

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

ЯРОСЛАВЦЕВА Лариса Сергеевна

**О ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ НОРМАЛЬНЫМ
РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ И АСИМПТОТИЧЕСКИМИ
РАЗЛОЖЕНИЯМИ В ТЕРМИНАХ ПСЕВДОМОМЕНТОВ**

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2008

Работа выполнена на кафедре математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Ульянов Владимир Васильевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Сенатов Владимир Васильевич

кандидат физико-математических наук,
ведущий специалист компании "Интеррос"
Богатырев Сергей Анатольевич

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный университет

Защита диссертации состоится 12 декабря 2008 года в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 1-й учебный корпус, факультет ВМиК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМиК МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМиК Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова <http://www.cmc.msu.ru> в разделе „Наука“ — „Работа диссертационных советов“ — „Д 501.001.44“.

Автореферат разослан 12 ноября 2008 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор

Н. П. Трифонов

1. Общая характеристика работы.

Актуальность темы.

Классическая центральная предельная теорема — один из фундаментальных результатов теории вероятностей, устанавливающий равномерную сходимость функции распределения нормированной суммы независимых одинаково распределенных невырожденных случайных величин, имеющих конечные дисперсии, к функции распределения стандартного нормального закона. Если первая версия центральной предельной теоремы была доказана уже А. Муавром¹ в 18 веке, то её систематическое изучение началось в начале прошлого века с основополагающих работ А. М. Ляпунова^{2,3}. Были получены различные обобщения, в частности на многомерные и бесконечномерные пространства, а также ослаблены условия независимости и одинаковости распределённости слагаемых.

Важным вопросом, представляющим не только теоретический, но и большой практический интерес, является получение оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме. Этому вопросу, в частности, уделено большое внимание в фундаментальной монографии Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова⁴, в книгах В. В. Петрова⁵ и В. М. Золотарева⁶, а также посвящены специальные монографии Р. Н. Бхаттачария и Р. Ранга Рао⁷ и В. В. Сенатова⁸.

Классические оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме типа неравенства Берри-Эссеена формулируются в терминах абсолютных моментов слагаемых и, следовательно, учитывают только один из факторов, обуславливающих близость распределения нормированной суммы случайных величин и аппроксимирующего нормального распределения — большое число слагаемых n . Однако эти распределения могут быть близки и при небольших значениях n если распределения самих слагаемых близки к нормальным. Для учета не только первого, но и второго из указанных факторов в неклассических оценках вместо абсолютных моментов слагаемых исполь-

¹Moivre A. *Miscellanea Analytica Supplementum*. London, 1730.

²Ляпунов А. М. *Sur une proposition de la théorie des probabilités*. Bull. Acad. Imp. Sci. St. Petersbourg, 1900, **13**, 359–386.

³Ляпунов А. М. *Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité*. Mem. Acad. Imp. Sci. St. Petersbourg, Classe Phys. Math., 1901, **12**, 12.

⁴Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*. Москва-Ленинград, ГИТТЛ, 1949.

⁵Петров В. В. *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*. Наука, Москва, 1987.

⁶Золотарев В. М. *Современная теория суммирования независимых случайных величин*. Москва, Наука, 1986.

⁷Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. *Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения*. Москва, Наука, 1982.

⁸Senatov V. V. *Normal approximation: new results, methods and problems*. VSP, Utrecht, 1998.

зуются другие их характеристики — псевдомоменты, разностные моменты, идеальные метрики.

Исследования по неклассическим оценкам начались в середине 70-х годов прошлого века с основополагающей работы В. М. Золотарева⁹ и далее развивались этим автором, а также В. В. Сазоновым, В. И. Ротарем, С. В. Нагаевым, В. Паулаускасом, В. В. Ульяновым, В. В. Сенатовым и другими математиками. В некоторых задачах были получены в каком-то смысле оптимальные результаты. В то же время остались открытые проблемы. Одна из таких проблем — получение более точных оценок скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме в случае, когда слагаемые независимы, но не обязательно одинаково распределены.

Для получения приближений распределений нормированных сумм случайных величин более высокого порядка точности по n используются так называемые асимптотические разложения. Оценки точности аппроксимации асимптотическими разложениями в классическом виде так же, как и оценки точности приближения нормальным законом, формулируются в терминах абсолютных моментов слагаемых. Неклассические оценки в этой задаче до настоящего момента были получены лишь для случая одинаково распределенных случайных величин в работе А. Миталаускаса и В. Статулевичиуса¹⁰.

Цель работы.

Целью настоящей диссертации является уточнение неклассических оценок скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме в случае независимых, но не обязательно одинаково распределенных слагаемых, а также получение неклассических оценок точности аппроксимации асимптотическими разложениями для распределений нормированных сумм независимых случайных величин.

Научная новизна.

Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Получена неклассическая оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме в R^d с асимптотически наилучшим на настоящий момент показателем суммы псевдомоментов в общем случае независимых, но необязательно одинаково распределенных слагаемых.

⁹Золотарев В. М. *О близости распределений двух сумм независимых случайных величин*. Теория вероятн. и ее примен., 1965, **10**, 519–526.

¹⁰Миталаускас А., Статулявичус В. *Асимптотическое разложение в случае устойчивого аппроксимирующего закона*. Лит. матем. сб., 1976, **16**, № 4, 149–166.

2. Впервые получена неклассическая оценка точности аппроксимации коротким асимптотическим разложением Эджворта в R^1 для функции распределения нормированной суммы независимых случайных величин, имеющих конечные абсолютные моменты 3-го порядка.

3. Получены первые оценки в терминах псевдомоментов точности приближения функции распределения нормированной суммы независимых слагаемых, абсолютные моменты порядка s которых конечны, асимптотическими разложениями Бергстрема в R^1 порядка до $(s-2)$ включительно.

