогда, когда выполнены условия согласования порядка $(m+1)/2$. При этом

$$|u|_{m+2,\Omega} \leq C (|f|_{m,\Omega} + |\varphi|_{m+1,\Sigma} + |\psi|_{m+2,B_0} + K_{(m+1)/2}).$$

Для нечетных m оценка корректности неверна без константы согласования $K_{(m+1)/2}$ в правой части.

Для целых значений порядка согласования необходимость выполнения разностных условий для принадлежности решений $H_{m+2}(\bar{\Omega})$ в теореме 6.1 вытекает из следующего утверждения:

Теорема 6.3. Пусть $m \geq 2$ – четное число, область $\Omega \subset D$ такова, что любая функция из пространства $H_{m+2}(\bar{\Omega})$ может быть продолжена ограниченным образом до функции $H_{m+2}(\bar{D})$. Тогда для $u \in H_{m+2}(\bar{\Omega})$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega, \tau > 0} \tau^{-1} |\Delta_t(\tau) \partial_t^{m/2} u - (\Delta_t(\tau) \partial_t^{m/2} \mathcal{L})u - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \Delta_i(\tau) \Delta_j(\tau) \partial_t^{m/2} u - \\ - \Delta_t(\tau) \partial_t^{m/2-1} Lu| \leq C |u|_{m+2,\Omega}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь неравенства, показывающие необходимость разностных условий согласования для задачи с косо́й производной (27).

Теорема 6.4. Пусть $m \geq 1$ – нечетное число, область $\Omega \subset D$ такова, что любая функция из пространства $H_{m+2}(\bar{\Omega})$ может быть продолжена ограниченным образом до функции $H_{m+2}(\bar{D})$; оператор первого порядка M определен в D , а его коэффициенты принадлежат $H_{m+1}(\bar{D})$. Тогда для $u \in H_{m+2}(\bar{\Omega})$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega, \tau > 0} \tau^{-1} |\Delta_t(\tau) \partial_t^{(m-1)/2} (Mu) - (\Delta_t(\tau) \partial_t^{(m-1)/2} M)u - \\ - \tau^{1/2} M_{\tau^{1/2}} \partial_t^{(m+1)/2} u| \leq C |u|_{m+2,\Omega}. \end{aligned}$$

Для эллиптических уравнений априорные оценки решений краевых задач в пространствах Гельдера $H_{m+\alpha}(\bar{Q})$ $m \geq 2$, $0 < \alpha < 1$, для, возможно,

неограниченной области Q установлены Агмоном, Дуглисом и Ниренбергом²⁶. Как уже упоминалось, эллиптические краевые задачи в пространствах Зигмунда $H_m(\bar{Q})$ изучались Трибелем¹⁵.

Из доказанных в настоящей работе утверждений для параболических уравнений мы выводим в качестве следствия априорные оценки решений задачи Дирихле и задачи с косой производной для эллиптических уравнений второго порядка в области класса H_m , которая может быть неограниченной и иметь некомпактную границу. По сравнению с¹⁵ ослаблены требования на границу области и коэффициенты уравнения.

Для равномерно-эллиптического оператора

$$\mathcal{L} = a_{ij}(x)\partial_{ij} + b_i(x)\partial_i + c(x),$$

$$(\exists \lambda > 0) \quad \lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \lambda^{-1}|\xi|^2, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (29)$$

в области $Q \subset \mathbb{R}^n$, которая может быть неограниченной и иметь некомпактную границу, рассматриваем задачу Дирихле

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{в } Q, \\ u|_{\partial Q} = \varphi. \end{cases} \quad (30)$$