Методы исследования.

Основные методы, использовавшиеся для доказательства результатов работы — метод характеристических функций, метод композиций, представление разности двух сверток распределений, предложенное Х. Бергстромом¹¹, а также один подход, разработанный В. Бенткусом¹², основанный на специальном представлении разности математических ожиданий $\mathbf{E}\varphi(S_1) - \mathbf{E}\varphi(S_2)$, где $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ — гладкая функция, S_1 и S_2 — суммы независимых d -мерных случайных векторов, который использовался в работе для сглаженных индикаторных функций φ_A выпуклых множеств $A \subset \mathbb{R}^d$ и для функций $\varphi_t(x) = e^{itx}$, $t \in \mathbb{R}$.

Теоретическая и практическая значимость.

Результаты диссертации имеют теоретический характер и одновременно допускают применение к решению различных практических задач, связанных с использованием нормальной аппроксимации.

Апробация работы и публикации.

По теме диссертации опубликовано 6 печатных работ. Основные результаты диссертации докладывались на Международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам "Ломоносов-2005" (апрель 2005, Москва), на VI Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (май 2005, Санкт-Петербург), на научных семинарах Института математической стохастики университета им. Отто фон Герике (январь 2005, декабрь 2007, Магдебург, Германия), на XV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2008" (апрель 2008, Москва).

¹¹Bergström H. *On asymptotic expansions of probability functions*. Scand. Aktuarietidskrift., 1951, **34**, 1–34.

¹²Bentkus V. *A new approach to approximations in probability theory and operator theory*. Lithuanian Math. J., 2003, **43**, 367–388.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на разделы, приложения, содержащего вспомогательные результаты, и списка литературы из 70 наименований. Общий объем работы составляет 103 страницы.

2. Краткое содержание диссертации.

Введение содержит обоснование актуальности темы диссертации и исторический обзор, связанный с темой работы. Кроме этого, в нем также формулируются и обсуждаются полученные результаты.

Рассматривается последовательность $X_1, \dots, X_n$ независимых случайных векторов со значениями в $\mathbb{R}^d$ таких, что

$$\mathbf{E}|X_k|^2 < \infty, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Без ограничения общности будем считать, что $\mathbf{E}X_k = 0$ и положим

$$\Sigma_k^2 = \text{Cov}(X_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

В случае $d = 1$ для величин $\Sigma_k^2 = \mathbf{D}X_k$, $k = 1, \dots, n$, будем использовать более привычные обозначения $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$. Будем предполагать, что

$$\Sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Sigma_k^2 > 0 \quad (2)$$

и обозначим через $F^{[n]}$ и $Q^{[n]}$ соответственно функцию распределения и распределение вектора $\Sigma^{-1}(X_1 + \dots + X_n)$. Пусть Q_k обозначает распределение вектора X_k , а $N_{\Sigma_k^2}$ — нормальное распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей Σ_k^2 . Для $r \geq 0$ введем абсолютный момент порядка r случайного вектора X_k ,

$$\beta_{r,k} = \mathbf{E}|X_k|^r,$$

а также абсолютные псевдомоменты порядка r случайных векторов X_k и $\Sigma^{-1}X_k$,

$$\begin{aligned} \nu_{r,k} &= \int_{\mathbb{R}^d} |z|^r |Q_k - N_{\Sigma_k^2}|(dz), \\ \bar{\nu}_{r,k} &= \int_{\mathbb{R}^d} |\Sigma^{-1}z|^r |Q_k - N_{\Sigma_k^2}|(dz). \end{aligned}$$

Положим

$$\beta_r = \sum_{k=1}^n \beta_{r,k}, \quad \nu_r = \sum_{k=1}^n \nu_{r,k}, \quad \bar{\nu}_r = \sum_{k=1}^n \bar{\nu}_{r,k}.$$

Через Φ и N будем обозначать функцию распределения и распределение стандартного нормального вектора в $\mathbb{R}^d$.

Глава 1 посвящена уточнению неклассических оценок скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме.

Как уже отмечалось ранее, первая неклассическая оценка была получена В. М. Золотаревым⁹ для случая одинаково распределенных слагаемых при $d = 1$. Эта оценка имела следующий вид (здесь и далее символами c , $c(\dots)$ будем обозначать положительные постоянные, значения которых в разных местах текста могут быть различны):

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F^{[n]}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{c}{n^{1/8}} \cdot \left(\frac{\nu_{3,1}}{\sigma_1^3} \right)^{1/4}. \quad (3)$$

Напомним, что известное неравенство Берри-Эссеена^{13,14} записывается в виде

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F^{[n]}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{c}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\beta_{3,1}}{\sigma_1^3}.$$

Порядок сходимости $n^{-1/8}$ в (3) не является оптимальным. Первая неклассическая оценка с правильным порядком сходимости по n была получена В. Паулаускасом¹⁵, показавшим, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F^{[n]}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{c}{\sqrt{n}} \cdot \max \left(\frac{\nu_{3,1}}{\sigma_1^3}, \left(\frac{\nu_{3,1}}{\sigma_1^3} \right)^{1/4} \right). \quad (4)$$

Если $\nu_{3,1}/\sigma_1^3$ мало, а именно — если $\nu_{3,1}/\sigma_1^3 < 1$, то правая часть неравенства (4) есть $c/\sqrt{n} \cdot (\nu_{3,1}/\sigma_1^3)^{1/4}$. Поскольку этот случай представляет из себя наибольший интерес (напомним, что мы вводили псевдомоменты для учета возможной близости распределений слагаемых к нормальным распределениям), то естественно поставить вопрос о том, можно ли улучшить оценку (4) за счет повышения показателя $1/4$.

В. М. Золотарев¹⁶ построил пример, иллюстрирующий, что при $n = 1$ этого сделать нельзя. Однако, оценка (4) может быть существенно улучшена при $n > 1$. В. В. Ульянов¹⁷ доказал, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F^{[n]}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{c}{\sqrt{n}} \cdot \max \left(\frac{\nu_{3,1}}{\sigma_1^3}, \left(\frac{\nu_{3,1}}{\sigma_1^3} \right)^{\min(n/4, 1)} \right), \quad (5)$$

¹³Berry A. C. *The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates*. Trans. Amer. Math. Soc., 1941, **49**, 122–136.

¹⁴Esseen C-G. *On the Liapunoff limit of error in the theory of probability*. Ark. Mat. Astr. och Fys., 1942, **28A**, 19.

¹⁵Паулаускас В. *Об одном усилении теоремы Ляпунова*. Лит. матем. сб., 1969, **9**, 323–328.

¹⁶Zolotarev V. M. *Exactness of an approximation in the central limit theorem*. Proc. Second Japan-USSR Symp. Probab. Theory, Lect. Notes Math., 1968, **330**, 531–543.

¹⁷Ульянов В. В. *К уточнению оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме*. Теория вероятн. и ее примен., 1978, **23**, 684–688.

причем показатель $\min(n/4, 1)$ не может быть повышен.

Теперь перейдем к рассмотрению более общего случая, а именно — откажемся от условия, что слагаемые $X_1, \dots, X_n$ распределены одинаково. Положим

$$s_n^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 \quad (6)$$

и

$$L = \frac{\sigma_1^3 + \dots + \sigma_n^3}{(\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)^{3/2}}. \quad (7)$$

С. В. Нагаевым и В. И. Ротарем¹⁸ была получена оценка

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F^{[n]}(x) - \Phi(x)| \leq c \cdot \max\left(\frac{\nu_3}{s_n^3}, \left(\frac{\nu_3}{s_n^3}\right)^{1/4} \cdot L^{3/4}\right), \quad (8)$$

обобщающая результат В. Паулаускаса (4) для случая одинаково распределенных слагаемых (заметим, что тогда $L = 1/\sqrt{n}$ и $s_n^3 = n\sqrt{n} \cdot \sigma_1^3$). В. В. Ульянов¹⁷ улучшил эту оценку показав, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F^{[n]}(x) - \Phi(x)| \leq c \cdot \max\left(\frac{\nu_3}{s_n^3}, \left(\frac{\nu_3}{s_n^3}\right)^{1/2 \cdot (1-2^{-q})} \cdot L^{1/2 \cdot (1+2^{-q})}\right) \quad (9)$$

с

$$q = \left\lfloor \frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}{\max_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2} \right\rfloor. \quad (10)$$

Поскольку $q \geq 1$, то всегда

$$1/2 \cdot (1 - 2^{-q}) \geq 1/4.$$

Однако, если $X_1, \dots, X_n$ имеют одинаковое распределение, то $q = n$ и (9) примет вид

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F^{[n]}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{c}{\sqrt{n}} \cdot \max\left(\frac{\nu_3}{\sigma_1^3}, \left(\frac{\nu_3}{\sigma_1^3}\right)^{1/2 \cdot (1-2^{-n})}\right),$$

показатель псевдомомента в которой $1/2 \cdot (1 - 2^{-n})$ не является оптимальным при $n \geq 2$ в силу (5). Добавим также, что В. В. Ульяновым¹⁹ было объявлено следующее улучшение (9):

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F^{[n]}(x) - \Phi(x)| \leq c \cdot \max\left(\frac{\nu_3}{s_n^3}, \left(\frac{\nu_3}{s_n^3}\right)^{\min(q/4, 1)}\right),$$

¹⁸Нагаев С. В., Ротарь В. И. *Об усилении оценок типа Ляпунова (случай близости распределений слагаемых к нормальному)*. Теория вероятн. и ее примен., 1973, **18**, 109–121.

¹⁹Ульянов В. В. *Оценки скорости сходимости по вариации в центральной предельной теореме для разнораспределенных слагаемых*. Теория вероятн. и ее примен., 1979, **24**, 662–663.

очевидно обобщающее результат (5).

Теперь перейдем к многомерному случаю ($d \geq 1$) и для начала предположим, что $X_1, \dots, X_n$ имеют одинаковое распределение. Первая неклассическая оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме была получена В. Паулаускасом в ²⁰, где оценивалось максимальное отклонение распределения $Q^{[n]}$ от стандартного нормального распределения N на классе d -мерных интервалов. В данной работе нас будут интересовать оценки близости $Q^{[n]}$ и N на более широком классе $\mathcal{C}$ выпуклых борелевских подмножеств $\mathbb{R}^d$. В. Паулаускасом²¹ было показано, что

$$\sup_{A \in \mathcal{C}} |Q^{[n]}(A) - N(A)| \leq \frac{c(d)}{\sqrt{n}} \cdot \max(\bar{\nu}_{3,1}, \bar{\nu}_{3,1}^{1/4}). \quad (11)$$

Очевидно, (11) обобщает результат (4) того же автора. Позднее В. В. Сазонов²² улучшил показатель псевдомомента $1/4$ в (11), получив оценку

$$\sup_{A \in \mathcal{C}} |Q^{[n]}(A) - N(A)| \leq \frac{c(d)}{\sqrt{n}} \cdot \max(\bar{\nu}_{3,1}, \bar{\nu}_{3,1}^{d/(d+3)}).$$

В. В. Ульянову¹⁷ удалось далее повысить этот показатель. Он доказал, что

$$\sup_{A \in \mathcal{C}} |Q^{[n]}(A) - N(A)| \leq \frac{c(d)}{\sqrt{n}} \cdot \max(\bar{\nu}_{3,1}, \bar{\nu}_{3,1}^{\kappa(n,d)}), \quad (12)$$

с оптимальным показателем

$$\kappa(n, d) = \min\left(1, \frac{nd}{d+3}\right). \quad (13)$$

Очевидно, результат В. В. Ульянова (5) для $d = 1$ вытекает из (12).