Теорема 6.8. Пусть m – натуральное число, $\partial Q \in H_{m+2}$, для оператора $\mathcal{L}$ выполнено условие (29), коэффициенты $\mathcal{L}$ принадлежат пространству $H_m(\mathbb{R}^n)$; $f \in H_m(\bar{Q})$, $\varphi \in H_{m+2}(\partial Q)$. Тогда, если $u \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$ – ограниченное классическое решение задачи Дирихле (30), то $u \in H_{m+2}(\bar{Q})$ и справедлива оценка

$$|u|_{m+2,Q} \leq C(|f|_{m,Q} + |\varphi|_{m+2,\partial Q} + |u|_{0,Q}).$$

Для точки $x \in \partial Q$ обозначим через $\nu(x)$ вектор единичной внутренней нормали к Q и через $M = \sum_{i=1}^n \beta_i(x)\partial_i + \beta_0(x)$ граничный дифференциальный оператор первого порядка, для которого предполагается выполненным условие

$$(\bar{\beta}(x), \bar{\nu}(x)) \geq \delta > 0 \quad \forall x \in \partial Q. \quad (31)$$

²⁶ Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I // Comm. Pure Appl. Math. 1959. V. 12. №4. P. 623-727.

В области Q рассматриваем задачу с косой производной

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ в } Q, \\ Mu|_{\partial Q} = \varphi. \end{cases} \quad (32)$$

Теорема 6.9. Пусть m – натуральное число, $\partial Q \in H_{m+2}$, для оператора $\mathcal{L}$ выполнено условие (29), коэффициенты $\mathcal{L}$ принадлежат пространству $H_m(\mathbb{R}^n)$; $f \in H_m(\bar{Q})$, $\varphi \in H_{m+1}(\partial Q)$; для граничного оператора M выполнено условие (31) и $\beta_i \in H_{m+1}(\partial Q)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда, если $u \in C^2(Q) \cap H_{1+\alpha}(\bar{Q})$ (для некоторого $\alpha \in (0, 1)$) – решение задачи с косой производной (32), то $u \in H_{m+2}(\bar{Q})$ и справедлива оценка

$$|u|_{m+2,Q} \leq C (|f|_{m,Q} + |\varphi|_{m+1,\partial Q} + |u|_{0,Q}).$$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту – академику Е.И. Моисееву, а также профессору Е.А. Бадерко за помощь, ценные консультации и внимание к работе.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- [1] Коненков А.Н. Разрешимость третьей краевой задачи как следствие разрешимости задач Коши и Дирихле для уравнения теплопроводности // Известия РАЕН. Дифференц. ур-ния. 2003. №7. С. 35-38.
- [2] Коненков А.Н. Первая краевая задача для параболического уравнения в классе Гельдера H_α // Дифференц. ур-ния. 2004. Т.40. №3. С. 389-395.
- [3] Коненков А.Н. Первая краевая задача в кубе для уравнения теплопроводности в пространствах Зигмунда // Известия РАЕН. Дифференц. ур-ния. 2004. №8. С. 46-50.
- [4] Коненков А.Н. Задача Коши для уравнения теплопроводности в пространствах Зигмунда // Дифференц. ур-ния. 2005. Т. 41. №6. С. 820-831.

- [5] Коненков А.Н. Модельные краевые задачи для уравнения теплопроводности в пространствах Зигмунда // Доклады РАН. 2005. Т. 404. №1. С. 18-20.
- [6] Коненков А.Н. Задача Тихонова для одномерного уравнения теплопроводности в пространствах Зигмунда // Известия РАН. Дифференц. ур-ния. 2005. №9. С. 29-35.
- [7] Коненков А.Н. Задачи Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и теплопроводности в областях с прямыми углами // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12. Вып. 5. С. 75-82.
- [8] Коненков А.Н. Задача Коши для параболических уравнений в пространствах Зигмунда // Дифференц. ур-ния. 2006. Т. 42. №6. С. 814-819.
- [9] Коненков А.Н. Задача Дирихле в пространствах Зигмунда в квадрате // Доклады РАН. 2007. Т. 412. №1. С. 22-25.
- [10] Коненков А.Н. Гладкость теплового потенциала двойного слоя в пространствах Зигмунда // Дифференц. ур-ния. 2007. Т.43. №8. С. 1106-1115.
- [11] Коненков А.Н. Краевые задачи для параболических уравнений в пространствах Зигмунда // Доклады РАН. 2008. Т. 418. №1. С. 15-18.