Первая неклассическая оценка близости распределений $Q^{[n]}$ и N в общем случае независимых, но необязательно одинаково распределенных случайных векторов в $\mathbb{R}^d$ была получена В. Паулаускасом²¹, который показал, что

$$\sup_{A \in \mathcal{C}} |Q^{[n]}(A) - N(A)| \leq c(d) \cdot \left(\frac{\bar{\nu}_3}{n\sqrt{n}}\right)^{1/4}. \quad (14)$$

Если $X_1, \dots, X_n$ распределены одинаково, то оценка (14) примет вид

$$\sup_{A \in \mathcal{C}} |Q^{[n]}(A) - N(A)| \leq \frac{c(d)}{n^{1/8}} \cdot \bar{\nu}_{3,1}^{1/4}. \quad (15)$$

²⁰Паулаускас В. *Об оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. I.* Лит. матем. сб., 1969, **9**, 329–343.

²¹Паулаускас В. *Об оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. II.* Лит. матем. сб., 1969, **9**, 791–815.

²²Sazonov V. V. *On a bound for the rate of convergence in the multidimensional central limit theorem.* Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., 1972, **II**, 563–581.

Как следует из (12), порядок убывания по n в (15) не является правильным. Кроме этого, показатель псевдомомента $1/4$ меньше оптимального при $n > 1$, см. (13).

Первый результат для общего случая с правильным порядком сходимости $1/\sqrt{n}$ в частном случае одинаково распределенных слагаемых был получен В. И. Ротарем^{23,24}. Введем величины

$$\mathfrak{s}_k^2(\theta) = \mathbf{E}(\theta^T \Sigma^{-1} X_k)^2,$$

где $\theta \in \mathbb{R}^d$ и $k = 1, \dots, n$. Положим

$$\tilde{L}(\theta) = \frac{\mathfrak{s}_1^3(\theta) + \dots + \mathfrak{s}_n^3(\theta)}{(\mathfrak{s}_1^2(\theta) + \dots + \mathfrak{s}_n^2(\theta))^{3/2}},$$

$$\tilde{L} = \sup_{|\theta|=1} \tilde{L}_n(\theta), \quad \tilde{q} = 1/\tilde{L}_n^2.$$

Для $\delta \in (0, 1)$ и $x \geq 0$ определим функцию

$$\tilde{\chi}_\delta(x) = \frac{\lfloor x \cdot \delta/64 \rfloor}{3\lfloor x \cdot \delta/64 \rfloor + 2d + 8}.$$

Оценка, полученная В. И. Ротарем, может быть сформулирована в следующем виде: для любого $\delta \in (0, 1)$ существует положительная постоянная $c(\delta, d)$ такая, что если

$$\tilde{q} \geq \frac{d + 5}{(1 - \sqrt[3]{\delta})^3},$$

то

$$\sup_{A \in \mathcal{C}} |Q^{[n]}(A) - N(A)| \leq c(\delta, d) \cdot \max \left(\frac{\bar{\nu}_3}{n\sqrt{n}}, \left(\frac{\bar{\nu}_3}{n\sqrt{n}} \right)^{\tilde{\chi}_\delta(\tilde{q})} \cdot \tilde{L}^{1-\tilde{\chi}_\delta(\tilde{q})} \right). \quad (16)$$

В первой главе диссертации мы получаем неклассическую оценку величины

$$\sup_{A \in \mathcal{C}} |Q^{[n]}(A) - N(A)|$$

с асимптотически наилучшим на настоящий момент показателем суммы псевдомоментов.

Пусть

$$\mathfrak{s}_k^2 = \text{tr Cov}(\Sigma^{-1} X_k),$$

²³Ротарь В. И. *Неклассические оценки скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. I*. Теория вероятн. и ее примен., 1977, **22**, 774–790.

²⁴Ротарь В. И. *Неклассические оценки скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. II*. Теория вероятн. и ее примен., 1978, **23**, 55–66.

а величины L и q в многомерном случае определяются формулами (7) и (10) с заменой $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ соответственно на $\mathfrak{s}_1^2, \dots, \mathfrak{s}_n^2$ (заметим, что $\mathfrak{s}_k^2 = \sigma_k^2$, $k = 1, \dots, n$, при $d = 1$). Для $x \geq 0$ положим

$$\chi(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12 \cdot 2^{\lfloor \frac{x}{2d} \rfloor}}.$$

В разделе 1.1 формулируется следующая теорема.

Теорема 1.1. *Существует положительная постоянная M такая, что*

$$\sup_{A \in \mathcal{C}} |Q^{[n]}(A) - N(A)| \leq M \cdot d^{\frac{9}{16}} \cdot \max \left(\frac{\bar{\nu}_3}{n\sqrt{n}}, \left(\frac{\bar{\nu}_3}{n\sqrt{n}} \right)^{\chi(q)} (d^{\frac{3}{2}} \cdot L)^{1-\chi(q)} \right). \quad (17)$$

В разделе 1.2 приводится сравнение оценки (17) с результатом (16).

Утверждение 1.1. *Имеем*

$$L \leq \tilde{L} \leq d^{3/2} \cdot L.$$

Кроме этого,

$$1/3 - \tilde{\chi}_\delta(\tilde{q}) \geq \frac{128(d+4)}{(q+1)^3} \cdot 2^{\lfloor q/(2d) \rfloor} \cdot (1/3 - \chi(q)),$$

если $\tilde{q} \geq 128(d+4)/\delta$ и

$$\tilde{\chi}_\delta(\tilde{q}) < \chi(q),$$

если $\tilde{q} < 128(d+4)/\delta$.

Из утверждения 1.1 следует, что показатель суммы псевдомоментов $\chi(q)$ при $q \rightarrow \infty$ сходится к $1/3$ гораздо быстрее, чем показатель $\tilde{\chi}(\tilde{q})$, а именно — разность $(1/3 - \tilde{\chi}(\tilde{q}))$ экспоненциально больше при $q \rightarrow \infty$, чем разность $(1/3 - \chi(q))$.

В разделе 1.3 приведено доказательство теоремы 1.1. В частности, сформулированы и доказаны следующие леммы.

Будем предполагать, что $q \geq 2d$. Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$, $A \in \mathcal{C}$, а функция $\varphi_{\varepsilon, A} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

- 1) $0 \leq \varphi_{\varepsilon, A} \leq 1$, $\varphi_{\varepsilon, A}(x) = 1$ для $x \in A$ и $\varphi_{\varepsilon, A}(x) = 0$ для $x \notin A^{\varepsilon^{25}}$;
- 2) для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$|\varphi'_{\varepsilon, A}(x)| \leq \frac{2}{\varepsilon}, \quad |\varphi'_{\varepsilon, A}(x) - \varphi'_{\varepsilon, A}(y)| \leq \frac{8|x-y|}{\varepsilon^2};$$

- 3) $\varphi_{\varepsilon, A}(x) = \psi(\rho(x, A)/\varepsilon)$, где $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — неотрицательная невозрастающая непрерывно дифференцируемая функция такая, что

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi'(t)| dt = 1.$$

²⁵ $A^\varepsilon(x) = \{x \in \mathbb{R}^d : \rho(x, A) \leq \varepsilon\}$.

Пусть d -мерные случайные векторы $Y_1, \dots, Y_n$ имеют нормальные распределения с нулевыми средними и ковариационными матрицами $\Sigma_1^2, \dots, \Sigma_n^2$, а случайная величина α равномерно распределена на $[0, \pi/2]$. Предположим, что $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, \alpha$ — независимы. Пусть

$$I_1 = I_{[0, \arcsin \varepsilon]}(\alpha)^{26}, \quad I_2 = I_{[\arcsin \varepsilon, \pi/2]}(\alpha).$$

Для $k = 1, \dots, n$ положим

$$H_k = \cos \alpha \cdot \sum_{i \neq k} X_i + \sin \alpha \cdot \sum_{i \neq k} Y_i,$$

$$C_k^2 = \text{Cov}\left(\sum_{i \neq k} X_i\right),$$

а также

$$I_{\varepsilon, A, k}^{(1)} = \mathbf{E} I_1 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi'_{\varepsilon, A}(H_k + z \cos \alpha + Y_k \sin \alpha)(-z \sin \alpha + Y_k \cos \alpha)(Q_k - N_{\Sigma_k^2})(dz),$$

$$I_{\varepsilon, A, k}^{(2)} = \mathbf{E} I_2 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi'_{\varepsilon, A}(H_k + z \cos \alpha + Y_k \sin \alpha)(-z \sin \alpha + Y_k \cos \alpha)(Q_k - N_{\Sigma_k^2})(dz),$$

$$I_{\varepsilon, A, k}^{(3)} = \mathbf{E} I_2 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi'_{\varepsilon, A}(T_k + z \cos \alpha + Y_k \sin \alpha)(-z \sin \alpha + Y_k \cos \alpha)(Q_k - N_{\Sigma_k^2})(dz),$$

где T_k — случайный вектор, имеющий нормальное распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей C_k^2 и независимый с вектором $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Y'_k, \alpha)$.

Лемма 1.1.

$$|I_{\varepsilon, A, k}^{(3)}| \leq c \cdot \frac{\bar{\nu}_{3, k}}{n\sqrt{n}}.$$

Лемма 1.2.

$$|I_{\varepsilon, A, k}^{(1)}| \leq \frac{c}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\bar{\nu}_{3, k}}{n\sqrt{n}} + \frac{\mathfrak{s}_k^2 \cdot \bar{\nu}_{1, k}}{n\sqrt{n}} \right) \cdot \left(d^{\frac{1}{4}} \varepsilon + Md^{\frac{9}{16}} \cdot \left(\frac{\bar{\nu}_3}{n\sqrt{n}} + \left(\frac{\bar{\nu}_3}{n\sqrt{n}} \right)^{2\chi(q) - \frac{1}{3}} (d^{\frac{3}{2}} \cdot L)^{\frac{4}{3} - 2\chi(q)} \right) \right).$$

Лемма 1.3.

$$|I_{\varepsilon, A, k}^{(2)} - I_{\varepsilon, A, k}^{(3)}| \leq \frac{cMd^{\frac{9}{16}}}{\varepsilon} \left(\frac{\bar{\nu}_{3, k}}{n\sqrt{n}} + \frac{\mathfrak{s}_k^2 \bar{\nu}_{1, k}}{n\sqrt{n}} \right) \left(\frac{\bar{\nu}_3}{n\sqrt{n}} + \left(\frac{\bar{\nu}_3}{n\sqrt{n}} \right)^{2\chi(q) - \frac{1}{3}} (d^{\frac{3}{2}} \cdot L)^{\frac{4}{3} - 2\chi(q)} \right).$$

²⁶ $I_A(x) = 1$, если $x \in A$ и $I_A(x) = 0$, если $x \notin A$.

Глава 2 посвящена получению неклассической оценки точности аппроксимации функции $F^{[n]}$ коротким асимптотическим разложением Эджворта.

В этой главе рассматривается случай $d = 1$. Помимо условий (1) и (2), накладываемых на последовательность $X_1, \dots, X_n$, здесь мы дополнительно предполагаем, что

$$\beta_3 = \beta_{3,1} + \dots + \beta_{3,k} < \infty.$$

Пусть

$$\tau_n = \frac{\mathbf{E}X_1^3 + \dots + \mathbf{E}X_n^3}{s_n^3}$$

(напомним, что s_n^2 определяется равенством (6)). Обозначим через $G^{[n]}$ короткое асимптотическое разложение Эджворта функции $F^{[n]}$,

$$G^{[n]}(x) = \Phi(x) + \frac{\tau_n}{6\sqrt{2\pi}} \cdot (1 - x^2) \cdot e^{-x^2/2}.$$

Пусть f_k обозначает характеристическую функцию $s_n^{-1} \cdot X_k$,

$$\vartheta_k = \sup_{|t| > s_n^3/(36\beta_3)} |f_k(t)|$$

и

$$K = \frac{\sigma_1^4 + \dots + \sigma_n^4}{(\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)^2}.$$

В разделе 2.1 формулируется следующий результат.

Теорема 2.1. *Существует положительная постоянная M такая, что*

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F^{[n]}(x) - G^{[n]}(x)| \leq M \cdot \left(\max\left(\frac{\nu_4}{s_n^4}, \left(\frac{\nu_4}{s_n^4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot K^{\frac{1}{2}}\right) + \left(1 + \frac{\nu_4}{s_n^4}\right) \left(\frac{\beta_3}{s_n^3}\right)^4 \right. \\ \left. + \max\left(0, \ln \frac{s_n^3}{\beta_3}\right) \prod_{k=1}^n \vartheta_k \right). \end{aligned}$$

В случае, когда рассматриваемые случайные величины распределены одинаково, имеем $\nu_4 = n \cdot \nu_{4,1}$, $s_n^2 = n \cdot \sigma_1^2$, $K = 1/n$, $\beta_3 = n \cdot \beta_{3,1}$, $\vartheta_1 = \dots = \vartheta_n$ и теорема 2.1 примет следующий вид.

Следствие 2.1. *Найдется положительная постоянная M такая, что если $X_1, \dots, X_n$ имеют одинаковое распределение, то*

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| F^{[n]}(x) - \Phi(x) - \frac{\mathbf{E}X_1^3}{6\sqrt{2\pi n} \cdot \sigma_1^3} \cdot (1 - x^2) \cdot e^{-x^2/2} \right| \\ \leq M \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \max\left(\frac{\nu_{4,1}}{\sigma_1^4}, \left(\frac{\nu_{4,1}}{\sigma_1^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{n^2} \cdot \left(1 + \frac{\nu_{4,1}}{n \cdot \sigma_1^4}\right) \cdot \left(\frac{\beta_{3,1}}{\sigma_1^3}\right)^4 \right. \\ \left. + \max\left(0, \ln \frac{\sqrt{n} \cdot \sigma_1^3}{\beta_{3,1}}\right) \cdot \vartheta_1^n \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что если характеристические функции слагаемых удовлетворяют так называемому условию Крамера,

$$\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |f_1(t)| < 1, \quad (19)$$

и

$$\beta_{4,1} < \infty$$

(из последнего условия следует также и конечность $\nu_{4,1}$, поскольку всегда $\nu_{4,1} \leq 4 \cdot \beta_{4,1}$), то оценка (18) имеет правильный порядок сходимости, $1/n$, а множитель при главном члене убывания,

$$\max\left(\frac{\nu_{4,1}}{\sigma_1^4}, \left(\frac{\nu_{4,1}}{\sigma_1^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

определяется лишь нормированным четвертым псевдомоментом X_1 .

Доказательство теоремы 2.1 приводится в разделе 2.2. В частности, в этом разделе формулируются и доказываются следующие леммы.

Будем предполагать, что $q \geq 3$ (напомним, что q определяется формулой (10)). Пусть

$$\gamma = \frac{s_n^3}{\beta_3}, \quad (20)$$

f и g обозначают преобразования Фурье-Стилтьеса функций $F^{[n]}$ и $G^{[n]}$ соответственно и положим

$$I_1 = \int_{(-\gamma/36, \gamma/36)} \frac{|f(t) - g(t)|}{|t|} dt, \quad I_2 = \int_D \frac{|f(t)|}{|t|} dt, \quad I_3 = \int_D \frac{|g(t)|}{|t|} dt$$

с $D = (-\gamma^4/36, -\gamma/36) \cup (\gamma/36, \gamma^4/36)$.

Лемма 2.1. *Имеем*

$$I_2 \leq 6 \max(0, \ln \gamma) \cdot \prod_{k=1}^n \vartheta_k, \quad I_3 \leq c \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot (\frac{\gamma}{36})^2}.$$

Введем случайные величины Y_k и $\overline{Y}_k$, имеющие нормальные распределения с нулевыми средними и дисперсиями σ_k^2 , $k = 1, \dots, n$, а также случайные величины α_1 и α_2 , равномерно распределенные на $[0, \pi/2]$. Предположим, что $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, \overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_n, \alpha_1, \alpha_2$ — независимы. Для $\ell, j \in \{1, \dots, n\}$ положим

$$S = \sum_{k=1}^n X_k, \quad S_\ell = \sum_{k \neq \ell} X_k, \quad S_{\ell,j} = \sum_{k \notin \{\ell, j\}} X_k$$

и определим $Z, Z_\ell, Z_{\ell,j}$ и $\bar{Z}, \bar{Z}_\ell, \bar{Z}_{\ell,j}$ аналогичным образом, заменяя X_k на Y_k и X_k на $\bar{Y}_k$, соответственно. Для функции $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, имеющей непрерывную вторую производную, положим

$$\begin{aligned} A_{1,\ell}(\varphi) &= -\frac{1}{s_n} \cdot \mathbf{E}\varphi'(s_n^{-1}(\bar{Z}_\ell \cos \alpha_1 + Z_\ell \sin \alpha_1 + X_\ell \cos \alpha_1 + Y_\ell \sin \alpha_1)) \\ &\quad \times (-X_\ell \sin \alpha_1 + Y_\ell \cos \alpha_1), \\ A_{2,\ell,j}(\varphi) &= \frac{1}{s_n^2} \cdot \mathbf{E}\varphi''(s_n^{-1}(S_{\ell,j} \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 + \bar{Z}_{\ell,j} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + Z_\ell \sin \alpha_1 \\ &\quad + X_\ell \cos \alpha_1 + Y_\ell \sin \alpha_1 + X_j \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 + \bar{Y}_j \sin \alpha_2 \cos \alpha_1)) \\ &\quad \times (-X_\ell \sin \alpha_1 + Y_\ell \cos \alpha_1) \cdot (-X_j \sin \alpha_2 + \bar{Y}_j \cos \alpha_2) \cdot \cos \alpha_1, \end{aligned}$$

где $\ell, j \in \{1, \dots, n\}$.

Лемма 2.2. Пусть $\varphi_t(x) = e^{itx}$, где $t, x \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} I_1 &\leq c \left(\sum_{\ell=1}^n \int_{(-\gamma/36, \gamma/36)} \left| A_{1,\ell}(\varphi_t) - \frac{\mathbf{E}X_\ell^3}{3\pi \cdot s_n^3} \cdot (it)^3 \cdot e^{-t^2/2} \right| \cdot \frac{1}{|t|} dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\ell=1}^n \sum_{j \neq \ell} \int_{(-\gamma/36, \gamma/36)} |A_{2,\ell,j}(\varphi_t)| \cdot \frac{1}{|t|} dt \right). \end{aligned}$$

Лемма 2.3. Для всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\left| A_{1,\ell}(\varphi_t) - \frac{\mathbf{E}X_\ell^3}{3\pi \cdot s_n^3} \cdot (it)^3 \cdot e^{-t^2/2} \right| \leq c \cdot \frac{\nu_{4,\ell} + \nu_{3,\ell}\sigma_\ell + \nu_{2,\ell}\sigma_\ell^2}{s_n^4} \cdot t^4 \cdot e^{-\frac{t^2}{3}}.$$

Лемма 2.4. Если $t \in (-\gamma/36, \gamma/36)$, то

$$|A_{2,\ell,j}(\varphi_t)| \leq \frac{(\nu_{3,\ell} + \nu_{2,\ell} \cdot \sigma_\ell) \cdot (\nu_{3,j} + \nu_{2,j} \cdot \sigma_j)}{s_n^6} \cdot t^6 \cdot e^{-\frac{t^2}{12}}.$$

В главе 3 мы получаем неклассические оценки точности приближения функции $F^{[n]}$ асимптотическими разложениями Бергстрема.

Как и в главе 2, здесь мы рассматриваем случай $d = 1$. Будем предполагать, что для некоторого целого $s \geq 3$

$$\beta_s < \infty.$$

Для $p, i \in \mathbb{N}$ и $\ell, j \in \mathbb{N}^p$ положим

$$\ell! = \ell_1! \cdots \ell_p!,$$

$$|\ell| = \ell_1 + \dots + \ell_p$$

и определим множества

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{p,i} &= \{\ell \in \mathbb{N}^p : \ell_1, \dots, \ell_p \geq 3, |\ell| = 2p + i\}, \\ \mathcal{M}_p &= \{j \in \mathbb{N}^p : 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n\}.\end{aligned}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что

$$n \geq s.$$

Рассмотрим n независимых случайных величин $Y_1, \dots, Y_n$, имеющих нормальные распределения с нулевыми средними и дисперсиями $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ соответственно. Для $j \in \mathcal{M}_p$ и $\ell \in \mathcal{L}_{p,i}$ обозначим

$$\Phi_j(x) = \Phi\left(x \cdot (1 - (\sigma_{j_1}^2 + \dots + \sigma_{j_p}^2)/s_n^2)^{-1/2}\right)$$

и

$$Q_j^\ell = (\mathbf{E}X_{j_1}^{\ell_1} - \mathbf{E}Y_{j_1}^{\ell_1}) \dots (\mathbf{E}X_{j_p}^{\ell_p} - \mathbf{E}Y_{j_p}^{\ell_p}).$$

Наконец, для $m = 1, \dots, s - 2$ определим функции

$$A_m(x) = \frac{1}{s_n^m} \sum_{p=1}^m \sum_{\ell \in \mathcal{L}_{p,m}} \frac{(-1)^m}{s_n^{2p} \cdot \ell!} \sum_{j \in \mathcal{M}_p} Q_j^\ell \cdot \Phi_j^{(|\ell|)}(x)$$

и обозначим через $H_n^{(s)}$ асимптотическое разложение Бергстрема длины $(s - 2)$ функции $F^{[n]}$,

$$H_n^{(s)}(x) = \Phi(x) + \sum_{m=1}^{s-2} A_m(x).$$

Пусть

$$\delta = 1 - \max_{j \in \mathcal{M}_{s-1}} \frac{\sigma_{j_1}^2 + \dots + \sigma_{j_{s-1}}^2}{s_n^2},$$

f_k — характеристическая функция $s_n^{-1} \cdot X_k$ и

$$\theta_k = \sup_{|t| > \delta s_n^3 / (4\beta_3)} |f_k(t)|.$$

В разделе 3.1 формулируется следующая оценка.

Теорема 3.1. *Существует положительная постоянная $c(s)$ такая, что*

$$\begin{aligned}\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| F^{[n]}(x) - H_n^{(s)}(x) \right| &\leq c(s) \cdot \frac{1}{\delta^{3s/2}} \cdot \left(\frac{\nu_{s+1}}{s_n^{s+1}} + \left(1 + \frac{\nu_{s+1}}{s_n^{s+1}} \right) \cdot \left(\frac{\beta_3}{s_n^3} \right)^s \right. \\ &\quad \left. + \max\left(0, \ln \frac{s_n^3}{\beta_3}\right) \cdot \prod_{k=1}^n \theta_k \right).\end{aligned}$$

В случае одинаково распределенных слагаемых $\nu_{s+1} = n \cdot \nu_{s+1,1}$, $s_n^2 = n \cdot \sigma_1^2$, $\beta_3 = n \cdot \beta_{3,1}$, $\theta_1 = \dots = \theta_n$, а $\delta \geq 1/s$. Поэтому имеет место следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Существует положительная постоянная $c(s)$ такая, что если случайные величины $X_1, \dots, X_n$ распределены одинаково, то*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| F^{[n]}(x) - H_n^{(s)}(x) \right| \leq c(s) \left(\frac{1}{n^{\frac{s-1}{2}}} \cdot \frac{\nu_{s+1,1}}{\sigma_1^{s+1}} + \frac{1}{n^{\frac{s}{2}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^{\frac{s-1}{2}}} \cdot \frac{\nu_{s+1,1}}{\sigma_1^{s+1}} \right) \cdot \left(\frac{\beta_{3,1}}{\sigma_1^3} \right)^s + \max\left(0, \ln \frac{\sqrt{n} \cdot \sigma_1^3}{\beta_{3,1}}\right) \cdot \theta_1^n \right). \quad (21)$$

Если характеристические функции слагаемых удовлетворяют условию Крамера (19) и

$$\beta_{s+1,1} < \infty$$

(откуда $\nu_{s+1,1} < \infty$), то оценка (21) имеет правильный порядок сходимости,

$$1/n^{\frac{s-1}{2}},$$

а множитель при главном члене убывания есть нормированный псевдомомент X_1 порядка $s+1$.

Раздел 3.2 посвящен доказательству теоремы 3.1. В частности, в нем сформулированы и доказаны две следующие леммы.

Пусть γ определяется формулой (20), $f, g, g_1, \dots, g_{s-2}$ обозначают преобразования Фурье-Стилтьеса функций $F^{[n]}, \Phi, A_1, \dots, A_{s-2}$ соответственно и положим

$$I_1^{(s)} = \int_{(-\delta\gamma/4, \delta\gamma/4)} \frac{|f(t) - g(t) - \sum_{m=1}^{s-2} g_m(t)|}{|t|} dt,$$

$$I_2^{(s)} = \int_G \frac{|f(t)|}{|t|} dt, \quad I_3^{(s)} = \int_G \frac{|g(t) + \sum_{m=1}^{s-2} g_m(t)|}{|t|} dt,$$

где $G = (-\delta\gamma^s/4, -\delta\gamma/4) \cup (\delta\gamma/4, \delta\gamma^s/4)$.

Лемма 3.1. *Справедливы оценки*

$$I_2^{(s)} \leq 2(s-1) \cdot \max(0, \ln \gamma) \cdot \prod_{k=1}^n \theta_k,$$

$$I_3^{(s)} \leq c(s) \cdot \frac{1}{\delta^{\max(3, 3(s-2)/2)}} \cdot \left(1 + \frac{\nu_{s+1}}{s_n^{s+1}} \right) \cdot e^{-\frac{\delta^3 \gamma^2}{64}}.$$

Лемма 3.2. *Имеем*

$$I_1^{(s)} \leq c(s) \cdot \frac{1}{\delta^{3(s-1)/2}} \cdot \frac{\nu_{s+1}}{s_n^{s+1}}.$$

В приложении приведены вспомогательные результаты, полученные другими авторами, которые использовались для доказательства теорем 1.1, 2.1 и 3.1.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю В.В. Ульянову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

3. Список публикаций автора по теме диссертации.

- [1] Ярославцева Л. С. *О неклассической оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме в $\mathbb{R}^1$* . Материалы Международной конференции "Ломоносов-2005", секция "Вычислительная математика и кибернетика", с. 79-80.
- [2] Yaroslavtseva L. S. *Non-classical bounds in the central limit theorem in $\mathbb{R}^d$* . Otto-von-Guericke University Magdeburg, Germany, 2005, preprint 05-15.
- [3] Ярославцева Л. С. *О неклассической оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме*. Обозрение прикладной и промышленной математики, 2005, т. 12, вып. 1, с. 206.
- [4] Ярославцева Л. С. *Неклассическая оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме*. Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика, 2006, № 2, с. 25-31.
- [5] Ярославцева Л. С. *Неклассические оценки точности приближения асимптотическими разложениями в центральной предельной теореме в $\mathbb{R}^1$* . Сборник тезисов XV Международной конференции "Ломоносов-2008", секция "Вычислительная математика и кибернетика", с. 94-95.
- [6] Ярославцева Л. С. *Неклассические оценки точности приближения асимптотическими разложениями в центральной предельной теореме*. Теория вероятностей и ее применения, 2008, т. 53, вып. 2, с. 390-393.